離散数学 – 課題の解答

2017.1.18

問 5.13 の答：

- 「$a = b^2$」
  - 反射律：満たさない。反例：$2 \neq 2^2$
  - 対象律：満たさない。反例：$4 = 2^2$ だが $2 \neq 4^2$
  - 推移律：満たさない。反例：$16 = 4^2$ かつ $4 = 2^2$ だが $16 \neq 2^2$
- 「a が b で割り切れる」
  - 反射律：満たさない。反例：0 は 0 を割れない。
  - 対象律：満たさない。反例：$2|4$ だが $4 \not| 2$
  - 推移律：満たす。証明：$a = kb$ かつ $b = hc$ ならば $a = khc$
- 「$|a - b| \leq 5$」
  - 反射律：満たす。証明：$|a - a| = 0 \leq 5$
  - 対象律：満たす。証明：$|a - b| = |b - a|$ より。
  - 推移律：満たさない。反例：$|0 - 5| \leq 5$ かつ $|5 - 10| \leq 5$ だが $|0 - 10| = 10 > 5$
- 「$(\exists n \in \boldsymbol{Z})(a - b = 5n)$」
  - 反射律：満たす。証明：$a - a = 5 \times 0$
  - 対象律：満たす。証明：$a - b = 5n \Rightarrow b - a = 5(-n)$
  - 推移律：満たす。証明：$a - b = 5n$ かつ $b - c = 5m$ ならば $a - c = 5(n + m)$
- 「$a^2 = b^2$」
  - 反射律：満たす。証明：$a^2 = a^2$
  - 対象律：満たす。証明：$a^2 = b^2$ ならば $b^2 = a^2$
  - 推移律：満たす。証明：$a^2 = b^2$ かつ $b^2 = c^2$ ならば $a^2 = c^2$
- 「$a + b$ は奇数」
  - 反射律：満たさない。反例：$1 + 1 = 2$
  - 対象律：満たす。証明：$a + b = b + a$ より。
  - 推移律：満たさない。反例：$1 + 2 = 3, 2 + 3 = 5$（ともに奇数）だが $1 + 3 = 4$（偶数）

問 5.14 の答：
必要性（R が同値関係 $\Rightarrow$ (1), (2) が成立。）：
　(1) が成立しないと仮定する。すなわち $(\exists a \in A)(a \notin R(a))$ となるが、$\langle a,a\rangle \notin R$ となり、反射律が成立しない。
　次に (2) が成立しないと仮定する。すなわち $(\exists a,b \in A)((R(a) \neq R(b)) \wedge (R(a) \cap R(b) \neq \emptyset))$ である。ここで一般性を失うことなく $|R(a)| \geq |R(b)|$ とすることができる。$R(a) \neq R(b)$ より、$(\exists c \in A)(c \in R(a) - R(b))$、すなわち $\langle a,c\rangle \in R$ かつ $\langle b,c\rangle \notin R$ である。$R(a) \cap R(b) \neq \emptyset$ より、$\exists d \in R(a) \cap R(b)$、すなわち $\langle a,d\rangle, \langle b,d\rangle \in R$ である。ここで R が対象律と推移律を満たすと仮定すると、$\langle b,d\rangle, \langle d,a\rangle, \langle a,c\rangle \in R$ より $\langle b,c\rangle \in R$ を得る。しかしこれは $c \notin R(b)$ に矛盾。従って対象律が推移律のどちらかは満たさない。以上で必要性は証明された。

十分性（(1), (2) が成立 $\Rightarrow$ R が同値関係。）：R が同値関係でないと仮定する。すなわち反射律、対象律、推移律のうちどれかは満たさない。
　まず反射律を満たさないと仮定する。すなわち $(\exists a \in A)(\langle a,a\rangle \notin R)$ である。このとき、$a \notin R(a)$ となるので、(1) が成立しない。よって以下では反射律を満たすと仮定する。
　次に対象律を満たさないと仮定する。すなわち $(\exists a,b \in A)(\langle a,b\rangle \in R \wedge \langle b,a\rangle \notin R)$、すなわち $b \in R(a)$ かつ $a \notin R(b)$ である。反射律を満たすので $a \in R(a)$ かつ $b \in R(b)$ である。$a \in R(a)$ と $a \notin R(b)$ より

$$R(a) \neq R(b) \tag{1}$$

である。しかし一方 $b \in R(a)$ と $b \in R(b)$ より、

$$R(a) \cap R(b) \neq \emptyset \tag{2}$$

である。式 (1), (2) より、条件 (2) に反する。よって以下では対象律も満たすと仮定する。
　そして推移律を満たさないと仮定する。すなわち、$(\exists a,b,c \in A)((\langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle \in R) \wedge (\langle a,c\rangle \notin R))$ である。よって、$b \in R(a)$, $c \in R(b)$, $c \notin R(a)$ となる。これより

$$R(a) \neq R(b) \tag{3}$$

である。一方反射律より $b \in R(b)$ なので

$$b \in R(a) \cap R(b) \neq \emptyset \tag{4}$$

である。式 (3), (4) は条件 (2) に反する。
　以上から十分性が示された。 $\square$

問 5.15 の答：
$R \cap S$ が反射律、推移律、反対称律を各々満たすことを証明する。

- **反射律：**R, S が反射律を満たすので、$(\forall a \in A)(\langle a,a\rangle \in R)$ かつ $(\forall a \in A)(\langle a,a\rangle \in S)$ である。従って $(\forall a \in A)(\langle a,a\rangle \in R \cap S)$ が導け、$R \cap S$ は反射律を満たす。

- **推移律：**R, S が推移律を満たすので、次の二つの命題がともに成立する。

$$(\langle a,b\rangle \in R \wedge \langle b,c\rangle \in R) \Rightarrow (\langle a,c\rangle \in R)$$
$$(\langle a,b\rangle \in S \wedge \langle b,c\rangle \in S) \Rightarrow (\langle a,c\rangle \in S)$$

従って次の命題が得られる。

$$(\langle a,b\rangle \in R\cap S \wedge \langle b,c\rangle \in R\cap S) \Rightarrow (\langle a,c\rangle \in R\cap S)$$

これは $R\cap S$ が推移律を満たすことを意味する。

- **反対称律：** R, S が反対称律を満たすので、次の二つの命題がともに成立する。

$$(\langle a,b\rangle \in R \wedge \langle b,a\rangle \in R) \Rightarrow (a=b)$$
$$(\langle a,b\rangle \in S \wedge \langle b,a\rangle \in S) \Rightarrow (a=b)$$

従って次の命題を得る。

$$(\langle a,b\rangle \in R\cap S \wedge \langle b,a\rangle \in R\cap S) \Rightarrow (a=b)$$

これは $R\cap S$ が反対称律を満たすことを意味する。

以上から $R\cap S$ が反射律、推移律、反対称律をすべて満たすので、半順序である。 □