

2016 年前学期 情報・通信工学科 火曜 2 限 離散数学

問題と解答

問 3.5 関数 f, g に対して、 $g \circ f$ が単射ならば f も単射であることを示せ。

答) $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ とする。 f が単射でないとは仮定する。すなわち、

$$\exists x, y \in A, (x \neq y) \wedge (f(x) = f(y))$$

とする。すると

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(f(y)) = g \circ f(y)$$

となり、「 $x \neq y$ かつ $g \circ f(x) = g \circ f(y)$ 」である x, y が存在することになり、 $g \circ f$ が単射であることに反する。よって f は単射である。□

注意：ここで用心深い人は「 g は単射にならないの？」と思うであろう。実は「 $g \circ f$ が単射であるが g は単射でない」という例は存在する。どんな場合にそうなるのか考えてみよう。

問 3.6 関数 f, g がともに全射ならば $g \circ f$ も全射であることを示せ。

答) $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ とする。 $\forall z \in C$ に対し、 g が全射であることから

$$\exists y \in B, z = g(y)$$

さらに f が全射であることから

$$\exists x \in A, y = f(x)$$

従って

$$z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x)$$

となり、 $z = g \circ f(x)$ となる $x \in A$ が存在する。よって $g \circ f$ は全射である。□

問 3.7 関数 f, g に対して、 $g \circ f$ が単射かつ f が全射なら g は単射であることを示せ。

答) $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ とする。 g が単射でないとは仮定する。すなわち

$$\exists y_1, y_2 \in B, y_1 \neq y_2$$

$$g(y_1) = g(y_2) = z$$

であるとする。 f が全射なので

$$y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$$

となる $x_1, x_2 \in A$ が存在する。 $y_1 \neq y_2$ より、 $x_1 \neq x_2$ である。すると

$$g \circ f(x_1) = g(f(x_1)) = g(y_1) = z$$

$$g \circ f(x_2) = g(f(x_2)) = g(y_2) = z$$

となり、 $x_1 \neq x_2$ に対し

$$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$$

となり、 $g \circ f$ が単射であることに反する。□

問 3.8 f, g を関数とする。合成関数 $g \circ f$ が全単射なら g は全射で f は単射であることを示せ。

答) $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ とする。 $g \circ f$ が全射であるので、 $\forall z \in C$ に対し、 $z = g \circ f(x)$ となる $x \in A$ が存在する。 $y = f(x)$ とおくと、

$$z = g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y)$$

すなわち、 $\forall z \in C$ に対し、 $z = g(y)$ となる $y \in B$ が存在するので、 g は全射である。

また、 f が単射であることは、問 3.5 で示されている。□

問 3.9 全射 $f: A \rightarrow B$ と関数 $g: B \rightarrow C, h: B \rightarrow C$ に対し、 $g \circ f = h \circ f$ なら $g = h$ を証明せよ。

答) $g \neq h$ と仮定する。すなわち、 $\exists y \in B$ に対し、 $g(y) \neq h(y)$ である。 f が全射なので、 $y = f(x)$ となる $x \in A$ が存在する。従って

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y)$$

$$h \circ f(x) = h(f(x)) = h(y)$$

となり,

$$g \circ f(x) \neq h \circ f(x)$$

よって,

$$g \circ f \neq h \circ f$$

となり矛盾である。

□

問 3.10 単射 $f : B \rightarrow C$ と関数 $g : A \rightarrow B$,

$h : A \rightarrow B$ に対し、 $f \circ g = f \circ h$ なら $g = h$ を証明せよ。

答) $g \neq h$ と仮定する。すなわち、 $g(x) \neq h(x)$ である $x \in A$ が存在する。 f が単射であるので

$$f \circ g(x) = f(g(x)) \neq f(h(x)) = f \circ h(x)$$

従って

$$f \circ g \neq f \circ h$$

となり矛盾である。

□