離 散 数 学

（平成 25 年 9 月改訂）

目 次

1 集合

数学的にキチンと定められたものの集まりを**集合**という。たとえば、2 記号 a, b の集合、1 から 5 までの 5 個の自然数の集合、すべての偶数 $\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots$ の集合、すべての複素数の集合、平面上のすべての点の集合などは数学的にキチンと定まっていると考えられる。2 記号 a, b からなる集合を $\{a, b\}$ と表す。また、正の偶数全体の集合は $\{2, 4, 6, \ldots\}$ で表す。この場合「$\ldots$」は、前後の関係からその意味が明らかな場合に使用する。

一般に x に関する数学的にキチンと定められる条件を $C(x)$ とすると、$C(x)$ を満たす x 全体からなる集合を

$$\{x \mid C(x)\}$$

と表す[1]。R が実数全体の集合なら $\{x \mid x \in \mathsf{R},\ 0 \leq x \leq 1\}$ は $0 \leq x \leq 1$ を満たす実数全体の集合である。

「α という概念を β のことであると定義する」ことを

$$\alpha \overset{def}{\Longleftrightarrow} \beta$$

と書く。また「α の値を β の値として定義する」ことを

$$\alpha \overset{def}{=} \beta$$

と書く。

次の論理演算子 $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$ を考える。

α かつ β	$\alpha \wedge \beta$
α または β	$\alpha \vee \beta$
α でない（否定）	$\neg\alpha$
α ならば β	$\alpha \rightarrow \beta$
α と β は同値	$\alpha \leftrightarrow \beta$

上の論理演算子を使って得られる式を論理式という。$\alpha \rightarrow \beta$ が常に成り立つと

[1] $\{x\ ;\ C(x)\}$ と書く場合もある。

き $\alpha \Rightarrow \beta$ と書き、$\alpha \leftrightarrow \beta$ が常に成り立つとき $\alpha \Leftrightarrow \beta$ と書く。$\alpha \Rightarrow \beta$ なら α は β の**十分条件**といい、β は α の**必要条件**という。$\alpha \Leftrightarrow \beta$ のとき α は β の**必要十分条件**であるという。

以下では A, B, C, D を集合とする。x が A の構成要素のとき、x は A の**元**（または**要素**）であるといい

$$x \in A$$

と書く。x は A の**元でない**ことを表す $x \notin A$ を

$$x \notin A \overset{def}{\iff} \neg(x \in A)$$

と定める。$\mathbf{Z}$ を整数全体の集合 $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ とし、$\mathbf{N}$ を自然数全体の集合 $\{0, 1, 2, \ldots\}$ とすると、たとえば $3 \in \mathbf{N}$, $-3 \notin \mathbf{N}$, $-3 \in \mathbf{Z}$ である。

次に A と B の**和集合** $A \cup B$、**共通部分** $A \cap B$ を定義する。

$$x \in A \cup B \overset{def}{\iff} x \in A \vee x \in B$$
$$x \in A \cap B \overset{def}{\iff} x \in A \wedge x \in B$$

A が B の**部分集合**である（$A \subset B$ と書く[2]）とは

$$A \subset B \overset{def}{\iff} (\forall x)(x \in A \to x \in B)$$

とする。したがって $A \subset B$ を証明するには、任意の元 $x \in A$ に対し $x \in B$ であることを示せばよい。

例題1.1 $A \cap B \subset A$ を証明せよ。

（証明） x を $A \cap B$ の任意の元とする。$x \in A \cap B$ より $x \in A$ かつ $x \in B$ である。すなわち $x \in A$ となる。よって $A \cap B \subset A$ が示された。（証明終）

次に集合が等しいことを定める。

$$A = B \overset{def}{\iff} A \subset B \ \wedge \ B \subset A$$

$A = B$ を証明するには、$A \subset B$ と $B \subset A$ を示せばよい。

[2] 記号 $\subset$ のかわりに記号 $\subseteq$ を使用している文献もある。

例題1.2 $A \cap A = A$ を証明せよ。
（証明） $x \in A \cap A$ とする。すなわち $x \in A$ かつ $x \in A$。$x \in A$ は明らか。よって $A \cap A \subset A$ である。
$x \in A$ とする。$x \in A$ かつ $x \in A$ が成立するので $x \in A \cap A$ である。ゆえに $A \subset A \cap A$ である。（証明終）

例題1.3 $A \cap (A \cup B) = A$ を証明せよ。
（証明） $x \in A \cap (A \cup B)$ とする。すなわち $x \in A$ かつ $x \in A \cup B$。よって $x \in A$ となり $A \cap (A \cup B) \subset A$ である。
$x \in A$ とする。$x \in A \cup B$ でもあるので $x \in A$ かつ $x \in A \cup B$ が成立し $x \in A \cap (A \cup B)$ である。（証明終）

問1.1 $A \cup (A \cap B) = A$ を証明せよ。

例題1.4 $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$ を証明せよ。
（証明） $(\Rightarrow)$ $A \subset B$ とする。$x \in A$ なら $x \in B$ なので、$x \in A \cap B$ となり $A \subset A \cap B$ となる。また $A \cap B \subset A$ は明らかなので $A \cap B = A$ である。
$(\Leftarrow)$ $A \cap B = A$ とする。$x \in A$ なら $x \in A$ かつ $x \in B$ なので、$x \in B$ は明らか。よって $A \subset B$ が成り立つ。（証明終）

問1.2 次を証明せよ。
(1) $(A \subset B) \wedge (C \subset D) \Rightarrow (A \cup C) \subset (B \cup D)$
(2) $(A \subset B) \wedge (C \subset D) \Rightarrow (A \cap C) \subset (B \cap D)$

A が有限集合のとき A の元の個数を $|A|$ で表す。

問1.3 有限集合 A, B に対し $A \subset B$ なら $|A| \leq |B|$ を示せ。

2 論理

真（1 で表す）または**偽**（0 で表す）を**真理値**という。真理値を取る変数を**命題変数**という。**命題論理式**を次で定める。
(1) 真理値と命題変数は命題論理式、
(2) α, β が命題論理式なら、$\alpha \vee \beta$, $\alpha \wedge \beta$, $\neg\alpha$, $\alpha \to \beta$, $\alpha \leftrightarrow \beta$ も命題論理式。

α, β を命題論理式とする。演算子 $\vee, \wedge, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$ の意味を次表で定める。（このような表を**真理値表**という。）

α	β	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \wedge \beta$	$\neg\alpha$	$\alpha \rightarrow \beta$	$\alpha \leftrightarrow \beta$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	1	1

命題論理式 α, β, γ に対して次が成立する。

$$\alpha \wedge 1 = \alpha, \qquad \alpha \vee 0 = \alpha,$$
$$\alpha \wedge 0 = 0, \qquad \alpha \vee 1 = 1,$$
$$\alpha \wedge \neg\alpha = 0, \qquad \alpha \vee \neg\alpha = 1, \qquad \text{（排中則）}$$
$$\alpha \wedge \alpha = \alpha, \qquad \alpha \vee \alpha = \alpha, \qquad \text{（巾等則）}$$
$$\alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha, \qquad \alpha \vee \beta = \beta \vee \alpha \qquad \text{（交換則）}$$
$$\left.\begin{array}{l} \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \\ \alpha \vee (\beta \vee \gamma) = (\alpha \vee \beta) \vee \gamma \end{array}\right\} \qquad \text{（結合則）}$$
$$\left.\begin{array}{l} \alpha \wedge (\beta \vee \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma) \\ \alpha \vee (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma) \end{array}\right\} \qquad \text{（分配則）}$$
$$\left.\begin{array}{l} \neg(\alpha \wedge \beta) = \neg\alpha \vee \neg\beta \\ \neg(\alpha \vee \beta) = \neg\alpha \wedge \neg\beta \end{array}\right\} \qquad \text{（ドモルガン則）}$$
$$\neg\neg\alpha = \alpha \qquad \text{（2 重否定）}$$
$$\left.\begin{array}{l} \alpha \vee (\alpha \wedge \beta) = \alpha \\ \alpha \wedge (\alpha \vee \beta) = \alpha \\ \alpha \vee (\neg\alpha \wedge \beta) = \alpha \vee \beta \\ \alpha \wedge (\neg\alpha \vee \beta) = \alpha \wedge \beta \end{array}\right\} \qquad \text{（吸収則）}$$

問2.1 上が成り立つことを真理値表により確かめよ。

問2.2 真理値表により $(\alpha \rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$ を確かめよ。

問2.3 次を示せ。

(1) $\alpha \rightarrow \beta \ = \ \neg\alpha \vee \beta$

(2) $\alpha \leftrightarrow \beta \ = \ (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$

問2.4 集合 A, B, C に対し次を示せ。

(1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

集合 $A - B$ を

$$x \in A - B \overset{def}{\Longleftrightarrow} x \in A \ \wedge \ x \notin B$$

と定める。

問2.5 次を証明せよ。

(1) $A - B \subset A$
(2) $A \cup (B - A) = A \cup B$
(3) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
(4) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

ある命題を証明するとき、その命題の否定を仮定し矛盾を導く、という証明方法を**背理法**という。たとえば $\alpha \Rightarrow \beta$ を証明するためには $\alpha \wedge \neg\beta$ を仮定し矛盾を導くことができればよい。$\neg\alpha \vee \beta$ すなわち $\alpha \to \beta$ が成り立つからである。

元を含まない集合を**空集合**といい、記号 ϕ で表す。任意の x に対し $x \notin \phi$ であることに注意する。集合 A が空集合であることを証明するには、背理法を用いて、元 $x \in A$ が存在するとして矛盾を導く。

例題2.1 集合 A に対し $\phi \subset A$ を示せ。

（証明） 命題「任意の x に対し $x \in \phi$ なら $x \in A$」を考える。$x \in \phi$ は正しくないのでこの命題は成立する。この命題は $\phi \subset A$ のことなので $\phi \subset A$ であることが示された。（証明終）

問2.6 ϕ と ϕ' をともに空集合とする。$\phi = \phi'$ を示せ。

例題2.2 $A \cap (B - A) = \phi$ を証明せよ。

（証明） $A \cap (B - A) \neq \phi$ と仮定し $x \in A \cap (B - A)$ とする。すると $x \in A$ かつ $x \in (B - A)$ である。$x \in (B - A)$ は $x \in B$ かつ $x \notin A$ を意味し、矛盾となる。よって $A \cap (B - A) = \phi$ が示された。（証明終）

問2.7 $A - B = \phi \ \Leftrightarrow \ A \subset B$ を証明せよ。

問2.8 次を証明せよ。

(1) $A \cup \phi = A$
(2) $A \cap \phi = \phi$

問2.9 $A \neq \phi$ とし、$A \cup B = A \cup C$ とする。これから $B = C$ といえるか。また $A \cap B = A \cap C$ のとき $B = C$ といえるか。

扱う対象全体の集合を**普遍集合**という。普遍集合がわかっているとき、集合 A に対して集合 A^c を

$$x \in A^c \overset{def}{\Longleftrightarrow} x \notin A$$

と定義する。A^c を A の**補集合**という。$(A^c)^c = A$ であることに注意する。

問2.10 次を示せ。

(1) $A \cap A^c = \phi$
(2) $A \cup (A^c \cap B) = A \cup B$
(3) $A \cap (A^c \cup B) = A \cap B$

問2.11 次の等式は集合に関する**ドモルガン則**である。これらが成り立つことを示せ。

(1) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
(2) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

例題2.3 $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$ を証明せよ。

（証明） $(\Rightarrow)$ $x \in B^c$ と仮定する。すなわち $x \notin B$ である。いま $x \in A$ なら $A \subset B$ より $x \in B$ がいえ $x \notin B$ と矛盾するので $x \notin A$ である。$x \in A^c$ となるので $B^c \subset A^c$ が示された。

$(\Leftarrow)$ 集合 A', B' に対し $(\Rightarrow)$ より $A' \subset B' \Rightarrow B'^c \subset A'^c$ である。$A' = B^c$, $B' = A^c$ とおけば $B^c \subset A^c \Rightarrow A \subset B$ が得られる。（証明終）

問2.12 $A \subset B \Rightarrow (C - B) \subset (C - A)$ を示せ。

2^A を A の部分集合全体からなる集合とする。すなわち $2^A = \{B \mid B \subset A\}$ である。2^A を A の**ベキ集合**という。また $A \subset B$ かつ $A \neq B$ のとき A は B の**真部分集合**であるといい、$A \subsetneq B$ で表す。

問2.13 次を示せ。

(1) $A \subset B \Leftrightarrow 2^A \subset 2^B$
(2) $A \subsetneq B \Leftrightarrow 2^A \subsetneq 2^B$

記号 $\forall$ を**全称記号**、$\exists$ を**存在記号**という。全称記号と存在記号をまとめて**限定記号**という。

「$x > 0$」、「$x \neq 1$」、「$x^2 = 2$」はいずれも x に関する性質を述べている。このような性質を**述語**と呼ぶ。x に関する述語を $P(x), Q(x), \ldots$ などと書くことにする。述語、限定記号 $(\forall, \exists)$、かっこ、論理演算子 $(\vee, \wedge, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow)$ を次の規則により組合せる。

$$P(x) \vee Q(x),\ P(x) \wedge Q(x),\ \neg P(x),\ P(x) \rightarrow Q(x),$$
$$P(x) \leftrightarrow Q(x),\ (\forall x)P(x),\ (\exists x)P(x)$$

これらはまた述語である。述語のことを **述語論理式**（単に**論理式**と呼ぶことにする）という。

次はいずれも論理式である。

$$(\forall x)(\exists y)(P(x) \rightarrow Q(y))$$
$$(\exists x)((P(x) \wedge (\forall y)Q(x, y)) \vee R(x))$$

$(\forall x)P(x)$ は「任意の x に対し $P(x)$ である」と読み、$(\exists x)P(x)$ は「ある x が存在し $P(x)$ である」と読む。また

$$\neg(\forall x)P(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg P(x)$$
$$\neg(\exists x)P(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg P(x)$$

が成立する。

例題2.4 普遍集合を $\mathbb{N}$ とする。「任意の x, y に対し、ある z が存在して $x+y=z$ が成り立つ」を表す論理式を書け。

（解答） $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(x+y=z)$

問2.14 普遍集合を $\mathbb{N}$ とする。次の命題を表す論理式を書け。

(1) 任意の x に対し $x \geq 0$ である。
(2) 任意の x に対し $x + 0 = x$ である。
(3) 任意の x, y に対し $xy = y$ である。
(4) ある x が存在して 任意の y に対し $xy = y$ である。

問2.15 普遍集合を $\mathbb{Z}$ とする。次のうち正しいものはどれか。

(1) $(\forall x)(\exists y)(x+y=0)$
(2) $(\exists y)(\forall x)(x+y=0)$
(3) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(x+y=z)$
(4) $(\forall x)(\exists z)(\forall y)(x+y=z)$
(5) $(\exists x)(6x=0)$
(6) $(\forall y)(\exists x)(x+y<0)$

問2.16 普遍集合を $\mathbf{Z}$ とし、$N(x)$ を「x は非負整数」、$E(x)$ を「x は偶数」、$O(x)$ を「x は奇数」、$P(x)$ を「x は素数」とする。次の命題を言い表す論理式を書け。

(1) 任意の整数は偶数または奇数である。
(2) 任意の素数は負でない。
(3) 偶数の素数が存在する。
(4) 任意の素数は奇数である、は正しくない。

問2.17 普遍集合を $\mathbf{Z}$、$P(x,y,z)$ を「$x-y=z$」とする。次の論理式を P を使って書け。

(1) 任意の x,y に対し $x-y=z$ の z が存在する。
(2) 任意の x,y に対し $x-z=y$ の z が存在する。
(3) ある x が存在し、任意の y に対し $y-x=y$ である。
(4) 任意の整数から 0 を引いても結果はもとの整数である。
(5) 5 から 3 を引くと 2 である。

問2.18 $P(x,y,z)$ を「$xy=z$」、$E(x,y)$ を「$x=y$」、$G(x,y)$ を「$x>y$」とし、普遍集合を $\mathbf{Z}$ とする。次の論理式は何か。

(1) $y=1$ なら任意の x に対して $xy=x$ である。
(2) $xy\neq 0$ なら $x\neq 0$ かつ $y\neq 0$ である。
(3) $xy=0$ なら $x=0$ または $y=0$ である。
(4) $3x=6$ の必要十分条件は $x=2$ である。
(5) $y\geq 0$ は $x^2=y$ の解が存在するための十分条件である。
(6) $x<z$ は $x<y$ かつ $y<z$ の必要条件である。
(7) $x\leq y$ かつ $y\leq x$ は $x=y$ の必要十分条件である。
(8) $x<y$ かつ $z<0$ なら $xz>yz$ である。
(9) $x=y$ かつ $x<y$ は正しくない。
(10) $x<y$ ならある z が存在して $z<0$ かつ $xy>xz$ である。
(11) ある x が存在して任意の y,z に対し $xy=xz$ である。

問2.19 普遍集合を **Z** とし、$P(x,y,z)$ を「$xy=z$」、$E(x,y)$ を「$x=y$」とする。次の命題に対する論理式をそれぞれ P,E を使用して書け。

(1) $x=0$ なら任意の y に対して $xy=x$ である。
(2) 任意の y に対して $xy=x$ なら $x=0$ である。
(3) ある y が存在して $xy\neq x$ なら $x\neq 0$ である。

例題2.5 $P(x)$ が成立する x は唯一つだけ存在する（$\exists! xP(x)$ と書くこともある）ことを意味する論理式を書け。

（解答） $(\exists x)(P(x)\wedge(\forall y)(P(y)\to x=y))$

例題2.6 「x が c に近ずくときの $f(x)$ の極限は k である」とは、任意の $\varepsilon>0$ に対して、ある $\delta>0$ が存在し、任意の x に対して、$|x-c|<\delta$ なら $|f(x)-k|<\varepsilon$ となることと定義する。このことを論理式で表現せよ。

（解答）

$$\lim_{x\to c} f(x)=k \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x)(|x-c|<\delta\to|f(x)-k|<\varepsilon)$$

問2.20 上の命題の否定すなわち $\lim_{x\to c} f(x)\neq k$ の論理式は何か。

3 対応と関数

集合 A と B の**直積** $A\times B$ を

$$A\times B \overset{def}{=} \{\langle a,b\rangle \mid a\in A,\ b\in B\}$$

とする。同様に

$$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n \overset{def}{=} \{\langle a_1,a_2,\ldots,a_n\rangle \mid a_i\in A_i\}$$

とする。

例題3.1 集合 A,B,C に対して $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$ を証明せよ。

（証明）$(A\cup B)\times C\subset(A\times C)\cup(B\times C)$ を示す。$\langle a,c\rangle\in(A\cup B)\times C$ とする。$a\in A\cup B,\ c\in C$ である。$a\in A$ または $a\in B$ が成立する。$a\in A$ なら

$\langle a,c\rangle \in A\times C$ となり、また $a \in B$ なら $\langle a,c\rangle \in B\times C$ となるので、いずれにしても $\langle a,c\rangle \in (A\times C)\cup(B\times C)$ となる。よって $(A\cup B)\times C \subset (A\times C)\cup(B\times C)$ が成立する。

次に $(A\times C)\cup(B\times C) \subset (A\cup B)\times C$ を示す。$\langle a,c\rangle \in (A\times C)\cup(B\times C)$ とする。$\langle a,c\rangle \in (A\times C)$ または $\langle a,c\rangle \in (B\times C)$ である。$\langle a,c\rangle \in (A\times C)$ のときを考えよう。すると $a \in A,\ c \in C$ となる。$a \in A\cup B$ なので $\langle a,c\rangle \in (A\cup B)\times C$ である。同様にして $\langle a,c\rangle \in (B\times C)$ のときも $\langle a,c\rangle \in (A\cup B)\times C$ が成り立つ。よって $(A\times C)\cup(B\times C) \subset (A\cup B)\times C$ が成立する。

以上から $(A\cup B)\times C = (A\times C)\cup(B\times C)$ が証明された。（証明終）

問3.1 集合 A, B, C に対し $(A\cap B)\times C = (A\times C)\cap(B\times C)$ を証明せよ。

例題3.2 集合 A, B, C, D に対し $(A\times B)\cap(C\times D) = (A\times B)\cap(C\times D)\cap(A\times D)$ を証明せよ。

（証明）$(A\times B)\cap(C\times D)\cap(A\times D) \subset (A\times B)\cap(C\times D)$ は明らかなので $(A\times B)\cap(C\times D) \subset (A\times B)\cap(C\times D)\cap(A\times D)$ を示せば十分である。

$\langle a,b\rangle \in (A\times B)\cap(C\times D)$ とする。$a \in A,\ b \in B,\ a \in C,\ b \in D$ が成立する。$a \in A,\ b \in D$ なので $\langle a,b\rangle \in (A\times D)$ も成り立つ。よって $\langle a,b\rangle \in (A\times B)\cap(C\times D)\cap(A\times D)$ であり $(A\times B)\cap(C\times D) \subset (A\times B)\cap(C\times D)\cap(A\times D)$ が示された。（証明終）

問3.2 集合 A, B, C, D に対し次を証明せよ。

(1) $(A\times B) \subset (C\times D) \ \Leftrightarrow\ (A\subset C)\wedge(B\subset D)$

(2) $(A\times B) = (C\times D) \ \Leftrightarrow\ (A = C)\wedge(B = D)$

(3) $(A\times C)\cup(B\times D) \ \subset\ (A\cup B)\times(C\cup D)$

(4) $(A\cap B)\times(C\cap D) \ =\ (A\times C)\cap(B\times D)$

集合 A から集合 B への**対応**とは $A\times B$ の部分集合のことである。A から B への対応 R を $R : A \to B$ と書く。$R : A \to B$ が対応のとき、次の対応 $R^{-1} : B \to A$

$$R^{-1} \stackrel{def}{=} \{\langle b,a\rangle \mid \langle a,b\rangle \in R\}$$

を**逆対応**という。対応 $R : A \to B,\ S : B \to C$ に対し、次の対応 $S\circ R : A \to C$

$$S\circ R \stackrel{def}{=} \{\langle a,c\rangle \mid (\exists b \in B)(\langle a,b\rangle \in R \wedge \langle b,c\rangle \in S)\}$$

を R と S の**合成対応**という。$S \circ R$ は R, S の順に適用する対応であり、書く順と適用する順が逆であることに注意する[3]。$S \circ R$ を単に SR と書く場合もある。

例題3.3 $R : A \to B,\ S : B \to C,\ T : C \to D$ を対応とする。$(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$ が成立することを証明せよ。

（証明）

$$\begin{aligned}\langle a, d\rangle \in (T \circ S) \circ R &\Leftrightarrow (\exists b \in B)(\langle a, b\rangle \in R \wedge \langle b, d\rangle \in (T \circ S))\\ &\Leftrightarrow (\exists b \in B)(\exists c \in C)(\langle a, b\rangle \in R \wedge \langle b, c\rangle \in S \wedge \langle c, d\rangle \in T)\\ &\Leftrightarrow (\exists c \in C)(\langle a, c\rangle \in (S \circ R) \wedge \langle c, d\rangle \in T)\\ &\Leftrightarrow \langle a, d\rangle \in T \circ (S \circ R)\end{aligned}$$

（証明終）

問3.3 A, B, C, D を集合とし、R を A から B への対応、S_1, S_2 を B から C への対応、T を C から D への対応とするとき、次が成立することを証明せよ。

(1) $(S_1 \cup S_2) \circ R = (S_1 \circ R) \cup (S_2 \circ R)$

(2) $(S_1 \cap S_2) \circ R = (S_1 \circ R) \cap (S_2 \circ R)$

(3) $T \circ (S_1 \cup S_2) = (T \circ S_1) \cup (T \circ S_2)$

(4) $T \circ (S_1 \cap S_2) = (T \circ S_1) \cap (T \circ S_2)$

$R : A \to B$ が対応のとき、任意の $a \in A$ に対し

$$R(a) \stackrel{def}{=} \{b \mid \langle a, b\rangle \in R\}$$

とする。また $A' \subset A$ に対し $R(A')$ を次で定める。

$$R(A') \stackrel{def}{=} \{b \mid (\exists a \in A')\langle a, b\rangle \in R\}$$

いま任意の $a \in A$ に対し $|R(a)| \leq 1$ のとき、R を A から B への**部分関数**といい、$|R(a)| = 1$ のとき R を A から B への**関数**という。関数 $f : A \to B$, $g : B \to C$ に対し $g \circ f : A \to C$ は合成関数であり $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ であることに注意する。

例題3.4 $R : A \to B,\ S : A \to B$ を対応とする。次を証明せよ。

$$R = S \Leftrightarrow (\forall a \in A)(R(a) = S(a))$$

[3] 合成対応 $S \circ R$ のことを $R \circ S$ と書く文献もある。

（証明） (⇒) 明らか。
($\Leftarrow$) $\langle a, b\rangle \in R$, $b \in R(a)$ とする。仮定より $b \in S(a)$ すなわち $\langle a, b\rangle \in S$ であり $R \subset S$ となる。同様に $S \subset R$ が得られる。よって $R = S$ である。（証明終）

関数 $f : A \to B$ が**単射**とは

$$(\forall x, y \in A)(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$$

のときをいい、関数 $f : A \to B$ が**全射**とは

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y)$$

のときをいう。関数 f が**全単射**とは f が全射かつ単射のときをいう。

問3.4 次の関数 f は単射、全射のどの性質が成り立つか。f が全単射なら f^{-1} を求めよ。

(1) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = x$
(2) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+,\ f(x) = 2^x$
(3) $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N},\ f(x) = 2x + 1$
(4) $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{N},\ f(x) = |x|$

例題3.5 関数 f, g がともに単射なら $g \circ f$ も単射であることを示せ。
（証明） $f : A \to B$, $g : B \to C$ とする。x, y を任意の A の元とし $(g\circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ とする。$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(y)) = (g \circ f)(y)$ と g が単射であることから $f(x) = f(y)$ がいえ、$f(x) = f(y)$ と f が単射であることから $x = y$ がいえる。
$(\forall x, y \in A)((g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \Rightarrow x = y)$ が示された。よって $g \circ f$ は単射である。（証明終）

問3.5 関数 f, g に対して $g \circ f$ が単射なら f も単射であることを示せ。

問3.6 関数 f, g がともに全射なら $g \circ f$ も全射であることを示せ。

問3.7 関数 f, g に対して $g \circ f$ が単射かつ f が全射なら g は単射であることを示せ。

問3.8 f, g を関数とする。合成関数 $g \circ f$ が全単射なら g は全射、かつ f は単射であることを示せ。

問3.9 全射 $f : A \to B$ と関数 $g : B \to C$, $h : B \to C$ に対し $g \circ f = h \circ f$ なら $g = h$ を証明せよ。

問3.10 単射 $f : B \to C$ と関数 $g : A \to B$, $h : A \to B$ に対し $f \circ g = f \circ h$ なら $g = h$ を証明せよ。

集合 A に対し、A から A への対応（関数） I_A を次で定義する。

$$I_A \stackrel{def}{=} \{\langle x, x\rangle \mid x \in A\}$$

I_A を集合 A に関する**恒等関数**という。

問3.11 関数 $f : A \to B$ に対し $I_B \circ f = f \circ I_A = f$ であることを示せ。

例題3.6 $f : A \to B$ を全単射とする。f^{-1} は全単射で

$$f^{-1} \circ f = I_A, \quad f \circ f^{-1} = I_B$$

であることを証明せよ。

（証明） f^{-1} の定義から任意の $y \in B$ に対し

$$f^{-1}(y) = \{x \mid f(x) = y\}$$

である。f は単射なので $|f^{-1}(y)| \leq 1$。また f は全射だから $f(x) = y$ となる x が存在する。よって $|f^{-1}(y)| = 1$ であり f^{-1} は関数である。また任意の $x \in A$, $y \in B$ に対し $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$ となる。任意の $x \in A$ に対し $f(x) = y$ の y を取ると $f^{-1}(y) = x$ となるので f^{-1} は全射である。また $f^{-1}(y) = f^{-1}(y')$ とすると $y = f(x) = y'$ となり f^{-1} は単射である。さらに、

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x, \quad (f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y$$

である。ゆえに $f^{-1} \circ f = I_A$, $f \circ f^{-1} = I_B$ が示された。（証明終）

問3.12 $f : A \to B$, $g : B \to A$ が関数で $g \circ f = I_A$ かつ $f \circ g = I_B$ とする。このとき f, g はともに全単射で $f^{-1} = g$, $g^{-1} = f$ であることを示せ。

問3.13 $A \neq \phi$ とし $f : A \to B$ を関数とする。関数 $g : B \to A$ が存在し $g \circ f = I_A$ となるための必要十分条件は f が単射であることを証明せよ。

問3.14 $f : A \to B$ を関数とする。関数 $g : B \to A$ が存在し $f \circ g = I_B$ となるための必要十分条件は f が全射であることを証明せよ。

問3.15 $f : A \to B$ を単射とする。任意の $A' \subset A$ に対し $f^{-1}(f(A')) = A'$, $f(A - A') = f(A) - f(A')$ が成立することを示せ。

問3.16 A, B が有限集合で $f : A \to B$ を関数とする。f が単射なら $|A| \leq |B|$, f が全射なら $|A| \geq |B|$ を証明せよ。

4 集合の表現と対等性

集合 A から集合 B への全単射が存在するとき、A と B は**対等**であるといい、

$$A \sim B$$

と書く。

例題4.1 集合 A, B, C に対し次を示せ。

(1) $A \sim A$
(2) $(A \sim B) \Rightarrow (B \sim A)$
(3) $(A \sim B) \wedge (B \sim C) \Rightarrow (A \sim C)$

（証明） (1) $I_A : A \to A$ は全単射である。(2) $f : A \to B$ が全単射なら $f^{-1} : B \to A$ も全単射である。(3) $f : A \to B$ と $g : B \to C$ が全単射なら $g \circ f : A \to C$ も全単射である。（証明終）

問4.1 集合 A, B, C に対し次を示せ。

(1) $(A \times B) \sim (B \times A)$
(2) $((A \times B) \times C) \sim (A \times (B \times C)) \sim (A \times B \times C)$
(3) $(A \sim B) \wedge (C \sim D) \Rightarrow (A \times C) \sim (B \times D)$

自然数 n に対し $[n]$ を次で定義する。

$$[n] \overset{def}{=} \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

$[2]$ を（整数でなく）真理値 $\{0, 1\}$ の集合とみなすときもある。

例題4.2 A を有限集合、$|A| = n$ とする。$A \sim [n]$ を示せ。

（証明） $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ とする。$f : [n] \to A$ を

$$f(i) = a_i \quad (0 \leq i < n)$$

とすれば、f は全単射である。（証明終）

問4.2 $[n]\times[m] \sim [n\times m]$ を示せ。また有限集合 A, B に対し $|A\times B| = |A|\times|B|$ を示せ。

Ω を普遍集合とする。Ω の各部分集合 A に対し、関数 $\chi_A : \Omega \to [2]$ を次で定義する。

$$\chi_A(x) \overset{def}{=} \begin{cases} 0 & (x \notin A) \\ 1 & (x \in A) \end{cases}$$

$[2] = \{0, 1\}$ は真理値の集合であるから $\chi_A(x)$ は x が A の元かどうかを表している。χ_A を A の**特性関数**という。

問4.3 集合 A, B の特性関数に対し次を示せ。

(1) $\chi_{A-B}(x) = \chi_A(x) \wedge \neg\chi_B(x)$
(2) $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) \vee \chi_B(x)$
(3) $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) \wedge \chi_B(x)$

集合 A に対し、A の元を n 個並べた列

$$\langle a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle$$

全体からなる集合を A^n で表す。$n = 0$ のときこの列を λ で表す。すなわち $A^0 = \{\lambda\}$ である。A^n の元の表し方は次のようにさまざまに書かれる。（統一できない）

$$\begin{array}{ll} \langle a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle & (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \\ a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} & a_0; a_1; \ldots; a_{n-1} \\ a_0a_1\ldots a_{n-1} & \end{array}$$

また A^*, A^+ を次の集合とする。

$$A^* \overset{def}{=} \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n, \quad A^+ \overset{def}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n$$

たとえば $\{a, b\}^3 = \{aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb\}$ であり、$\{a, b\}^* = \{\lambda, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, \ldots\}$ である。

集合 A, B に対し A から B への関数全体の集合を B^A で表す。B^A を A から B への **関数空間**という。

例題4.3 A を有限集合とし $|A| = n$ とする。このとき $2^A \sim 2^{[n]} \sim [2]^n \sim [2^n] \sim [2]^A \sim [2]^{[n]}$ を示せ。

（証明） $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ とする。2^A は A の部分集合全体の集合であり $2^{[n]}$ は $[n] = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ の部分集合全体の集合である。2^A から $2^{[n]}$ への全単射が存在することは明らかであろう。よって $2^A \sim 2^{[n]}$ を得る。また $B \in 2^{[n]}$ なら B は $[n]$ の部分集合であるが B は $\{0, 1\}$ の n ビット列として考えることができる。$[2]^n$ は {0,1} の n ビット列全体の集合である。したがって $2^{[n]}$ から $[2]^n$ に全単射が存在し $2^{[n]} \sim [2]^n$ となる。さらに n ビット列を 2 進数とみなせば $[2]^n \sim [2^n]$ となる。この n ビット列を A から $[2] = \{0, 1\}$ への関数 $f_B : A \to [2]$,

$$f_B(a_i) = \text{（ビット列の } i \text{ 番目のビット）}$$

とみなすこともできる。$[2]^A$ は A から $[2]$ への関数全体の集合なので $[2]^n$ から $[2]^A$ への全単射が存在する。よって $[2]^n \sim [2]^A$ である。$[2]^{[n]}$ は $[n]$ から $[2]$ への関数全体の集合であり、上の $a_i \in A$ を $i \in [n]$ に置き換えて考えれば $[2]^n$ から $[2]^{[n]}$ への全単射が存在し $[2]^n \sim [2]^{[n]}$ がいえる。

たとえば $A = \{a, b, c\}$ の場合は

$$\begin{aligned}
2^{\{a,b,c\}} &= \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\} \\
2^{[3]} &= \{\phi, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{0, 2\}, \{0, 1, 2\}\} \\
[2]^3 &= \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\} \\
[2^3] &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}
\end{aligned}$$

となるので、これらの 4 集合が互いに対等であることは明らかであろう。110 $\in [2]^3$ に対し 110 を $\{a, b, c\}$ から $\{0, 1\}$ への関数 f_{110}, $f_{110}(a) = 1$, $f_{110}(b) = 1$, $f_{110}(c) = 0$ とみなすこともできる。$[2]^{\{a,b,c\}}$ は $\{a, b, c\}$ から $\{0, 1\}$ への関数全体の集合であるから $[2]^3$ から $[2]^{\{a,b,c\}}$ への全単射が存在し $[2]^3 \sim [2]^{\{a,b,c\}}$ である。またこのビット列 110 を $[3] = \{0, 1, 2\}$ から $\{0, 1\}$ への関数 f'_{110}, $f'_{110}(0) = 1$, $f'_{110}(1) = 1$, $f'_{110}(2) = 0$ とみなせば $[2]^3$ から $[2]^{\{0,1,2\}}$ への全単射も存在し $[2]^3 \sim [2]^{\{0,1,2\}}$ となる。

形式的には $B \subset A = \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ に対し $g(B) = \{i \mid a_i \in A\}$ とすれば $g : 2^A \to 2^{[n]}$ は全単射であり $2^A \sim 2^{[n]}$ となる。$h(B) = b_0 b_1 \ldots b_{n-1}$, $b_i \in \{0, 1\}$, $b_i = 0$ $(a_i \notin B)$, $b_i = 1$ $(a_i \in B)$ とすると $h : 2^A \to [2]^n$ は全単射であり $2^A \sim [2]^n$ である。また $k(b_0 b_1 \ldots b_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^{n-i+1}$ とすると $k : [2]^n \to [2^n]$ は全単射である。よって $k : [2]^n \sim [2^n]$ を得る。さらに $u(b_0 b_1 \ldots b_{n-1}) = f_B$,

$f_B : A \to [2]$, $f_B(a_i) = b_i$ とすれば u は $[2]^n$ から $[2]^A$ への全単射である。同様に $v(b_0 b_1 \dots b_{n-1}) = f'_B$, $f'_B : [n] \to [2]$, $f'_B(i) = b_i$ とすれば v は $[2]^n$ から $[2]^{[n]}$ への全単射であり $[2]^n \sim [2]^{[n]}$ が成立する。

以上から

$$2^A \sim 2^{[n]} \sim [2]^n \sim [2^n] \sim [2]^A \sim [2]^{[n]}$$

が示された。（証明終）

問4.4 $A^n \sim A^{[n]}$ を示せ。

例題4.4 集合 A, B に対し $2^{A\times B} \sim [2]^{A\times B} \sim \left(2^B\right)^A \sim \left(2^A\right)^B$ を示せ。

（証明）$2^{A\times B}$ は $A \times B$ の部分集合全体の集合である。$R \in 2^{A\times B}$ なら R は $A \times B$ の部分集合であるが、R は A から、B の部分集合全体の集合への関数と考えることもできる。たとえば A, B が有限集合で $A = \{a, b, c\}$, $B = \{d, e\}$, $R = \{\langle a, d\rangle, \langle a, e\rangle, \langle b, d\rangle, \langle c, e\rangle\} \subset A \times B$ としよう。すると R は $A = \{a, b, c\}$ から $2^{\{d,e\}}$ への関数

$$R(a) = \{d, e\},\ R(b) = \{d\},\ R(c) = \{e\}$$

を表している。

R と、A から 2^B への関数とは 1 対 1 に関連づけることができるので、$2^{A\times B}$ から $\left(2^B\right)^A$ への全単射が存在する。よって $2^{A\times B} \sim \left(2^B\right)^A$ が成り立ち、同様にして $2^{A\times B} \sim \left(2^A\right)^B$ がいえる。また $2^{A\times B} \sim [2]^{A\times B}$ なので、以上から

$$2^{A\times B} \sim [2]^{A\times B} \sim \left(2^B\right)^A \sim \left(2^A\right)^B$$

が示された。（証明終）

問4.5 A, B を集合とし $m, n \geq 0$ とする。次を示せ。

(1) $[n]^{[m]} \sim [n^m]$
(2) $A \sim B$ なら $2^A \sim 2^B$
(3) $A \cap B = \phi$ なら $2^{A\cup B} \sim 2^A \times 2^B$

問4.6 A, B, C を集合とする。次を示せ。

(1) $|B| = n$ なら $A^B \sim A^n \sim A^{[n]}$
(2) $C^{A\times B} \sim \left(C^B\right)^A \sim \left(C^A\right)^B$

問4.7 次を示せ。

(1) $(0,1] \sim [1,\infty)$ ただし $(0,1] = \{x \mid 0 < x \leq 1,\ x \in \mathbf{R}\}$,
$[1,\infty) = \{x \mid x \geq 1,\ x \in \mathbf{R}\}$

(2) $\mathbf{Z} \sim \mathbf{N}$

(3) $\mathbf{N} \times \mathbf{N} \sim \mathbf{N}$

5 順序と同値関係

集合 A に対し $A \times A$ の部分集合を**関係**という。$R \subset A \times A$ とする。$a, b \in A$ に対し

$$\langle a, b\rangle \in R \text{ のとき} \quad aRb \text{ または } R(a,b)$$
$$\langle a, b\rangle \notin R \text{ のとき} \quad \neg(aRb) \text{ または } a \not R\, b$$

と書く。関係に関する性質のうち次のものを考えよう。x, y, z を A の任意の元とする。

xRx	**反射律**
$xRy \Rightarrow yRx$	**対称律**
$xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$	**推移律**
$xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$	**反対称律**

R が反射律を満たすとき、R は反射的である、などという。A 上の関係は A から A への対応である。したがって合成関係や逆関係などが定義される。

問5.1 次の条件 (1), ..., (4) は A 上の関係 R がそれぞれ、反射的、対称的、推移的、反対称的であるための必要十分条件であることを示せ。

(1) $I_A \subset R$

(2) $R \subset R^{-1}$

(3) $R \circ R \subset R$

(4) $R \cap R^{-1} \subset I_A$

問5.2 集合 A 上の関係 R, S に対し次を示せ。

(1) $x(R \cup S)y \Leftrightarrow xRy \vee xSy$

(2) $x(R \cap S)y \Leftrightarrow xRy \wedge xSy$

(3) $xR^c y \Leftrightarrow \neg(xRy)$

問5.3 集合 A 上の関係 R, S に対し次を示せ。

(1) $R \subset S \Leftrightarrow R^{-1} \subset S^{-1}$
(2) $(R \cap S)^{-1} \Leftrightarrow R^{-1} \cap S^{-1}$
(3) $(R \cup S)^{-1} \Leftrightarrow R^{-1} \cup S^{-1}$

問5.4 R, S を集合 A 上の関係とする。次のうち正しいものは証明し、正しくないものは反例を示せ。

(1) R, S がともに反射的なら $S \circ R$ も反射的である。
(2) R, S がともに反射的でないなら $S \circ R$ も反射的でない。
(3) R, S がともに対称的なら $S \circ R$ も対称的である。
(4) R, S がともに反対称的なら $S \circ R$ も反対称的である。
(5) R, S がともに推移的なら $S \circ R$ も推移的である。

反射律、推移律、反対称律を満たす関係を**順序**という。R が A 上の順序のとき、対 $\langle A, R\rangle$ を**順序集合**という。また R が明らかなとき A のことを順序集合ということもある。一般的に順序を表すのに、記号 $\preceq$ を用いることにする。

A 上の順序を $\preceq$ とする。A の任意の元 x, y に対し $x \preceq y$ または $y \preceq x$ が成立するとき $\preceq$ を**全順序**または**線形順序**という。また関係 $\prec$ を

$$x \prec y \overset{def}{\iff} (x \preceq y) \wedge (x \neq y)$$

と定める。$x \preceq y$ のとき x は y **以下である**といい $x \prec y$ のとき x は y より**小さい**という。

たとえば $\mathbb{N}$ 上の関係 $|$ を

$$n|m \overset{def}{\iff} (\exists k)m = kn$$

とすれば $n|m$ は「n は m の約数」を意味し、関係 $|$ は順序である。

問5.5 ある集合上の関係 R について次を証明せよ。

(1) R が順序なら R^{-1} も順序である。
(2) R が全順序なら R^{-1} も全順序である。

問5.6 R を集合 A 上の関係とし $A' \subset A$ とする。A' 上の関係 R' を

$$R' = R \cap (A' \times A')$$

とする。R が A で順序なら R' も A' で順序であることを証明せよ。

問5.7 T_1, T_2, T_3 をユークリッド平面 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 上の次の関係とする。

$\langle x_1, y_1 \rangle T_1 \langle x_2, y_2 \rangle$ の必要十分条件は $x_1 \le x_2$ または $y_1 \le y_2$

$\langle x_1, y_1 \rangle T_2 \langle x_2, y_2 \rangle$ の必要十分条件は $x_1 \le x_2$ かつ $y_1 \le y_2$

$\langle x_1, y_1 \rangle T_3 \langle x_2, y_2 \rangle$ の必要十分条件は

$x_1 = y_1,\ x_2 = y_2,\ x_1 \le x_2$ をすべて満たす

このとき T_1, T_2, T_3 のそれぞれに対し (1) 順序でない、(2) 順序だが全順序でない、(3) 全順序である、のうちどれが成り立つか。

A を順序集合とし $a \in A$ とする。次の A の部分集合を

$$
\begin{aligned}
(a, \infty) &\stackrel{def}{=} \{x \mid a \prec x\} \\
(\infty, a) &\stackrel{def}{=} \{x \mid x \prec a\} \\
[a, \infty) &\stackrel{def}{=} \{x \mid a \preceq x\} \\
(\infty, a] &\stackrel{def}{=} \{x \mid x \preceq a\}
\end{aligned}
$$

と定める。また $a, b \in A,\ a \prec b$ とすると

$$
\begin{aligned}
(a, b) &\stackrel{def}{=} (a, \infty) \cap (\infty, b) \quad \text{開区間} \\
(a, b] &\stackrel{def}{=} (a, \infty) \cap (\infty, b] \\
[a, b) &\stackrel{def}{=} [a, \infty) \cap (\infty, b) \\
[a, b] &\stackrel{def}{=} [a, \infty) \cap (\infty, b] \quad \text{閉区間}
\end{aligned}
$$

とする。$a \prec b$ かつ $(a, b) = \phi$ のとき a は b の**直前の元**といい b は a の**直後の元**という。

順序は**ハッセ図**により図示される。ハッセ図は順序が成り立つすべての対に対し関係を直接書きあらわすのではなく a が b の直前の元のとき a から b に向かう矢印を書き $a \prec b$ であることを表示する。また $a \prec b$ なら a を b の下の位置にかき、矢印のかわりに a と b を結ぶ辺をかく場合もある。

たとえば集合 $\{1, 2, \ldots, 12\}$ において、順序 $|$ （要素間の約数関係）を表すハッセ図は図 5.1 のようになる。

M を A の部分集合とする。$M \subset (\infty, a]$ なら a は M の**上界**といい $M \subset [a, \infty)$ なら a は M の **下界**（かかい） という。M に上界が存在するなら M は**上に有界**であるといい、M に下界が存在するなら M は**下に有界**であるという。

a が M の**最大元** (the greatest element) とは $a \in M$ かつ a が M の上界のときをいう。このとき $a = \max M$ と書く。a が M の**最小元** (the least element)

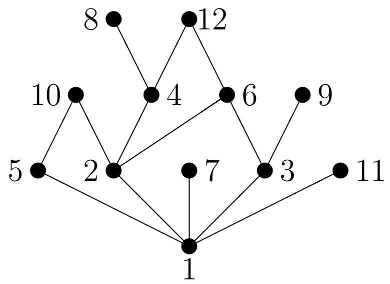


図 5.1　順序集合 $\langle\ \{1,2,\ldots,12\},|\ \rangle$

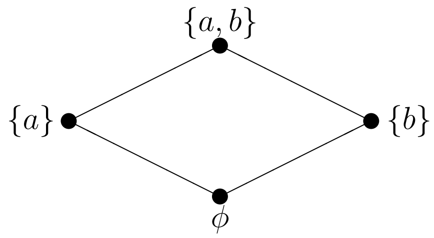


図 5.2　順序集合 $\langle 2^{\{a,b\}},\subset\rangle$

とは $a\in M$ かつ a が M の下界のときをいい $a=\min M$ と書く。a が M の**極大元** (a maximal element) とは $a\in M$ かつすべての $x\in M$ に対し $\neg(a\prec x)$ であるときをいう。a が M の**極小元** (a minimal element) とは $a\in M$ かつすべての $x\in M$ に対し $\neg(x\prec a)$ であるときをいう。a が M の**上限** (supremum) または**最小上界** (the least upper bound) とは $a=\min\{x\in A\mid x$ は M の上界$\}$ のときをいう。このとき $a=\sup M$ と書く。a が M の**下限** (infimum) または**最大下界** (the greatest lower bound) とは $a=\max\{x\in A\mid x$ は M の下界$\}$ のときをいい $a=\inf M$ と書く。

順序集合 $\langle\ \{1,2,\ldots,12\},|\ \rangle$ を再び考えよう。図 5.1 を参照せよ。$\{1,2,\ldots,12\}$ の極大元は 7,8,9,10,11,12 であり、極小元は 1 である。$\{1,2,\ldots,12\}$ の上界と最大元は存在せず、下界と最小元は 1 である。$\{4,6\}$ の上界は 12、下界は 1,2 であり、最大元と最小元は存在しない。$\{4,6\}$ の最小上界は 12、最大下界は 2 であり、これらはそれぞれ 4,6 の最小公倍数、最大公約数に対応することに注意する。

次に順序集合 $\langle 2^{\{a,b\}},\subset\rangle$ を考えよう。図 5.2 を参照せよ。

$B = \{\{a\}\}$ なら $\{a\}$ は B の最大元、最小元、極大元、極小元である。B の上界は $\{a\}$ と $\{a, b\}$ であり $\{a\}$ は最小上界である。B の下界は ϕ と $\{a\}$ であり $\{a\}$ は最大下界である。

$B = \{\{a\}, \{b\}\}$ なら B の最大元、最小元は存在しない。B の上界は $\{a, b\}$、下界は ϕ である。

$B = \{\{a\}, \phi\}$ なら $\{a\}$ は B の最大元であり ϕ は B の最小元である。

問5.8 $\langle A, \preceq \rangle$ を順序集合とし $a \in A,\ M \subset A$ とする。次を示せ。

(1) a は M の上界 $\Leftrightarrow (\forall x \in M)(x \preceq a)$

(2) a は M の最大元 $\Leftrightarrow (a \in M) \wedge (\forall x \in M)(x \preceq a)$

(3) a は M の極大元 $\Leftrightarrow (a \in M) \wedge (M \cap (a, \infty) = \phi)$

$\Leftrightarrow (\forall x \in M)(a \preceq x \Rightarrow a = x)$

問5.9 A を順序集合とし $M \subset A$ とする。次を示せ。

(1) a が M の最大元なら a は M の極大元である。

(2) a と b が M の最大元なら $a = b$ である。

問5.10 A を全順序集合とし $M \subset A$ とする。a が M の極大元なら a は M の最大元、すなわち全順序集合では、極大元と最大元の概念が一致することを示せ。

R を集合 A 上の関係とし x を A の任意の元とする。次の性質を定義する。

$\neg(xRx)$ **非反射律**

R が推移律と非反射律を満たすとき R を**厳密半順序**という。

$\preceq$ を順序とする。$x \prec y \Leftrightarrow (x \preceq y) \wedge (x \neq y)$ で定義される関係 $\prec$ は推移律と非反射律を満たすので厳密半順序である。

例題5.1 R を集合 A 上の厳密半順序とする。このとき関係 $\preceq$ を $x \preceq y \Leftrightarrow (xRy) \vee (x = y)$ で定める。関係 $\preceq$ は順序であることを証明せよ。

（証明） $\preceq$ が反射律と推移律を満たすことは明らかである。反対称律を満たすことを示す。$(x \preceq y) \wedge (y \preceq x)$ と仮定する。$x \neq y$ とすると $xRy \wedge yRx$ であり R は推移律を満たすから xRx となる。これは R が非反射律を満たすことに矛盾する。したがって $x = y$ となり $\preceq$ は反対称律を満たす。（証明終）

問5.11 次はいずれも厳密半順序であることを示せ。

(1) $\mathbf{R}$ 上の関係 $<$

(2) 集合上の関係 $\subsetneq$

反射律、対称律、推移律を満たす関係を**同値関係**という。R が集合 A 上の同値関係のとき、$a \in A$ に対し $R(a) = \{b \mid aRb\}$ を R に関する a の**同値類**という。同値類 $R(a)$ の代わりに $[a]_R$ と書くことがよくある。同値類全体からなる集合を A/R と書き A の R による**商集合**という。

例題5.2 $\mathbf{Z}$ 上の関係 R を

$$R = \{\langle a, b\rangle \mid a, b \in \mathbf{Z} \text{ かつ } a - b \text{ は } 2 \text{ で割り切れる }\}$$

とする。R が同値関係であることを示せ。また商集合 $\mathbf{Z}/R$ はどのような集合か。

（解答） a, b, c を任意の整数とする。$a-a$ は 2 で割り切れるので aRa であり R は反射的である。次に $a-b$ が 2 で割り切れるなら $b-a$ も 2 で割り切れるので、aRb なら bRa が成立し R は対称的である。最後に $a-b$, $b-c$ がともに 2 で割り切れるなら、ある整数 k_1, k_2 が存在して $a-b = 2k_1$, $b-c = 2k_2$ である。$a-c = 2(k_1+k_2)$ となるので $a-c$ も 2 で割り切れる。よって aRb かつ bRc なら aRc が成立し R は推移的である。以上より R は同値関係である。また 0 が属する R の同値類は偶数全体の集合であり $[0]_R = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$, 1 が属する同値類は奇数全体の集合で $[1]_R = \{\ldots, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$ となる。$\mathbf{Z} = [0]_R \cup [1]_R$ なので $\mathbf{Z}/R = \{[0]_R, [1]_R\}$ である。

問5.12 上の例題を一般化した問題を考える。k を正整数、$a, b \in \mathbf{Z}$ とする。ある整数 n が存在して $(a-b) = nk$ となるとき

$$a \equiv b \pmod{k}$$

と書き、a と b は k を法として合同である、という。すべての集合 $A \subset \mathbf{Z}$ に対し A 上の関係「k を法として合同」は同値関係であることを証明せよ。

例題5.3 整数の集合 $\mathbf{Z}$ から**有理数**を定義しよう。集合 Q を次で定義する。

$$Q = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathbf{Z}, y \neq 0\}$$

Q 上の関係 $\approx$ を次で定める。

$$\langle x, y\rangle \approx \langle u, v\rangle \overset{def}{\Longleftrightarrow} xv = yu$$

$\approx$ は同値関係であり Q の $\approx$ による商集合 $Q/\approx$ が有理数（有理数全体からなる集合）である。$Q/\approx$ の元 $[\langle x,y\rangle]_\approx$ を $\frac{x}{y}$ と書く。たとえば有理数 $\frac{2}{3}$ は $\langle 2,3\rangle$ の属す同値類

$$[\langle 2,3\rangle]_\approx = \{\ \ldots, \tfrac{-4}{-6}, \tfrac{-2}{-3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{4}{6}, \cdots\ \}$$

のことである。

問5.13 整数全体の集合上の関係を考える。次の表の各行を満たす対 $\langle a,b\rangle$ 全体からなる集合（関係）は反射律、対称律、推移律のうちどの性質が成り立つか。成り立つ性質に◯印を対応する位置に書き、成り立たない場合は反例を示せ。

	反射律	対称律	推移律
$a=b^2$			
a は b で割り切れる			
$\lvert a-b\rvert \le 5$			
ある n が存在して $a-b=5n$			
$a^2=b^2$			
$a+b$ は奇数			

例題5.4 R を集合 A 上の同値関係とする。A の任意の元 a,b に対して次を示せ。

(1) $aRb \Rightarrow (R(a)=R(b))$

(2) $\neg(aRb) \Rightarrow (R(a)\cap R(b)=\phi)$

（証明）(1) aRb かつ $R(a)\neq R(b)$ と仮定する。すると、ある $x\in R(a)-R(b)$ が存在するかまたは、ある $x\in R(b)-R(a)$ が存在する。$x\in R(a)-R(b)$ の場合を考えよう。すると aRx かつ $\neg(bRx)$ である。R は対称的だから aRb から bRa である。R が推移的であることと aRx より bRx となり $\neg(bRx)$ と矛盾する。$x\in R(b)-R(a)$ の場合も同様。

(2) $\neg(aRb)$ かつ $R(a)\cap R(b)\neq\phi$ とする。すると $x\in R(a)\cap R(b)$ が存在する。定義より $aRx,\ bRx$ である。R は対称的なので xRb である。R が推移的より aRb となり $\neg(aRb)$ と矛盾する。（証明終）

問5.14 R を集合 A 上の関係とする。R が同値関係である必要十分条件は次の(1),(2) が成立すること、を示せ。

(1) $(\forall a\in A)(a\in R(a))$

(2) $(\forall a,b\in A)((R(a)=R(b))\vee(R(a)\cap R(b)=\phi))$

問5.15 R, S が集合 A 上の順序なら $R \cap S$ も A 上の順序であることを示せ。

問5.16 R, S を集合 A 上の同値関係とする。$R = S$ である必要十分条件はすべての $a \in A$ に対し $R(a) = S(a)$ であることを証明せよ。

問5.17 A を n 個の元からなる有限集合とする。次の問に答えよ。

(1) A 上の同値関係のうちで、最大の元からなる同値類が含む元の個数はいくつか。
(2) (1) の同値関係の同値類の個数はいくつか。
(3) A 上の同値関係のうちで、最小の元からなる同値類が含む元の個数はいくつか。
(4) (3) の同値関係の同値類の個数はいくつか。

問5.18 R と S を集合 A 上の同値関係とする。$R \cup S$ が同値関係とはならない例を示せ。またその例では反射律、対称律、推移律のうちのどの性質が成り立たないか。

問5.19 $f : A \to B$ を関数とし A 上の関係 $\simeq$ を

$$a \simeq b \stackrel{def}{\iff} f(a) = f(b)$$

と定める。$\simeq$ は同値関係であることを証明せよ。

6 数学的帰納法と関係の閉包

一般に $P(n)$ を自然数 n に関する命題のとき「任意の $n \geq 0$ に対し $P(n)$ が成立する」ことを示すには次のようにすればよい。

（基底） $P(0)$ を示す。
（帰納ステップ） $P(n)$ を仮定し $P(n+1)$ を示す。

また n_0 以上の任意の自然数 n に対し $P(n)$ が成立することを示すには次のようにする。

（基底） $P(n_0)$
（帰納ステップ） $(\forall n \geq n_0)(P(n) \Rightarrow P(n+1))$

このような証明法を n に関する**数学的帰納法**（単に**帰納法**と省略）という。帰納ステップを示す際の仮定 $P(n)$ を **帰納法の仮定**と呼ぶ。

例題6.1 12円以上の代金を切手で支払うとき4円切手と5円切手の2種類の切手があれば十分であることを証明せよ。

（証明） n 円 $(n \geq 12)$ の支払いが可能であることを n に関する帰納法により証明する。

（基底） $n = 12$ のとき。4円切手を3枚使用すればよい。

（帰納ステップ） n 円 $(n \geq 12)$ の支払いが4円切手と5円切手の2種類で可能であると仮定し $n+1$ 円の支払いを考える。

場合1 n 円の支払いに4円切手を含むとき。

4円切手1枚の代わりに5円切手1枚とすれば $n+1$ 円の支払いが可能である。

場合2 n 円の支払いに4円切手を含まないとき。

この場合 n 円の支払いは5円切手だけである。したがって、ある正整数 p が存在して $n = 5p$ であり、しかも $n \geq 12$ より $p \geq 3$ である。よって n 円の支払いは5円切手を少なくとも3枚含む。この3枚の5円切手を4枚の4円切手に交換すれば $n+1$ 円の支払いができる。

いずれの場合も $n+1$ 円の支払いが可能である。よって12円以上の支払いは4円切手と5円切手の2種類の切手で十分である。（証明終）

問6.1 $n \geq 0$ とする。S が n 要素からなる有限集合なら S の部分集合は 2^n 個存在することを n に関する帰納法により証明せよ。

問6.2 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ を空でない集合とする。n に関する帰納法により、次の拡張ドモルガン則を証明せよ。

(1) $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} {A_i}^c$

(2) $\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} {A_i}^c$

集合 A を固定し、A 上の関係について議論する。R を関係とする。R のベキ乗 R^n を次で定義する。

$$\begin{cases} R^0 = I_A \\ R^{n+1} = R \circ R^n \end{cases}$$

このような定義の仕方を**帰納的定義**という。帰納的定義のうち、$R^0 = I_A$ の部分を**基底**、$R^{n+1} = R \circ R^n$ の部分を**帰納ステップ**という。R^n は R の n 個の合成

$$\overbrace{R \circ R \circ \ \ldots \ \circ R}^{n}$$

のことである。関係 R に対し関係 R^*, R^+ を次で定義する。

$$R^* \stackrel{def}{=} \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n, \quad R^+ \stackrel{def}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$$

例題6.2 R が推移律を満たすなら $R \circ R \subset R$ であることを示せ。

（証明） $\langle x, y\rangle \in R \circ R$ とする。合成の定義より $(\exists z)(xRz \wedge zRy)$ である。R は推移律を満たすので xRy すなわち $\langle x, y\rangle \in R$ である。（証明終）

例題6.3 R が推移律を満たすなら、任意の $n \geq 1$ に対し $R^n \subset R$ であることを示せ。

（証明） n に関する帰納法により証明する。

（基底） $n = 1$ のとき。$R^1 = R \circ R^0 = R \circ I_A = R$ より成立する。

（帰納ステップ） n のとき成立すると仮定する。定義より $R^{n+1} = R \circ R^n$ であり、帰納法の仮定より $R^n \subset R$ かつ前例題より $R \circ R \subset R$ である。よって $R^{n+1} \subset R$ となる。（証明終）

問6.3 R が推移律を満たすなら $R^+ = R$ であることを示せ。

例題6.4 $\{[,]\}$ 上の整合した括弧列の集合 B は次で定義される。

(1) （基底）[ ] は B の元である。

(2) （帰納ステップ）x, y が B の元なら、

(i) $[x]$ も B の元、かつ

(ii) xy も B の元。

括弧列 x に対し、$L(x)$ を x 中の左括弧 [の数、$R(x)$ を x 中の右括弧] の数とする。x が B の元なら、$L(x) = R(x)$ であることを帰納法により証明せよ。

（証明）B の定義にしたがって証明する。x を B の任意の元とする。

（基底）$x = [\,]$ なら $L(x) = R(x) = 1$ である。

（帰納ステップ）x, y が B の元で、$L(x) = R(x)$ かつ $L(y) = R(y)$ とする。x と y から構成されるすべての元 z に対し $L(z) = R(z)$ であることを示す。$z = [x]$ なら $L(z) = L(x) + 1 = R(x) + 1 = R(z)$ また $z = xy$ なら $L(z) = L(x) + L(y) = R(x) + R(y) = R(z)$ である。

よって上の命題は証明された。（証明終）

問6.4 上の例題中の $\{[,]\}$ 上の整合した括弧列の集合 B に対し、関数 $d : \{[,]\}^* \rightarrow \mathbf{N}$ を

$$d(u) = (u \text{ 中の [の数}) - (u \text{ 中の] の数})$$

とする。$u = vw$ のとき v は u の**接頭語**であるという。このとき括弧列 u に対し、$u \in B$ の必要十分条件は $d(u) = 0$ かつ u の任意の接頭語 v に対し $d(v) \geq 0$ であること、を u の長さ (u に含まれる [,] の記号数) に関する帰納法により証明せよ。

θ を関係に対する演算とする。任意の関係 R に対し次の (1),(2),(3) を満たすなら θ を**閉包演算**という。

(1) $R \subset \theta(R)$
(2) $\theta(\theta(R)) = \theta(R)$
(3) $R \subset S \Rightarrow \theta(R) \subset \theta(S)$

$\theta(R) = R$ となる R は（θ に関して）**閉じている**または**閉集合**という。P を関係に関する性質とする。任意の関係 R に対し

$$R \text{ が性質 } P \text{ を満たす} \Leftrightarrow R \text{ は（}\theta \text{ に関する）閉集合}$$

となるとき θ を P-**閉包演算**といい、$\theta(R)$ を R の P-**閉包**という。

θ が閉包演算なら $\theta(R)$ は R を含む閉集合のうち（包含関係 $\subset$ に関して）最小のものである。なぜなら、閉包演算の定義の (1) より $\theta(R)$ は R を含み、(2) より $\theta(R)$ が閉集合、また (3) より S が R を含む任意の閉集合なら $\theta(R) \subset \theta(S) = S$ となるからである。

関係 R に対する演算 r, s, t を次で定義する。

$$r(R) \overset{def}{=} R \cup I, \quad s(R) \overset{def}{=} R \cup R^{-1}, \quad t(R) \overset{def}{=} R^{+}$$

問6.5 r, s, t はそれぞれ反射閉包、対称閉包、推移閉包であることを示せ。

問6.6 $(r \circ t)(R) = R^{*}$ を示せ。R^{*} を R の**反射推移閉包**という。

問6.7 集合 $\{a, b, c, d, e\}$ 上の関係 $R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle b, e\rangle\}$ に対し次を求めよ。

(1) $r(R)$	(2) $s(R)$	(3) $t(R)$	(4) $(s \circ r)(R)$
(5) $(s \circ t)(R)$	(6) $(t \circ s)(R)$	(7) R^{*}	(8) R^{-1}

問6.8 次を証明せよ。

(1) R が反射的なら $s(R)$ も $t(R)$ も反射的である。
(2) R が対称的なら $r(R)$ も $t(R)$ も対称的である。
(3) R が推移的なら $r(R)$ も推移的である。

問6.9 R, S がある集合上の関係のとき、次を示せ。

(1) $r(R) \cup r(S) = r(R \cup S)$

(2) $s(R) \cup s(S) = s(R \cup S)$

(3) $t(R) \cup t(S) \subseteq t(R \cup S)$

問6.10 R がある集合上の関係のとき、次を示せ。$(s \circ r)(R) = s(r(R))$ に注意せよ。

(1) $(s \circ r)(R) = (r \circ s)(R)$

(2) $(t \circ r)(R) = (r \circ t)(R)$

(3) $(s \circ t)(R) \subset (t \circ s)(R)$

問6.11 R が同値関係であるための必要十分条件は $R^* \subset R^{-1}$ であることを示せ。

問6.12 xR^*y であるための必要十分条件はある自然数 n と列 $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$ が存在して、各 i $(0 \leq i < n)$ に対し x_iRx_{i+1} を満たすことである、を示せ。n に関する帰納法で示せばよい。

7 グラフと木

A を集合、R を A 上の関係とするとき、組 $\langle A, R \rangle$ のことを**有向グラフ**または**グラフ**という。さらに A が有限集合なら、**有限（有向）グラフ**という。$G = \langle A, R \rangle$ を有向グラフとする。このとき A の元を**頂点**、R の元 $e = \langle x, y \rangle$ を**弧**という。x を弧 e の**始点**、y を e の**終点**という。$\langle x, x \rangle$ の形の弧を**ループ**という。有向グラフ $\langle V, E \rangle$ にループが存在しないことを今まで扱った用語でいい換えると、関係 E が非反射的である、ということになる。有向グラフを図示する場合、各頂点をマル印で書き、弧 $\langle x, y \rangle$ を頂点 x から頂点 y に向かう矢印で書き表す。たとえば有向グラフ $\langle \{a, b, c, d\}, E \rangle$, $E = \{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, a \rangle\}$ を図示すると図 7.1 のようになる。

有向グラフ $\langle V, E \rangle$ の V の元の空でない有限列（すなわち V^+ の元）$\boldsymbol{x} = x_0 x_1 \ldots x_n$ で各 i $(0 \leq i < n)$ に対し $\langle x_i, x_{i+1} \rangle \in E$ を満たすものを**道**という。このとき $\boldsymbol{x}$ は x_0 **から** x_n **への**、**長さ** n の道であるという。x_0 を $\boldsymbol{x}$ の **始点**、x_n を $\boldsymbol{x}$ の **終点**ということもある。

$$（道\ \boldsymbol{x}\ の長さ）=（\boldsymbol{x}\ の列としての長さ）- 1$$

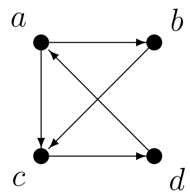


図 7.1　有向グラフの図示

に注意する。とくに V の 1 個の元 x だけからなる列は、x から x への長さ 0 の道である。始点と終点が一致する道を**閉路**という。

閉路を含まない有向グラフを**無閉路有向グラフ** (Directed Acyclic Graph 略して DAG) という。$G = \langle V, E\rangle$ がループを持たないグラフのとき、次が成立する。（ハッセ図を考えてみよ。）

$$G = \langle V, E\rangle \text{ は無閉路} \Leftrightarrow E^* \text{ は順序}$$

以下では木を扱う。ここでは有限の木のみを扱うことにする。**根木**とは有向グラフ $G = \langle V, \preceq \rangle$ で、次を満たすものをいう。

(1) $\preceq$ は順序で、V の各元 a に対し (∞, a) は全順序集合である。[4]

(2) V は最小元 r を持つ。r を**根**という。

V を集合、$\preceq$ を V 上の順序とする。V の元 x と y に対し、$x \preceq y$ も $y \preceq x$ も成立しないなら、x と y は**比較不能**であるという。

例題7.1 V を空でない有限集合、$\preceq$ を V 上の順序とする。$G = \langle V, \preceq \rangle$ が根木である必要十分条件は V の任意の元 x, y に対し次が成立すること、を示せ。

(1) $\{x, y\}$ の下界が存在する。

(2) x と y が比較不能なら $\{x, y\}$ の上界は存在しない。

（証明） $(\Rightarrow)$ (1) r を根とすると r は $\{x, y\}$ の下界である。(2) x と y を比較不能とする。$\{x, y\}$ の上界 a が存在するとしよう。すると x, y はともに (∞, a) の元である。(∞, a) は全順序だから $x \preceq y$ か $y \preceq x$ のいずれかが成立することになり、矛盾。

$(\Leftarrow)$ a を V の元とし x, y を (∞, a) の任意の元とする。a は $\{x, y\}$ の上界なので $x \preceq y$ か $y \preceq x$ のいずれかが成立する。よって (∞, a) は全順序集合で

4　20 ページで $(\infty, a) = \{x \mid x \prec a\}$ と定めた。また (∞, a) は全順序集合 $\langle (\infty, a), \prec \rangle$ のことに注意（19 ページ）。

ある。V は有限集合で、どの 2 元も下界を持つから V は下界 r を持つ。$r \in V$ より r は V の最小元である。（証明終）

次は根木の別の定義である。便宜的に別の名前をつけておく。

根付き木とは $G = \langle V, E, r\rangle$ のことである。ただし、

(1) $r \in V$

(2) V の任意の元 x に対し r から x への道がただ一つ存在する。

例題7.2 $G = \langle V, E, r\rangle$ が根付き木であるための必要十分条件は次が成立することである。

(1) $r \in V$ かつ $|E^{-1}(r)| = 0$

(2) $V - \{r\}$ の任意の元 x に対し $|E^{-1}(x)| = 1$

(3) $\langle V, E\rangle$ は無閉路である。

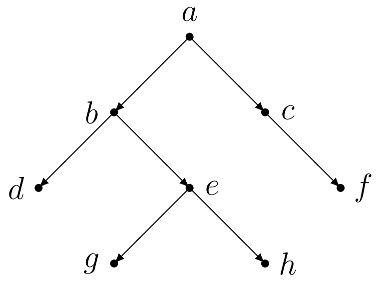
（証明） $(\Leftarrow)$ x を V の任意の元とする。$x_0 = x$ とし、列 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ を次のように求める。x_i まで求まったとする。$x_i = r$ なら終了である。$x_i \neq r$ なら、$|E^{-1}(x_i)| = 1$ より $\langle x_{i+1}, x_i\rangle \in E$ の x_{i+1} がただ一つ存在する。(3) よりこの列の中に同じ元が現れることはないから、いずれは $x_n = r$ となる列 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ が求まる。このようにして求まる列 $x_n x_{n-1} \ldots x_0$ は r から x へのただ一つの道である。よって G は根付き木である。

$(\Rightarrow)$ (1) $\langle z, r\rangle \in E$ とする。r から z への道が存在するので、その道を $x_0 x_1 \ldots x_n$, $r = x_0$, $z = x_n$, $n \geq 0$ とする。すると r から r への道は、長さ 0 の道と、長さ $n+1$ の道 $x_0 x_1 \ldots x_n r$ の 2 個の異なる道が存在し、矛盾。

(2) $x \in V - \{r\}$ とする。$|E^{-1}(x)| = 0$ なら r から x への道は存在しない。$|E^{-1}(x)| \geq 2$ なら $\langle y, x\rangle, \langle z, x\rangle \in E$ の異なる頂点 y, z が存在する。r から y への道を $y_0 y_1 \ldots y_m$, $y_0 = r$, $y_m = y$、また r から z への道を $z_0 z_1 \ldots z_n$, $z_0 = r$, $z_n = z$ とすると、r から x への異なる道が $y_0 y_1 \ldots y_m x$ と $z_0 z_1 \ldots z_n x$ の 2 個存在し、矛盾。

(3) $\langle V, E\rangle$ に閉路 $x_0 x_1 \ldots x_n$, $x_n = x_0$ が存在すると仮定する。r から x_0 への道を $\boldsymbol{y} = y_0 y_1 \ldots y_m$, $y_0 = r$, $y_m = x_0$ とすると、r から x_0 への道は、長さ m の道 $\boldsymbol{y}$ と、長さ $m+n$ の道 $y_0 y_1 \ldots y_m (= x_0) x_1 \ldots x_n (= x_0)$ の異なる 2 個の道が存在し、矛盾する。（証明終）

問7.1 以下の各々の集合 A 上の関係 R に対し、有向グラフ $\langle A, R\rangle$ をかけ。



問7.3 の図

(1) $A = \{1,2,3,4\},\ \ R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,4\rangle\}$
(2) $A = \{1,2,3\},\ \ R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,3\rangle\}$
(3) $A = \{0,1,2,3,4\},\ \ R = \{\langle x,y\rangle \mid 0 \le x < y \le 3\}$
(4) $A = \{2,3,4,5,6\},\ \ R = \{\langle x,y\rangle \mid x$ と y は互いに素 $\}$

問7.2 T を完全 2 分木（葉以外のすべての頂点には 2 個の子が存在する）、T の葉を $b_1, b_2, \ldots, b_n$, b_i の深さ（根からの距離）を d_i とする $(1 \le i \le n)$。次を示せ。

(1) $\sum_{i=1}^{n} 2^{-d_i} = 1$
(2) $\max_{1 \le i \le n} d_i \ge \lceil \log_2 n \rceil$

問7.3 xRy が問題図の木の弧 $\langle x,y\rangle$ で表されるとする。すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し、関係 R^n を表す有向グラフをかけ。

例題7.3 $G = \langle V, \preceq \rangle$ を根木、r を G の根とする。関係 E を次で定義する。

$$xEy \overset{def}{\iff} x \text{ は } y \text{ の直前の元}$$

すると $G' = \langle V, E, r\rangle$ は根付き木となることを示せ。

（証明）a を V の任意の元とする。$(\infty, a) \cap V$ の元を大きさの順に並べたものを $x_0, x_1, \ldots, x_n$ とすると

$$x_0, x_1, \ldots, x_n, a$$

は r から a へのただ一つの道である。

逆に $G' = \langle V, E, r\rangle$ を根付き木とする。$\langle V, E\rangle$ は閉路を含まないから E^* は順序となる。E^* を $\preceq$ で表す。V の任意の元に対し (∞, a) は r から a への道に現れる頂点の集合であり、したがって全順序集合である。よって $G = \langle V, \preceq\rangle$ は根木である。（証明終）

根木と根付き木は、上で示したように同じ概念である。このように同じ概念がいろいろな方法で定義されることが多い。

$G = \langle V, E, r\rangle$ を根付き木とする。x と y を V の元とする。

xEy のとき x は y の**親**であり y は x の**子**であるという。

xE^*y のとき x は y の**先祖**であり y は x の**子孫**であるという。

$E(x) = \phi$ のとき x は**葉**であるという。

問7.4 $\langle V, E\rangle$ を有向グラフとする。次で定義される V 上の関係 $R_1,\ R_2$ は同値関係であることを証明せよ。

$$R_1 \overset{def}{=} E^* \cap (E^{-1})^*, \quad R_2 \overset{def}{=} (E \cup E^{-1})^*$$

同値関係 R_1 による同値類を**強連結成分**といい、 R_2 による同値類を**弱連結成分**という。

問7.5 $\langle V, E\rangle$ を無閉路有向グラフとする。$e_1 = \langle x_1, y_1\rangle,\ e_2 = \langle x_2, y_2\rangle$ を任意の E の弧とする。E 上の関係 R を

$$e_1 R e_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} (x_1 = x_2) \vee (y_1 = y_2)$$

とする。R^+ は E 上の同値関係であることを証明せよ。

有向グラフ $G = \langle V, E\rangle$ において V 上の関係 E が対称的であるとする。このとき G を**無向グラフ**という。E は対称的なので $\langle x, y\rangle \in E$ なら $\langle y, x\rangle \in E$ が常に成り立つ。無向グラフではこれらの弧 $\langle x, y\rangle, \langle y, x\rangle$ を同一視し、**辺**とよぶ。$\langle x, x\rangle$ の形の辺を**ループ**という。無向グラフはループを持たないと仮定することがよくある。以下では、無向グラフにはループが存在しないとする。すると無向グラフの定義は次のようになる。

無向グラフは $G = \langle V, E\rangle$ のことで、V は**頂点**の集合、E は V の異なる 2 個の元からなる集合の族であり E の元を**辺**とよぶ。有向グラフの場合と同じように、無向グラフの辺を $\langle x, y\rangle$ と書くことにする。

道の概念は有向グラフと同様である。ただし閉路を次のように定める。無向グラフにおける**閉路**とは、頂点の空でない有限列 $\boldsymbol{x} = x_0 x_1 \ldots x_n$ で次を満たす

ものをいう。

(1) 各 i $(0 \leq i < n)$ に対し $\langle x_i, x_{i+1}\rangle \in E$ かつ $x_0 = x_n$,

(2) $n \geq 2$ かつ各 i $(0 < i < n)$ に対し $x_{i-1} \neq x_{i+1}$, $x_1 \neq x_{n-1}$.

条件 (1) は有向グラフの場合と同じであるが、条件 (2) は無向グラフでは同じ辺を 2 回使用することを禁じている。

無向グラフに対しては、強連結成分のことを単に**連結成分**といい、連結成分がただ一つの無向グラフを**連結**であるという。

連結で無閉路な無向グラフで、少なくとも 1 個の頂点を含むものを**木**という。

例題7.4 無向グラフ $G = \langle V, E\rangle$ に対し、次の (1)〜(6) は同値である。

(1) G は木である。すなわち G は連結であり、かつ無閉路である。

(2) G は無閉路で $|V| = |E| + 1$ が成り立つ。

(3) G は連結で $|V| = |E| + 1$ が成り立つ。

(4) G は連結で $E \neq \phi$ なら任意の辺を取り除くと連結でなくなる。

(5) G の任意の 2 頂点間に、ただ 1 個の道が存在する。

(6) G は無閉路で E の辺で結ばれていない任意の 2 頂点間を辺で結ぶと閉路ができる。

（証明） (1)⇒(2) 木は無閉路である。$G = \langle V, E\rangle$ が木なら $|V| = |E| + 1$ を頂点の個数に関する帰納法で示す。$|V| = 1$ なら $E = \phi$ より明らかである。$|V| = n + 1$, $n \geq 1$ とし、頂点数が n 以下の木については成立すると仮定する。$e = \langle x, y\rangle$ を G の任意の辺とする。G は無閉路なので、G から e を取り除くと、G は 2 個の連結成分 $G_1 = \langle V_1, E_1\rangle$, $G_2 = \langle V_2, E_2\rangle$ に分割される。$|E| = |E_1| + |E_2| + 1$ であることに注意する。G_1, G_2 はともに木であり、$|V_1| \leq n$, $|V_2| \leq n$ なので帰納法の仮定より $|V_1| = |E_1| + 1$, $|V_2| = |E_2| + 1$ である。よって $|V| = |V_1| + |V_2| = (|E_1| + 1) + (|E_2| + 1) = |E| + 1$ が成立する。

(2)⇒(3) G の連結成分を $G_1 = \langle V_1, E_1\rangle$, $G_2 = \langle V_2, E_2\rangle$, …, $G_k = \langle V_k, E_k\rangle$ とする。各 G_i は連結成分で無閉路なので木である。(1)⇒(2) より $|V_i| = |E_i| + 1$ である。よって

$$|V| = |V_1| + |V_2| + \ldots + |V_k| = |E_1| + |E_2| + \ldots + |E_k| + k = |E| + k$$

となる。(2) より $k = 1$ であり、連結成分の数は 1 個である。

(3)⇒(4) 任意の無向グラフに対し、G が連結なら $E \geq |V| - 1$ であることを辺の個数 $|E|$ に関する帰納法で示せばよい。詳しくは省略する。

(4)⇒(5) 省略。

(5)⇒(6) 省略。

(6)⇒(1) 省略。（証明終）

問7.6 上の例題の (3)⇒(4) の証明を完成させよ。また (4)⇒(5), (5)⇒(6), (6)⇒(1) の部分を証明せよ。

練習問題

1. $A^c \subset B^c \;\Leftrightarrow\; B \in 2^A$ を証明せよ。

2. $(A \cup B = A \cap B) \;\Leftrightarrow\; (A = B)$ を証明せよ。

3. $(A - B) \cup (B - A) \;\subset\; A \cup B$ を証明せよ。

4. 普遍集合が $\mathbf{N}$ のとき「任意の x と y に対しある z が存在して $xy = z$ である」ことを表す論理式を書け。

5. $(A \subset B) \wedge (A \subset C) \;\Leftrightarrow\; A \times A \subset B \times C$ を証明せよ。

6. $(A \subset C) \wedge (B \subset C) \;\Leftrightarrow\; A \times B \subset C \times C$ を証明せよ。

7. $f : A \to B,\, g : B \to C$ を関数とし、合成関数 $g \circ f$ を $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ とする。$g \circ f$ が全射なら g は全射であることを証明せよ。この逆は一般に成立しない。逆が成立しない例を示せ。

8. $f : A \to B,\, g : B \to C$ を関数とし、合成関数 $g \circ f$ を $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ とする。$g \circ f$ が全射かつ g が単射なら f は全射であることを証明せよ。

9. $[2]^{[n]}$ とはどのような集合か。また $[2]^{[n]} \sim [2]^n$ を示せ。

10. A, B を有限集合とし $|A| = n,\; |B| = m$ とする。$[n]^m$ とはどのような集合か。また $A^B \sim [n]^m$ を示せ。

11. R, S がともに同値関係のとき $R \cap S$ も同値関係であることを示せ。

12. R, S がともに同値関係のとき $R \cup S$ は一般には同値関係でない。その反例を示せ。

13. R, S がともに対称的のとき $S \circ R$ は一般に対称的とならない。$S \circ R$ が対称的とならないような反例を示せ。

14. 次の命題は成り立つなら証明し、成り立たないなら反例を示せ。
(1) R, S がともに推移的のとき $S \circ R$ は推移的である。
(2) R, S がともに推移的のとき $R \cap S$ は推移的である。
(3) R, S がともに推移的のとき $R \cup S$ は推移的である。

参考文献

全体的な参考書としては次を薦める。

守屋悦朗著, 離散数学入門, サイエンス社, 2006.

R. Johnsonbaugh 著, Dicrete Mathematics, 5th Ed., Prentice-Hall, 2001.

K.A. Ross, C.R.B. Wright 著, Discrete Mathematics, 4th Ed., Prentice-Hall, 1999.

J.A. Anderson 著, Discrete Mathematics with combinatorics, Prentice-Hall, 2001.

K.H. Rosen 著, Discrete Mathematics and its applications, 4th Ed., McGraw-Hill, 1999.

少し難しくなるが、集合について詳しいことが知りたいときは、次を参考にするとよい。

R.L. ワイルダー著, 吉田洋一訳, 数学基礎論序説, 培風館, 1969.

彌長昌吉, 小平邦彦著, 現代数学概説 (I) 第 1 章, 岩波書店, 1961.

主な記号表

記号	意味	記号	意味
$\mathbb{N}$	自然数全体の集合 $(\{0,1,2,\ldots\})$	$\mathbb{Z}$	整数全体の集合 $(\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\})$
$\mathbb{R}$	実数全体の集合	$\mathbb{R}_+$	正の実数全体の集合 $(\{x \mid x>0, x\in\mathbb{R}\})$
$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$	... と定義する	$\overset{def}{=}$	... と定義する
$\wedge$	かつ	$\vee$	または
$\neg$	でない（否定）		
$\rightarrow$	ならば	$\leftrightarrow$	同値である
$\Rightarrow$	$(\alpha\rightarrow\beta)$ が常に成立のとき $(\alpha\Rightarrow\beta)$ と書く	$\Leftrightarrow$	必要十分条件
$\forall$	全称記号	$\exists$	存在記号
$\in$	集合の元	$\notin$	集合の元でない
$\cup$	和集合	$\cap$	共通集合
$\subset$	部分集合	$=$	（集合が）等しい
$-$	差集合	ϕ	空集合
2^A	集合 A のベキ集合	$\subsetneq$	真部分集合
$\times$	集合の直積	R^{-1}	R の逆対応（逆関数）
$\circ$	合成対応（合成関数、合成関係）	$\sim$	集合の対等性
$[n]$	集合 $\{0,1,\ldots,n-1\}$	χ_A	集合 A の特性関数
B^A	集合 A から集合 B への関数空間		

付録

5で割り切れる番号の問題の解答

問 2.5

(1) $x \in A - B$ とする。$x \in A$ なので $A - B \subset A$ が成り立つ。
(2) $A = A \cup (A \cap B)$, $B = (A \cap B) \cup (B - A)$ なので $A \cup (B - A) = A \cup (A \cap B) \cup (B - A) = A \cup B$ が成り立つ。
(3) $x \in A - (B \cup C)$ とする。$x \in A \wedge x \notin (B \cup C)$ すなわち $x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C$ となる。これは $(x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C)$ であり、$x \in (A - B) \cap (A - C)$ となる。すなわち $A - (B \cup C) \subset (A - B) \cap (A - C)$ である。またこの逆の議論をたどれば $(A - B) \cap (A - C) \subset A - (B \cup C)$ がいえる。よって $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ が示せた。
(4) $x \in A - (B \cap C)$ とする。$x \in A \wedge x \notin (B \cap C)$ すなわち $x \in A \wedge \neg(x \in (B \cap C))$ となり $x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C)$ である。これは $(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C)$ であり、$x \in (A - B) \cup (A - C)$ となる。すなわち $A - (B \cap C) \subset (A - B) \cup (A - C)$ である。またこの逆の議論をたどれば $(A - B) \cup (A - C) \subset A - (B \cap C)$ がいえる。よって $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ が示せた。

問 2.10

(1) ある元 x が存在して $x \in A \cap A^c$ とする。すると $x \in A \wedge x \notin A$ であり矛盾。よって $x \notin A \cap A^c$ であり $A \cap A^c$ は元を持たない集合である。ゆえに $A \cap A^c = \phi$ となる。
(2) 問 2.4 の分配則を適用すると $A \cup (A^c \cap B) = (A \cup A^c) \cap (A \cup B) = A \cup B$ となる。
(3) 上と同様に分配則より $A \cap (A^c \cup B) = (A \cap A^c) \cup (A \cap B) = A \cap B$ となる。

問 2.15

正しいものは (1), (3), (5), (6) である。

問 2.20

$$\lim_{x \to c} f(x) \neq k \iff (\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x)(|x - c| < \delta \wedge |f(x) - k| \geq \varepsilon)$$

問 3.5

$f : A \to B$, $g : B \to C$ とする。f が単射でないと仮定する。すると、あ

る $a_1, a_2 \in A$ が存在して $f(a_1) = f(a_2) \in B$ である。すなわち $g(f(a_1)) = g(f(a_2)) \in C$ となり $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$ となるので $g \circ f$ は単射でない。以上より $g \circ f$ が単射なら f も単射であることが示された。

問 3.10

$g \neq h$ と仮定する。すると、ある $a \in A$ が存在して $g(a) \neq h(a)$ である。f は単射なので $f(g(a)) \neq f(h(a))$ である。つまり $(f \circ g)(a) \neq (f \circ h)(a)$ であり、$f \circ g \neq f \circ h$ である。以上より $f \circ g = f \circ h$ なら $g = h$ が示された。

問 3.15

$C = f(A) \subset B$ とする。$f : A \to B$ は単射なので $f(A) = C$ の任意の元 c に対し $f^{-1}(c) \in A$ が定義でき、$f(A') = C'$ とすると $f^{-1}(C') = A'$ である。よって $f^{-1}(f(A')) = f^{-1}(C') = A'$ が成り立つ。$a \in A - A'$ とする。f が単射より $f(a) \in f(A) - f(A')$ である。したがって $f(A - A') = f(A) - f(A')$ となる。

問 4.5

(1) $[n]^{[m]}$ は $[m]$ から $[n]$ への関数全体であり、それらの関数は n^m 個存在するので $[n]^{[m]} = \{f_0, f_1, \ldots, f_{n^m-1}\}$ と書ける。一方 $[n^m] = \{0, 1, \ldots, n^m - 1\}$ であり、関数 g を $g : [n]^{[m]} \to [n^m]$, $g(f_i) = i$ $(0 \leq i < n^m)$ とすると g が全単射であることから $[n]^{[m]} \sim [n^m]$ が示される。

(2) $A \sim B$ より全単射 $f : A \to B$ が存在する。$A' \subset A$ とし、関数 $g : 2^A \to 2^B$ を $g(A') = \{f(a) \mid a \in A'\} \subset B$ とする。g が全単射であることを示す。

$A_1, A_2 \subset A$ に対し $g(A_1) = g(A_2)$ とする。$g(A_i) = \{f(a) \mid a \in A_i\}$ $(i = 1, 2)$ なので $\{f(a) \mid a \in A_1\} = \{f(a) \mid a \in A_2\}$ となり、f が単射より $A_1 = A_2$ となる。よって g は単射。次に $B' \subset B$ とする。f は全単射なので $f^{-1} : B \to A$ が定められ、$\tilde{A} = \{f^{-1}(b) \mid b \in B'\}$ とすると $\tilde{A} \subset A$ であり $g(\tilde{A}) = B'$ となるので g は全射。ゆえに g は全単射。以上より $2^A \sim 2^B$ が示された。

(3) $C \subset A \cup B$ とする。$A \cap B = \phi$ より $C = A' \cup B'$ と書け $A' \cap B' = \phi$, $A' \subset A$, $B' \subset B$ と書ける。関数 $f : 2^{A \cup B} \to 2^A \times 2^B$ を $f(C) = \langle A', B' \rangle$ とする。f が全単射であることを示す。

$C_1, C_2 \subset A \cup B$ に対し $f(C_1) = f(C_2)$ とする。$C_i = A_i \cup B_i$, $A_i \cap B_i = \phi$, $A_i \subset A$, $B_i \subset B$, $f(C_i) = \langle A_i, B_i \rangle$ $(i = 1, 2)$ と書けるので $f(C_1) = f(C_2)$ より $\langle A_1, B_1 \rangle = \langle A_2, B_2 \rangle$ である。よって $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$ であり、$C_1 = A_1 \cup B_1 = A_2 \cup B_2 = C_2$ となる。ゆえに f は単射。次に $\langle A', B' \rangle \in 2^A \times 2^B$ とする。$A' \subset A$, $B' \subset B$ である。$C' = A' \cup B'$ とおけば $f(C') = \langle A', B' \rangle$ の $C' \subset A \cup B$ が存在するので f は全射。以上より f は全単射であり $2^{A \cup B} \sim 2^A \times 2^B$ が示された。

問 5.5

(1) R は反射的なので $(x,x) \in R$ であり $(x,x) \in R^{-1}$ である。よって R^{-1} は反射的。$(x,y),(y,z) \in R^{-1}$ とする。つまり $(y,x),(z,y) \in R$ である。R は推移的なので $(z,y),(y,x) \in R$ より $(z,x) \in R$ すなわち $(x,z) \in R^{-1}$ である。よって R^{-1} は推移的。次に $(x,y),(y,x) \in R^{-1}$ すなわち $(y,x),(x,y) \in R$ とする。R が反対称的より $y = x$ となり R^{-1} も反対称的。以上より R^{-1} は順序である。
(2) R, R^{-1} での順序をそれぞれ $\preceq_R$, $\preceq_{R^{-1}}$ とする。R^{-1} が全順序でない、すなわちある x,y が存在し $x \preceq_{R^{-1}} y$ でも $y \preceq_{R^{-1}} x$ でもないと仮定する。R が全順序より $x \preceq_R y$ または $y \preceq_R x$ が成り立つ。すると $y \preceq_{R^{-1}} x$ または $x \preceq_{R^{-1}} y$ が成り立ち矛盾する。よって R が全順序なら R^{-1} も全順序である。

問 5.10

a が M の極大元とする。極大元の定義より、$a \in M$ であり、任意の $x \in M$ に対し $\neg(a \prec x)$ である。全順序集合においては任意の $x,y \in A$ に対し $x \prec y$ または $y \prec x$ なので、$(\forall x)\neg(a \prec x)$ は $(\forall x)(x \preceq a)$ と同値である。よって a は最大元。また a が M の最大元なら、任意の $x \in M$ に対し $\neg(a \prec x)$ であり、極大元でもある。ゆえに、全順序集合においては極大元と最大元は同一の概念である。

問 5.15

R,S は反射的だから $(x,x) \in R$, $(x,x) \in S$ であり、$(x,x) \in R \cap S$ となる。よって $R \cap S$ は反射的。$(x,y),(y,z) \in R \cap S$ とする。$(x,y),(y,z) \in R$ かつ $(x,y),(y,z) \in S$ であり、R は推移的より $(x,z) \in R$ となる。同様に $(x,z) \in S$ であり、$(x,z) \in R \cap S$ となる。よって $R \cap S$ は推移的。$(x,y),(y,x) \in R \cap S$ とする。$(x,y),(y,x) \in R$ であり R が反対称的より $x = y$ となる。よって $R \cap S$ は反対称的。ゆえに $R \cap S$ は順序である。

問 6.5

r について示す。(1) $r(R) = R \cup I$ なので $R \subset r(R)$ となる。(2) $r(r(R)) = (R \cup I) \cup I = R \cup I = r(R)$ となる。(3) $R \subset S$ なら $r(R) = R \cup I \subset S \cup I = r(S)$ となる。また $r(R)$ は反射的である。よって r は反射閉包。

s について示す。(1) $R \subset R \cup R^{-1} = s(R)$ となる。(2) $s(s(R)) = (R \cup R^{-1}) \cup (R \cup R^{-1})^{-1} = R \cup R^{-1} = s(R)$ となる。(3) $R \subset S$ なら $s(R) = R \cup R^{-1} \subset S \cup S^{-1} = s(S)$ となる。$s(R)$ は対称的である。よって s は対称閉包。

t について示す。(1) $R \subset R^+ = t(R)$ となる。(2) $t(t(R)) = (R^+)^+ = R^+ = t(R)$ となる。(3) $R \subset S$ なら $t(R) = R^+ \subset S^+ = t(S)$ となる。$t(R)$ は推移的である。よって t は推移閉包。

問 6.10
(1) $(s \circ r)(R) = s(r(R)) = s(R \cup I) = (R \cup I) \cup (R \cup I)^{-1} = R \cup I \cup R^{-1}$ であり、一方 $(r \circ s)(R) = r(s(R)) = r(R \cup R^{-1}) = R \cup R^{-1} \cup I$ となるので $(s \circ r)(R) = (r \circ s)(R)$ が成立。
(2) $(t \circ r)(R) = t(r(R)) = t(R \cup I) = (R \cup I)^{+} = R^{*}$ であり、また $(r \circ t)(R) = r(t(R)) = r(R^{+}) = R^{+} \cup I = R^{*}$ なので $(t \circ r)(R) = (r \circ t)(R)$ が成立。
(3) $(R^{+})^{-1} = (R^{-1})^{+}$ なので $(s \circ t)(R) = s(t(R)) = s(R^{+}) = R^{+} \cup (R^{+})^{-1} = R^{+} \cup (R^{-1})^{+}$ となる。一方 $(t \circ s)(R) = t(s(R)) = t(R \cup R^{-1}) = (R \cup R^{-1})^{+}$ であり $R^{+} \subset (R \cup R^{-1})^{+}, (R^{-1})^{+} \subset (R \cup R^{-1})^{+}$ となるので $(s \circ t)(R) = R^{+} \cup (R^{-1})^{+} \subset (R \cup R^{-1})^{+} = (t \circ s)(R)$ である。
問 7.5
eRe より $eR^{+}e$ なので R^{+} は反射的。

$eR^{+}e'$ とする。ある n $(n \geq 1)$ が存在して $eR^{n}e'$ である。すなわち E の元 $e_0 = e, e_1, e_2, \ldots, e_n = e'$ が存在して $e_0Re_1, e_1Re_2, \ldots, e_{n-1}Re_n$ となる。R は対称的なので $e_nRe_{n-1}, e_{n-1}Re_{n-2}, \ldots, e_1Re_0$ が成立。よって $e_nR^{n}e_0$, $e_nR^{+}e_0$ であり、$e'R^{+}e$ となるので R^{+} は対称的。

$eR^{+}e'$, $e'R^{+}e''$ とする。ある n, m $(n, m \geq 1)$ が存在して $eR^{n}e'$, $e'R^{m}e''$ である。すなわち E の元 $e_0 = e, e_1, e_2, \ldots, e_n = e'$, $e'_0 = e', e'_1, e'_2, \ldots, e'_m = e''$, が存在して $e_0Re_1, e_1Re_2, \ldots, e_{n-1}Re_n$, $e'_0Re'_1, e'_1Re'_2, \ldots,$ $e'_{m-1}Re'_m$ となる。$e_n = e'_0$ より $e_0R^{n+m}e'_m$, $eR^{n+m}e''$ であり $eR^{+}e''$ となる。よって R^{+} は推移的。以上より R^{+} は同値関係である。

練習問題の解答

1. $(\Rightarrow)$ $A^c \subset B^c$ とし $x \in B$ とする。$x \notin A$ とすると $A^c \subset B^c$ より $x \notin B$ なので $x \in B$ と矛盾する。よって $x \in A$ であり $B \subset A$ である。これは $B \in 2^A$ を意味する。$(\Leftarrow)$ $B \in 2^A$ とする。定義より $B \subset A$ である。$x \in A^c$ とすると $x \notin A$ である。$x \in B$ なら $B \subset A$ より $x \in A$ となるが $x \notin A$ と矛盾するので $x \notin B$ である。よって $A^c \subset B^c$ が示された。

2. $(\Leftarrow)$ 明らか。$(\Rightarrow)$ $A \cap B \subset A \subset A \cup B$ と $A \cap B \subset B \subset A \cup B$ がともに成り立つ。$A \cap B = A \cup B$ なので $A \cap B = A \cup B = A = B$ である。よって $A = B$ が成り立つ。
[$(\Rightarrow)$ の別解] $x \in A$ とする。$x \in A \cup B$ である。$A \cup B = A \cap B$ より $x \in A \cap B$ がいえる。よって $x \in B$。ゆえに「$x \in A$ なら $x \in B$」が成立し $A \subset B$。同様にして $B \subset A$ も示せる。よって $A = B$ である。

3. $x \in (A - B) \cup (B - A)$ とする。 $x \in A - B$ かまたは $x \in B - A$ である。
場合 1. $x \in A - B$ のとき。$x \in A \wedge x \notin B$ なので $x \in A$ である。よって $x \in A \cup B$ が示された。
場合 2. $x \in B - A$ のとき。場合 1 と同様に $x \in B$, $x \in A \cup B$ が示せる。以上より $(A - B) \cup (B - A) \subset A \cup B$ が成り立つ。
[別解] $A - B \subset A$ と $B - A \subset B$ より $(A - B) \cup (B - A) \subset (A \cup B)$ が成り立つ。

4. $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(xy = z)$

5. $(\Rightarrow)$ $\langle a, b\rangle \in A \times A$ とする。すると $a, b \in A$ である。仮定より $a, b \in B$ かつ $a, b \in C$。よって $\langle a, b\rangle \in B \times C$ となる。
$(\Leftarrow)$ $a \in A$ とする。$\langle a, a\rangle \in A \times A$ である。仮定より $\langle a, a\rangle \in B \times C$ であるから $a \in B$ かつ $a \in C$。よって $A \subset B$ かつ $A \subset C$ である。

6. $(\Rightarrow)$ $\langle a, b\rangle \in A \times B$ とする。すると $a \in A$ かつ $b \in B$ である。仮定より $a, b \in C$。よって $\langle a, b\rangle \in C \times C$ となる。
$(\Leftarrow)$ $a \in A, b \in B$ とする。$\langle a, b\rangle \in A \times B$ である。仮定より $\langle a, b\rangle \in C \times C$ であるから $a \in C$ かつ $b \in C$。よって $A \subset C$ かつ $B \subset C$ である。

7. （証明）$g \circ f$ が全射であることより $(\forall c \in C)(\exists a \in A)((g \circ f)(a) = g(f(a)) = c)$ である。$f(a) = b \in B$ とおけば $(\forall c \in C)(\exists b \in B)(g(b) = c)$ となる。よって g は全射である。
（反例）$A = \{1\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{\alpha, \beta\}$ とし、$f(1) = a$, $g(a) = \alpha$, $g(b) = \beta$ とする。すると $g : B \to C$ は全射だが $g \circ f : A \to C$ は全射でない。

8. （証明）B の任意の元を b とし $g(b) = c \in C$ とする。$g \circ f$ が全射であることから、ある $a \in A$ が存在して $(g \circ f)(a) = c$ となる。$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = c$ であることと、g が単射より $g(b') = c$ なら $b = b'$ であることから $f(a) = b$ が成立する。B の任意の元 b に対し、ある $a \in A$ が存在して $f(a) = b$ なので f は全射が示された。

9. $[n]$ から $[2]$ への関数全体の集合。
（証明）任意の関数 $f : [n] \to [2]$ を $f(i) = b_i, b_i \in \{0, 1\}, 0 \le i \le n - 1$ とすると $B_f = b_0 b_1 \ldots b_{n-1}$ は $0, 1$ の n 個の列であり $[2]^n$ の元である。f を B_f にこのように対応させると、この対応は関数であり $[2]^{[n]}$ から $[2]^n$ への全単射である。よって $[2]^{[n]} \sim [2]^n$ が示された。

10. $[n]^m = \{\langle a_1, a_2, \ldots, a_m\rangle \mid a_1, a_2, \ldots, a_m \in [n]\}$
（証明）$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ とする。任意の関数 $f : B \to A$ は $f(b_1)f(b_2)\ldots$

$f(b_m)$, $f(b_i) \in A$ というように A の元の m 個の列で表される。また逆に A の元の m 個の列は関数 $f : B \to A$ を表すと考えられる。f と $f(b_1)f(b_2)\dots f(b_m)$ を対応させると A^B から A^m への全単射が定義できる。$A \sim [n]$ は明らかなので A^B から $[n]^m$ への全単射が存在する。

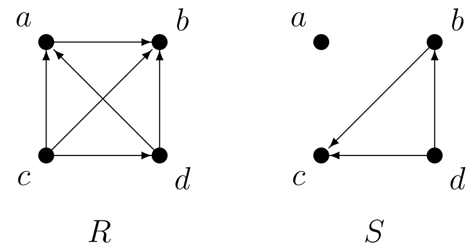
11. R, S がともに反射的より、すべての $a \in A$ に対し $(a,a) \in R, (a,a) \in S$ である。よって $(a,a) \in R \cap S$ となり $R \cap S$ は反射的である。R, S がともに対称的より、すべての $a, b \in A$ に対し $(a,b) \in R$ なら $(b,a) \in R$ でありかつ $(a,b) \in S$ なら $(b,a) \in S$ である。よって $(a,b) \in R \cap S$ なら $(b,a) \in R \cap S$ となり $R \cap S$ は対称的である。R, S がともに推移的より、すべての $a, b, c \in A$ に対し $(a,b) \in R, (b,c) \in R$ なら $(a,c) \in R$ であり、かつ $(a,b) \in S, (b,c) \in S$ なら $(a,c) \in S$ である。よって $(a,b) \in R \cap S, (b,c) \in R \cap S$ なら $(a,c) \in R \cap S$ となり $R \cap S$ は推移的である。以上より $R \cap S$ は同値関係である。

12. $A = \{a,b,c,d\}, I = \{\langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,d\rangle\}$ とし $R = I \cup \{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle\}$, $S = I \cup \{\langle a,c\rangle, \langle c,a\rangle\}$ とする。R, S はいずれも同値関係であるが $R \cup S$ は推移的でない。したがって $R \cup S$ は同値関係でない。

13. $A = \{a,b,c\}, R = \{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle\}, S = \{\langle b,c\rangle, \langle c,b\rangle\}$ とすると $S \circ R = \{\langle a,c\rangle\}$ となり R, S は対称的であるが $S \circ R$ は対称的でない。

14. (1) 成り立たない。

（反例）$R = \{\langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle, \langle c,a\rangle, \langle c,b\rangle, \langle d,a\rangle, \langle d,b\rangle\}$, $S = \{\langle b,c\rangle, \langle d,b\rangle, \langle d,c\rangle\}$ とする。R, S を図示すると図のようになる。R, S は推移的である。$aRb \wedge bSc$ より $a(S \circ R)c$ であり、また $cRd \wedge dSb$ より $c(S \circ R)b$ である。しかし $a(S \circ R)b$ でない。よって $S \circ R$ は推移的でない。



(2) 成り立つ。（証明）R, S がともに推移的なので、すべての $a, b, c \in A$ に対し $\langle a,b\rangle \in R, \langle b,c\rangle \in R$ なら $\langle a,c\rangle \in R$ でありかつ $\langle a,b\rangle \in S, \langle b,c\rangle \in S$ なら $\langle a,c\rangle \in S$ である。よって $\langle a,b\rangle \in R \cap S, \langle b,c\rangle \in R \cap S$ なら $\langle a,c\rangle \in R \cap S$ となり $R \cap S$ は推移的である。

(3) 成り立たない。

（反例）$R = \{\langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle b,c\rangle\}$, $S = \{\langle b,c\rangle, \langle b,d\rangle, \langle d,c\rangle\}$ とする。R, S は推移的である。aRb より $a(R \cup S)b$ であり bSd より $b(R \cup S)d$ である。

$a(R \cup S)b$ かつ $b(R \cup S)d$ であるが $a(R \cup S)d$ でない。よって $R \cup S$ は推移的でない。（R, S の図示は省略する）

ラッセルの矛盾

自分自身を元として持たないような集合を**通常**の集合とよぶ。自然数の集合は通常の集合であり、われわれが取り扱うほとんどの集合は通常の集合である。通常の集合全体からなる集合を U とする。U の元はいずれも通常であり、どの通常の集合も U の元である。すると次の **1.**, **2.** が成り立つ。

1. U は通常の集合である。
（証明）U が通常の集合でないと仮定する。すると、通常の集合の定義より U は自分自身を元として持つので $U \in U$ である。ところが U の元はいずれも通常の集合である。よって U は通常の集合であり、矛盾が生じる。（証明終）

2. U は通常の集合でない。
（証明）U が通常の集合であると仮定する。すると通常の集合の定義より U は自分自身を元として持たない。したがって $U \notin U$ である。しかし通常の集合はどれも U の元である。U は通常の集合なので $U \in U$ となる。よって矛盾が生じる。（証明終）

上の **1.**, **2.** は明らかに矛盾している。

無限集合と濃度

集合 A から集合 B に全単射が存在するとき、集合 A, B は対等であると定めた。集合 A と B が対等であるとき、A, B は同じ**濃度**を持つという。集合 A が有限集合なら A の濃度は A の元の数とする。たとえば $\{a, b, c\}$ の濃度は 3 であり、$\{1, 2, 3, 4, 5\}$ の濃度は 5 である。集合 A の濃度を $\overline{\overline{A}}$ と書くことにする。

集合 S と $\mathbf{N}$ が対等のとき「集合 S には $\aleph_0$ 個の元がある」とか「S の濃度は $\aleph_0$ である」という[5]。集合 S に $\aleph_0$ 個の元があるか、または S が有限集合のとき、S は**可付番集合** (countable) であるという。$\mathbf{N}$ と $\mathbf{Z}$ は対等なので $\overline{\overline{\mathbf{N}}} = \overline{\overline{\mathbf{Z}}} = \aleph_0$ である。同様に偶数全体の集合や $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ の濃度も $\aleph_0$ である。これらの集合はいずれも可付番集合である。

[5] $\aleph$ はヘブライ語の第一文字で、アレフと読む。

有理数全体の集合 $\mathbf{Q}$ を考えよう。有理数を $\dfrac{p}{q}$ と書くことにし、p を整数、q を正整数とする。ゼロは $\dfrac{0}{1}$ と表し $\dfrac{2}{3}$ は決して $\dfrac{4}{6}$ と書かないことにする。有理数の**指標**とは $|p|+q$ であると定義する。たとえば $-2=\dfrac{-2}{1}$ の指標は 3 であり、$-\dfrac{2}{3}$ の指標は 5 である。さて、指標が 1 の有理数は 0 だけである。指標 2 の有理数は -1 と 1 だけ。指標 3 は $-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, -2, 2$ というように有理数を指標の小さい順に並べていく。同じ指標を持つ有理数では、有理数の絶対値が小さいものから順に並べる。こうして $\mathbf{Q}$ の元を順に並べると

$$0, -1, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2, 2, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -3, 3, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -4, 4, \ldots$$

となる。このようにするとすべての有理数を並べることができるので、$\mathbf{N}$ から $\mathbf{Q}$ への全単射が存在する。よって $\overline{\overline{\mathbf{Q}}}=\aleph_0$ である。

次に $\mathbf{N}$ と $\mathbf{R}$ は対等でないことを示す。**実数**とは

$$\pm k_1 k_2 \ldots k_m . a_1 a_2 \ldots$$

の形の無限小数で表されるとしておく。ただし $k_i, a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ で、ある i から始めて $a_i, a_{i+1}, \ldots$ がすべて 0 であることはないものとする。例外として $0.a_1a_2\ldots$ で a_i がすべて 0 である場合は、この小数は 0 を表すとする。自然数も実数であり、たとえば 3 は $2.99\ldots$ と書ける。

さて $\mathbf{N}$ が $\mathbf{R}$ と対等であると仮定しよう。すると全単射 $f:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$ が存在する。自然数 n に対し実数 $f(n)$ が対応する。$f(n)$ の小数点以下 n 桁目の数字を $f^n(n)$ で表すことにする。このとき $f^n(n)\neq 1$ なら $a_n=1,\ f^n(n)=1$ なら $a_n=2$ とおいて実数 $r=0.a_1a_2\ldots$ を考えると、$r\in\mathbf{R}$ なので r はどれかの実数 $f(i)$ と一致する。すると $r=f(i)$ の小数点以下 i 桁目の数字は a_i であり $f^i(i)$ でもある。ところが $a_i\neq f^i(i)$ と a_i を定めた。このような矛盾が起こるので上のような全単射 f は存在しない。ゆえに $\mathbf{N}$ と $\mathbf{R}$ は対等でない。$\mathbf{R}$ の濃度を $\aleph$ で表す。

α と β を濃度とし、$\overline{\overline{A}}=\alpha,\ \overline{\overline{B}}=\beta$ のどの集合 A,B に対しても A の濃度と B のある部分集合の濃度が同じで、その逆が成り立たないとき、$\alpha<\beta$ と定める。上で示したように $\aleph_0<\aleph$ が成立する。

詳しい証明は省略するが、

$$\mathbf{R}\sim 2^{\mathbf{N}}\sim [2]^{\mathbf{N}}$$

が成り立ち[6]、これらの濃度はいずれも $\aleph$ である。($2^{\mathbb{N}}$ は $\mathbb{N}$ の部分集合全体、$[2]^{\mathbb{N}}$ は $\mathbb{N} \to [2]$ の関数全体の集合であることにに注意せよ。)

ギリシャ文字表

A α alpha	B β beta	Γ γ gamma	Δ δ delta	E ε epsilon	Z ζ zeta
H η eta	Θ θ theta	I ι iota	K κ kappa	Λ λ lambda	M μ mu
N ν nu	Ξ ξ xi	O o omicron	Π π pi	P ρ rho	Σ σ sigma
T τ tau	Υ υ upsilon	Φ ϕ phi	X χ chi	Ψ ψ psi	Ω ω omega

[6] たとえば、ワイルダー著、吉田訳、数学基礎論序説、pp.141–142 を見よ。

離散数学第一 試験（第1回）問題（平成8年10月29日実施）

以下で A, B, C を集合とする。

A1. $(A - B) \cup (B - C) \subset A \cup B$ を証明せよ。
B1. $A \cap B \subset A \cup B$ を証明せよ。
C1. $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$ を証明せよ。
A2. $(C \subset A) \wedge (C \subset B) \Rightarrow C \subset (A \cap B)$ を証明せよ。
B2. $A \subset B \Rightarrow (A \cap B^c = \phi)$ を証明せよ。
C2. $(C \subset A) \vee (C \subset B) \Rightarrow C \subset (A \cup B)$ を証明せよ。
A3. $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$ を証明せよ。
B3. $A \subset B \Rightarrow 2^A \subset 2^B$ を証明せよ。
C3. 後に続く式を書き、定義を完成させよ。

$$A \in 2^B \overset{def}{\Longleftrightarrow}$$

A4. 普遍集合が $\mathbf{N}$ のとき「ある x が存在して任意の y, z に対し $xy = xz$ である」ことを表す論理式を書け。
B4. 普遍集合が $\mathbf{N}$ のとき「任意の x に対しある y が存在して $y = 2x$ である」ことを表す論理式を書け。
C4. 普遍集合が $\mathbf{N}$ のとき「任意の x と y に対しある z が存在して $x+y = x+z$ である」ことを表す論理式を書け。

離散数学第一 試験（第2回）問題（平成8年12月3日実施）

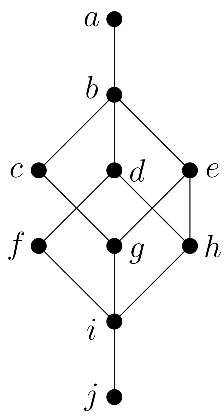
以下で A, B, C を集合とする。

A1. $(A \subset B) \wedge (A \subset C) \Leftrightarrow A \times A \subset B \times C$ を証明せよ。
B1. $(A \cap B) \times (A \cap C) = (A \times A) \cap (B \times C)$ を証明せよ。
C1. $(A \subset B) \wedge (C \subset B) \Leftrightarrow A \times C \subset B \times B$ を証明せよ。
A2. 対応 $R : A \to B$ の定義を述べよ。
B2. 関数 $f : A \to B$ の定義を述べよ。
C2. 対応 $R : A \to B$ に対し、R の逆対応 R^{-1} の定義を述べよ。
以下の **A3., B3., C3.** では、$f : A \to B$, $g : B \to C$ を関数とし、合成関数 $g \circ f$ を $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ とする。
A3. $g \circ f$ が単射なら f は単射であることを証明せよ。この逆は一般に成立しない。逆が成立しない例を示せ。
B3. $g \circ f$ が全射なら g は全射であることを証明せよ。この逆は一般に成立しない。逆が成立しない例を示せ。
C3. f, g がともに全射なら $g \circ f$ も全射であることを証明せよ。この逆は一般

に成立しない。逆が成立しない例を示せ。
A4. $[2]^{[n]}$ とはどのような集合か。また $[2]^{[n]} \sim [2^n]$ を示せ。
B4. $[2]^n$ とはどのような集合か。また $|A| = n$ なら $2^A \sim [2]^n$ を示せ。
C4. $[2]^{[n]}$ とはどのような集合か。また $[2]^{[n]} \sim [2]^n$ を示せ。

離散数学第一 試験（第 3 回）問題（平成 9 年 1 月 28 日実施）

以下で R, S を集合 A 上の関係とする。
A1.,B1.,C1. は右図を参照せよ。右のハッセ図において、図の下側の頂点から上側の頂点に向って辺があれば（下の頂点）$\prec$（上の頂点） であることを示す。たとえば $g \prec c,\ e \prec b,\ \ldots$。



A1. (1) $\{c, g, h\}$ の上界は何か。(2) $\{c, g, h\}$ の最大下界は何か。
B2. (1) $\{c, d, e\}$ の上界は何か。(2) $\{c, d, e\}$ の最大下界は何か。
C1. (1) $\{c, e, f, g\}$ の下界は何か。(2) $\{c, e, f, g\}$ の最小上界は何か。
A2. R が推移的である定義を述べよ。
B2. R が対称的である定義を述べよ。
C2. R が反射的である定義を述べよ。
A3. R, S がともに同値関係のとき $R \cap S$ も同値関係であることを示せ。
B3. R, S がともに同値関係のとき $R \cup S$ は一般には同値関係でない。その反例を示せ。
C3. R, S がともに対称的のとき $S \circ R$ は一般に対称的とならない。$S \circ R$ が対称的とならないような反例を示せ。
A4. A を整数全体の集合とし、$a, b \in A$ に対し $aRb \overset{def}{\Longleftrightarrow} a + b$ が偶数 と定める。R は同値関係であることを示せ。また R はどのような同値類を導くか。
B4. A を整数全体の集合とし、$a, b \in A$ に対し $aRb \overset{def}{\Longleftrightarrow} a - b$ が 4 の倍数 と定める。R は同値関係であることを示せ。また R はどのような同値類を導くか。
C4. A を整数全体の集合とし、$a, b \in A$ に対し $aRb \overset{def}{\Longleftrightarrow} a^2 = b^2$ と定める。R は同値関係であることを示せ。また R はどのような同値類を導くか。

離散数学第一 定期試験問題（平成 9 年 2 月 20 日実施）

1. 集合 A, B, C に対し $(A - B) \cup (B - C) \subset A \cup B$ を証明せよ。
2. $f : A \to B,\ g : B \to C$ を関数とし、合成関数 $g \circ f$ を $(g \circ f)(a) = g(f(a))$

とする。f, g がともに全射なら $g \circ f$ も全射であることを証明せよ。この逆は一般に成立しない。逆が成立しない例を示せ。
3. R, S がともに反射的な関係なら $R \cup S$ も $S \circ R$ も反射的な関係であることを証明せよ。
4. 集合 A 上の同値関係を R とする。$B \subset A$ に対し B 上の関係 S を

$$S = R \cap (B \times B)$$

とすると、S は B で同値関係であることを証明せよ。
5. $\Sigma = \{a, b\}$ とする。Σ^* は a, b からなる記号列全体の集合である。いま $x \in \Sigma^*$ に対し $|x|$ で x の含む記号数を表すものとする。たとえば $|aab| = 3$, $|babba| = 5$ など。さて $x, y \in \Sigma^*$ に対し

$$x \sim y \overset{def}{\Longleftrightarrow} |x| = |y|$$

と定める。関係 $\sim$ は同値関係であることを示せ。
6. $n (n \geq 12)$ 円以上の代金を切手で支払うとき 3 円切手と 7 円切手の 2 種類の切手があれば十分であることを n に関する帰納法により証明せよ。
7. $s(R) = R \cup R^{-1}$ とするとき、次を示せ。
(1) $s(R) \cup s(S) = s(R \cup S)$
(2) $R \subset S$ なら $s(R) \subset s(S)$

離散数学第一 試験（第 1 回）問題（平成 10 年 10 月 26 日実施）

以下で A, B, C を集合とする。

A1. $A \subset B \Rightarrow (A - C) \subset (B - C)$ を証明せよ。
B1. $(A \cup B = A \cap B) \Leftrightarrow (A = B)$ を証明せよ。
C1. $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$ を証明せよ。
A2. $A^c \subset B^c \Leftrightarrow B \in 2^A$ を証明せよ。
B2. $A \subset B \Rightarrow (C - B) \subset (C - A)$ を証明せよ。
C2. $(A - B) \cup (B - A) \subset A \cup B$ を証明せよ。
A3. 普遍集合が $\mathbf{N}$ のとき「ある x が存在して任意の y に対し $xy = x$ である」ことを表す論理式を書け。
B3. 普遍集合が $\mathbf{N}$ のとき「任意の x に対しある y が存在して $xy = 1$ である」ことを表す論理式を書け。
C3. 普遍集合が $\mathbf{N}$ のとき「任意の x と y に対しある z が存在して $xy = z$ である」ことを表す論理式を書け。

離散数学第一 試験（第 2 回）問題（平成 10 年 11 月 30 日実施）

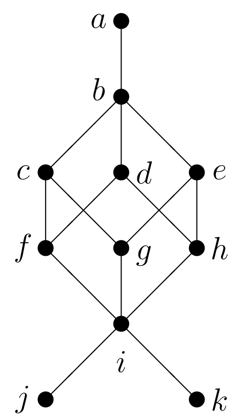
以下で A, B, C を集合とする。

A1. $(A \subset C) \wedge (B \subset C) \Leftrightarrow A \times B \subset C \times C$ を証明せよ。
B1. $(A \times A) \cup (B \times C) \subset (A \cup B) \times (A \cup C)$ を証明せよ。
C1. $(A \cap B) \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (B \times C)$ を証明せよ。
以下の **A2., B2., C2.** では、$f : A \to B,\ g : B \to C$ を関数とし、合成関数 $g \circ f$ を $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ とする。
A2. $g \circ f$ が単射なら f は単射であることを証明せよ。この逆は一般に成立しない。逆が成立しない例を示せ。
B2. f, g がともに単射なら $g \circ f$ も単射であることを証明せよ。この逆は一般に成立しない。逆が成立しない例を示せ。
C2. $g \circ f$ が全射なら g は全射であることを証明せよ。この逆は一般に成立しない。逆が成立しない例を示せ。
A3. A, B を有限集合とし $|A| = n, |B| = m$ とする。A^B とはどのような集合か。また $A^B \sim [n]^{[m]}$ を示せ。
B3. A, B を有限集合とし $|A| = n, |B| = m$ とする。$[n]^m$ とはどのような集合か。また $A^B \sim [n]^m$ を示せ。
C3. $[2]^A$ とはどのような集合か。また A が有限集合で $|A| = n$ なら $[2]^A \sim [2^n]$ を示せ。
A4. 関数 $f : A \to B$ が全単射のとき、逆関数 f^{-1} の定義を述べよ。
B4. 対応 $R : A \to B$ の定義を述べよ。
C4. 関数 $f : A \to B$ の定義を述べよ。

離散数学第一 試験（第 3 回）問題（平成 11 年 1 月 25 日実施）

以下で R, S を集合 A 上の関係とする。

A1.,B1. は右図を参照せよ。図の下側の頂点から上側の頂点に向って辺があれば（下の頂点）$\prec$（上の頂点） であることを示す。たとえば $g \prec c,\ e \prec b,\ \ldots$。



A1. (1) $\{f, g, h\}$ の下界をすべて書け。
(2) $\{f, g, h\}$ の最小上界は何か。
B1. (1) $\{c, d, e\}$ の上界は何か。
(2) $\{c, d, e\}$ の最大下界は何か。
A2. R が推移的である定義を述べよ。
B2. R が対称的である定義を述べよ。

A3. 「R, S がともに推移的のとき $S \circ R$ は推移的である。」は成り立つか。成り立つなら証明し、成り立たないなら反例を示せ。
B3. 「R, S がともに推移的のとき $R \cap S$ は推移的である。」は成り立つか。成り立つなら証明し、成り立たないなら反例を示せ。
A4. A を整数全体の集合とし $a, b \in A$ に対し $aRb \overset{def}{\Longleftrightarrow} a + b$ が偶数 と定める。R は同値関係であることを示せ。また R はどのような同値類を導くか。
B4. A を整数全体の集合とし $a, b \in A$ に対し $aRb \overset{def}{\Longleftrightarrow} a^2 = b^2$ と定める。R は同値関係であることを示せ。また R はどのような同値類を導くか。

離散数学第一 定期試験問題 (平成 11 年 2 月 15 日実施)

1. $(A \cap B) \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (B \times C)$ を証明せよ。
2. 普遍集合を整数全体の集合とするとき「ある x が存在して任意の y に対して $xy = x$ である」を表す論理式を書け。
3. $f : A \to B$, $g : B \to C$ を関数とし、合成関数 $g \circ f$ を $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ とする。合成関数 $g \circ f$ が全単射なら g は全射かつ f は単射であることを証明せよ。
4. 集合 A, B に対し A^B とはどのような集合か。また一般に $A^B \sim B^A$ は成立しない。$A^B \sim B^A$ が成立しないような例を示せ。
5. A を整数全体の集合とし $a, b \in A$ に対し $aRb \overset{def}{\Longleftrightarrow} a + b$ が偶数 と定める。R は同値関係であることを示せ。また R はどのような同値類を導くか。
6. R が集合 A 上の関係で $r(R) = R \cup I_A$, $s(R) = R \cup R^{-1}$ のとき $(s \circ r)(R) = (r \circ s)(R)$ を示せ。