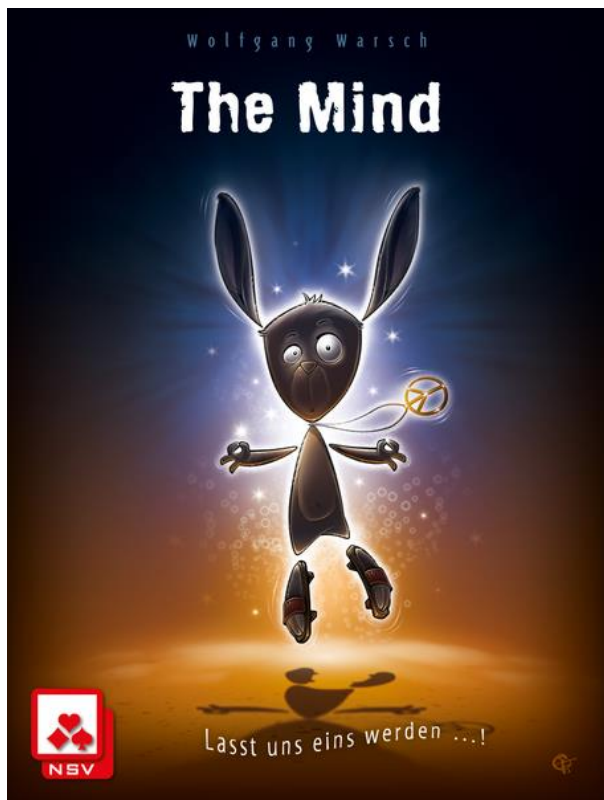
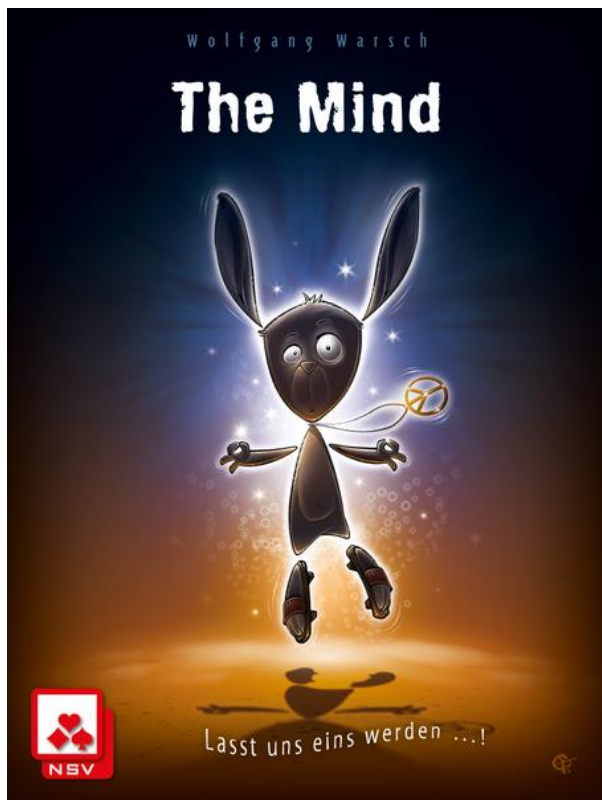


Mind *the Mind* with Synchronous Clocks



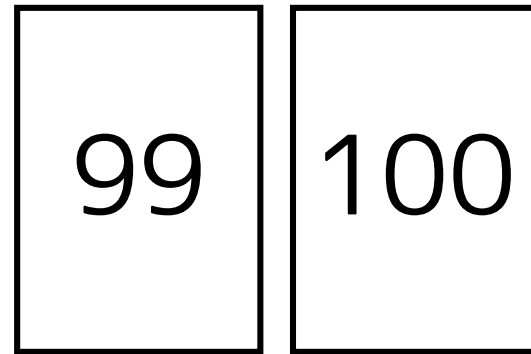
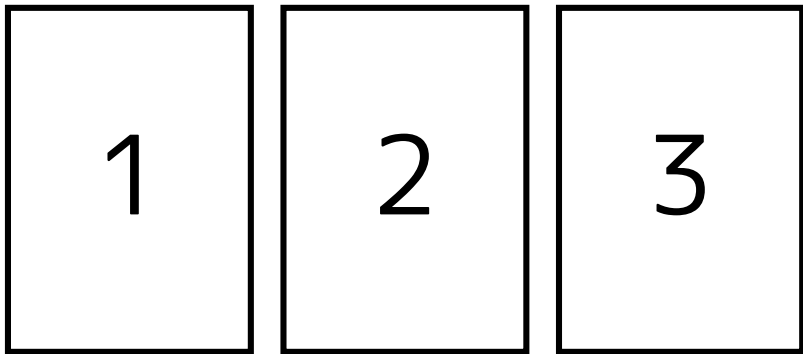
堀山	貴史	埼玉大
栗田	和宏	北大
岡本	吉央	電通大
内澤	啓	山形大
上原	隆平	JAIST

the Mind



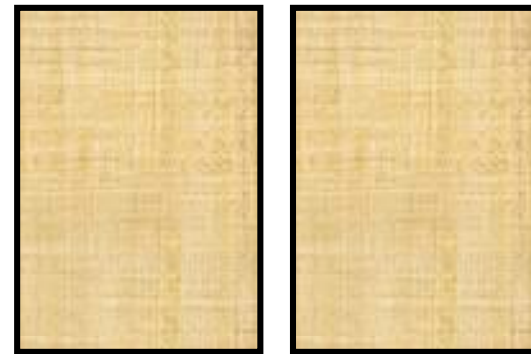
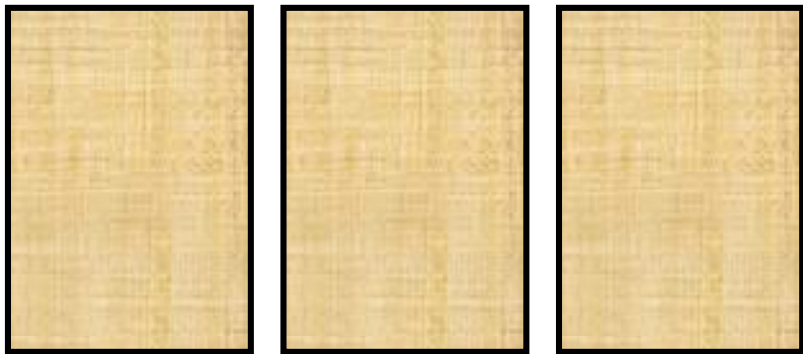
- W. Warsch作
- 2018年
ドイツ年間
ゲーム大賞
ノミネート

1からNまでのカード, 1枚ずつ

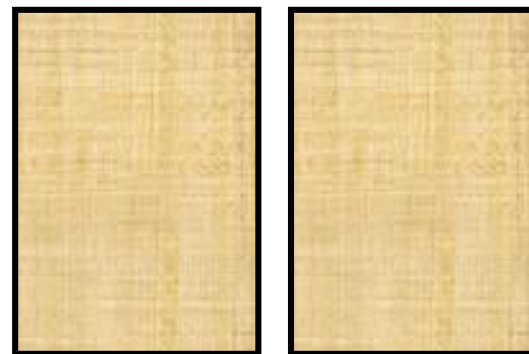
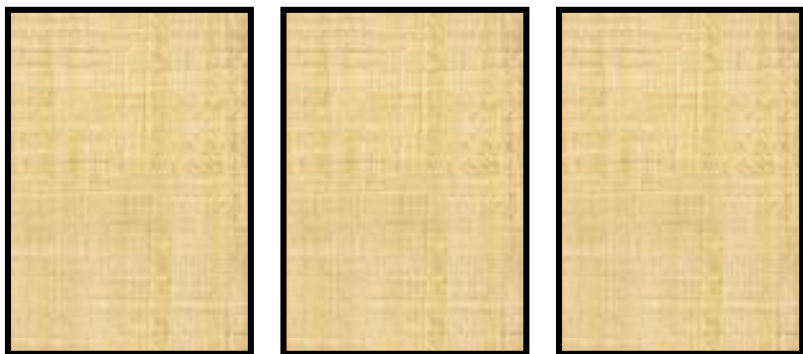


N=100

1からNまでのカード, 1枚ずつ

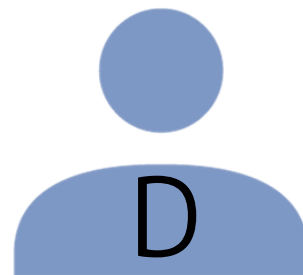
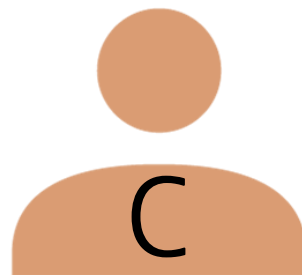
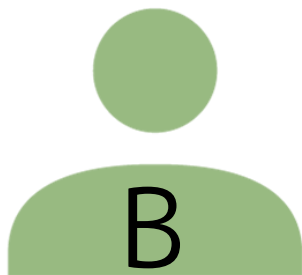
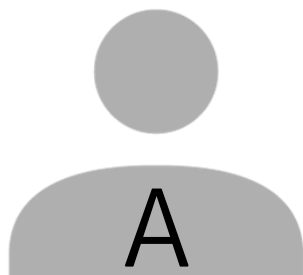


$N=100$



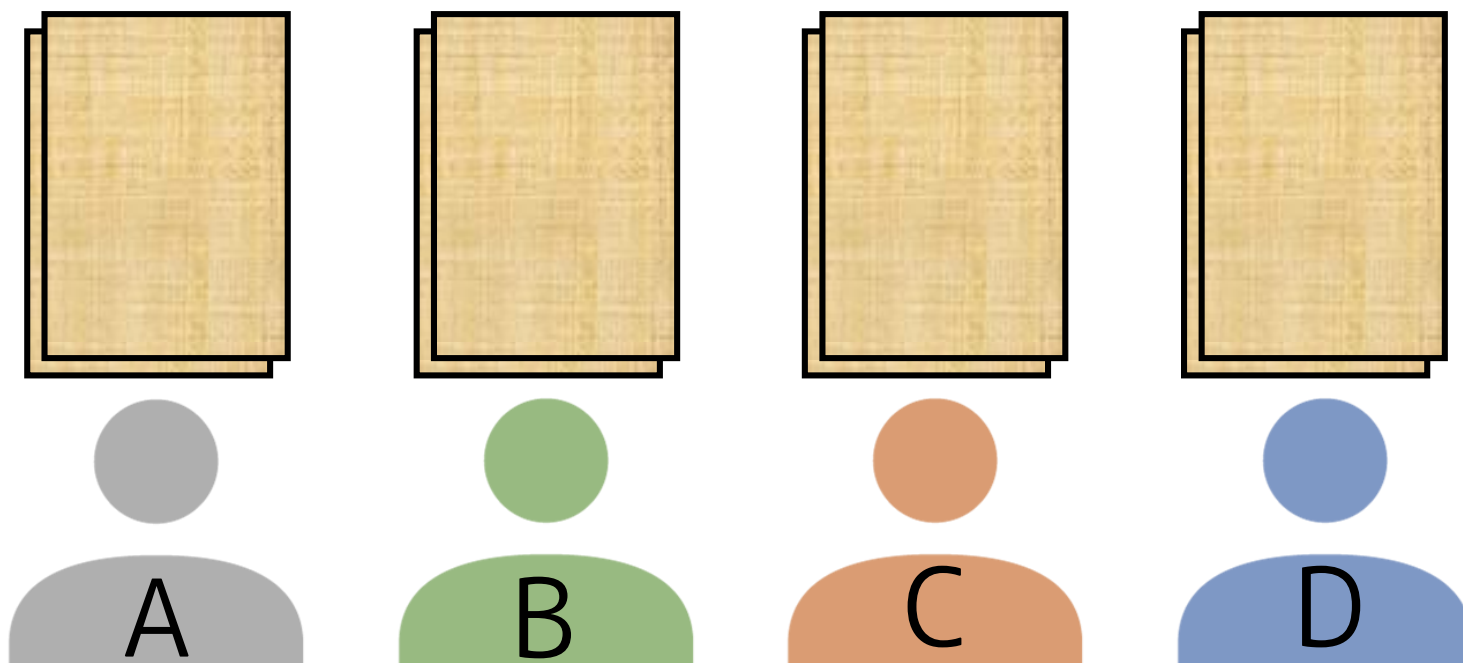
K 人のプレイヤー

$K=4$

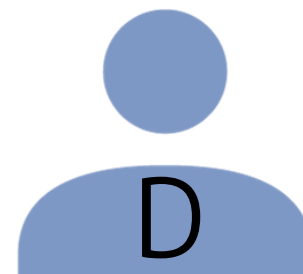
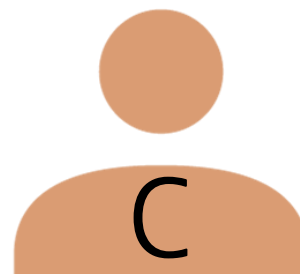
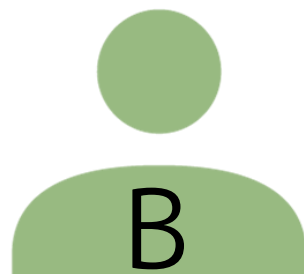
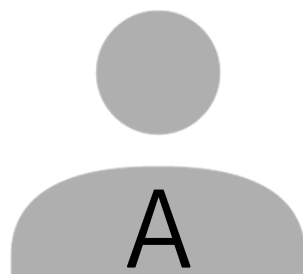
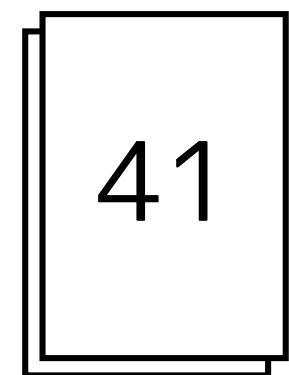


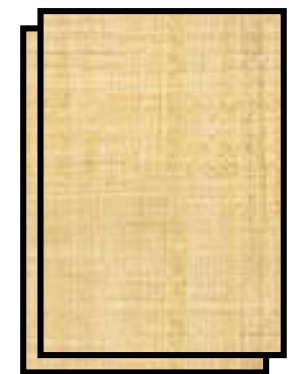
M =各プレイヤーに配る枚数

$M=2$



自分のカードは見ることができる





A



B



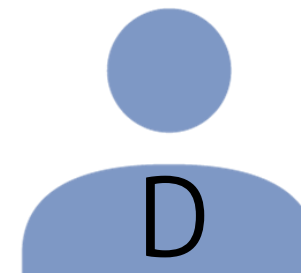
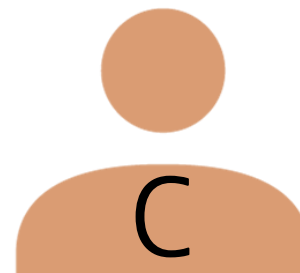
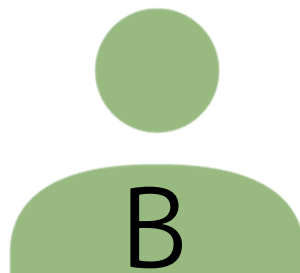
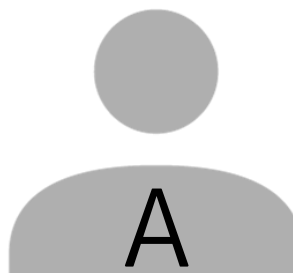
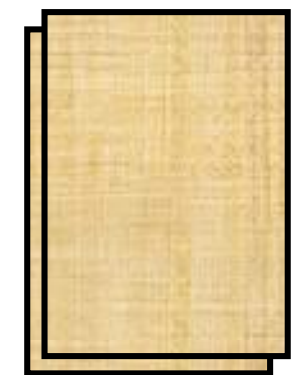
C



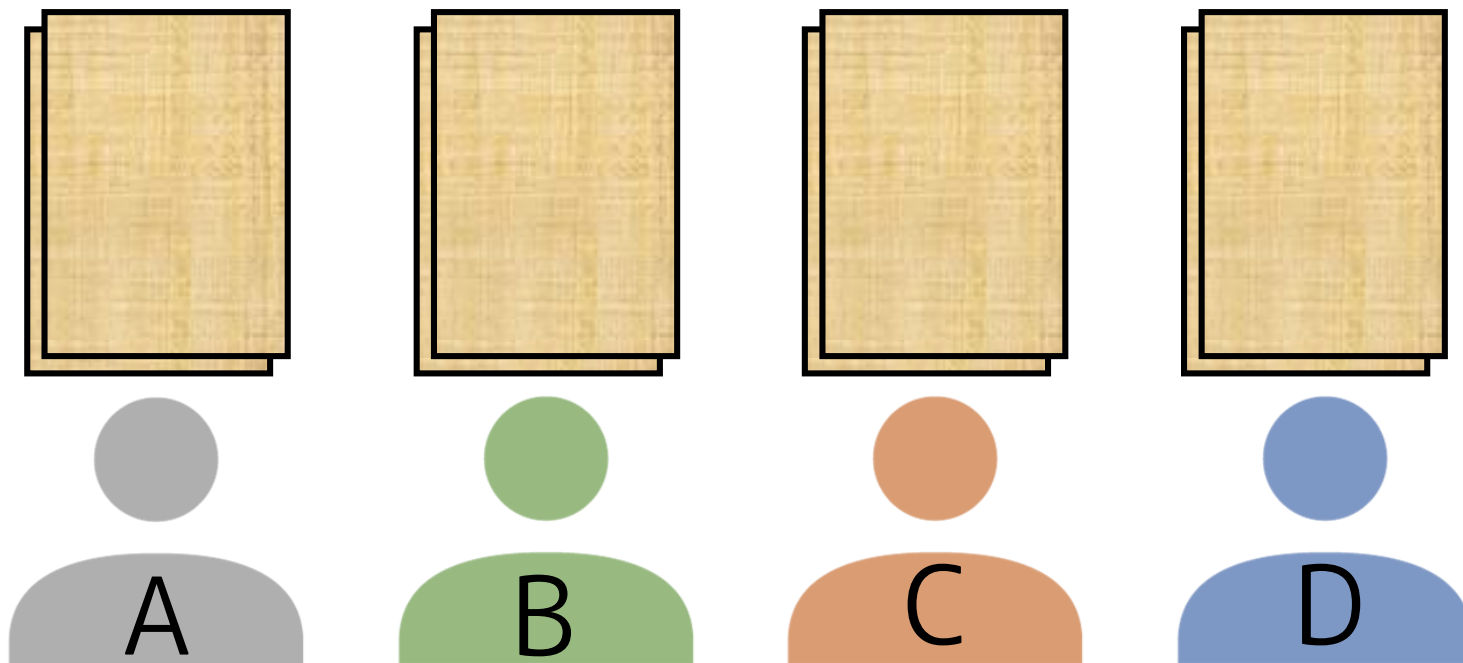
D

K人は協力して勝利を目指す

ゲームの結果 { K人全員の勝利
K人全員の敗北

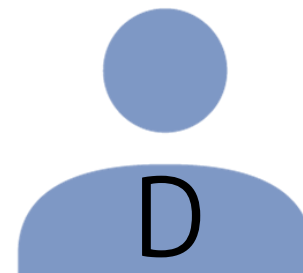
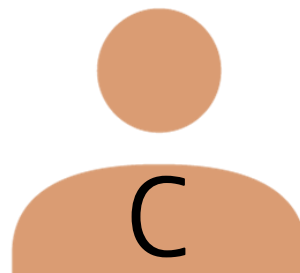
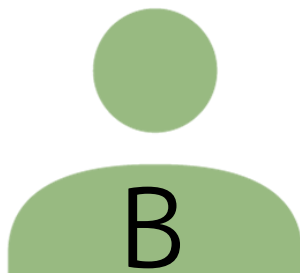
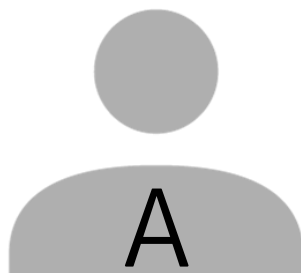


目標：カードを小さい順に出す

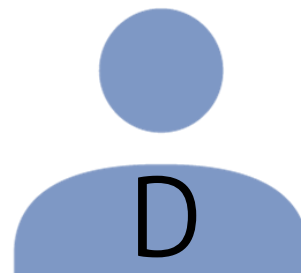
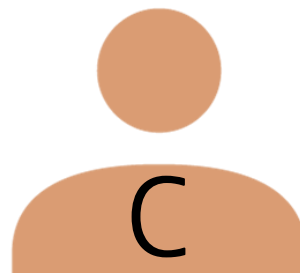
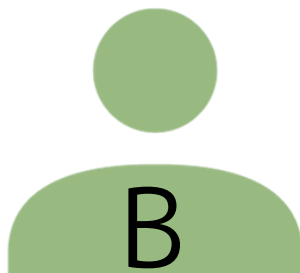
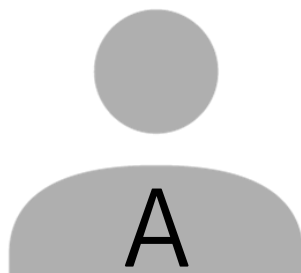
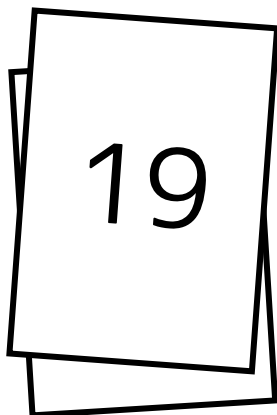


目標：カードを小さい順に出す

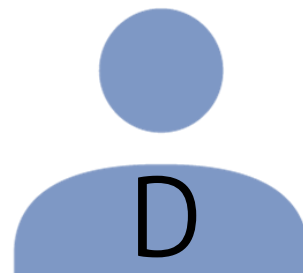
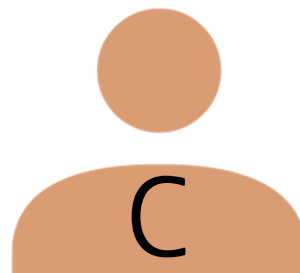
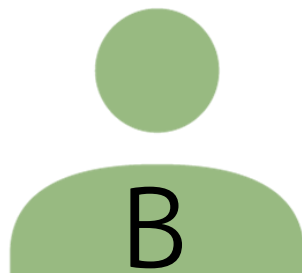
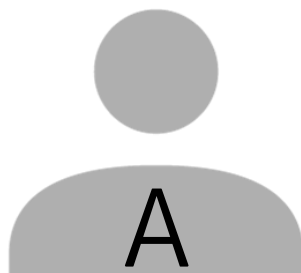
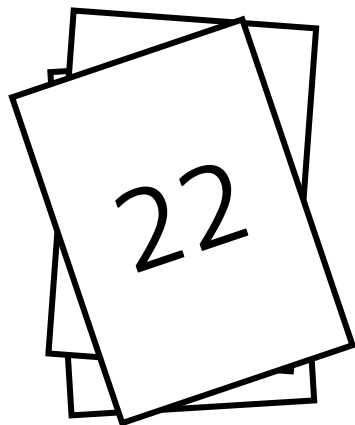
12



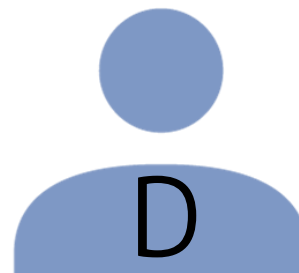
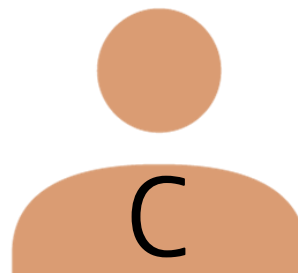
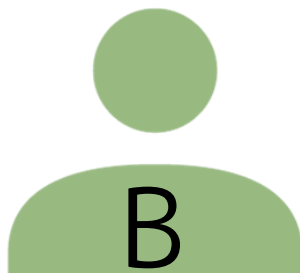
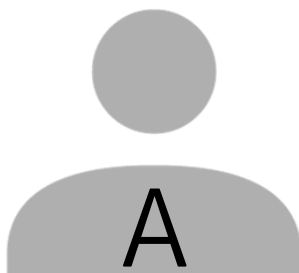
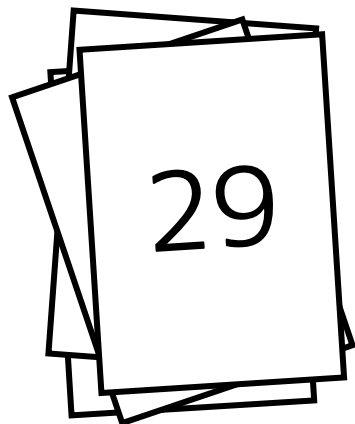
目標：カードを小さい順に出す



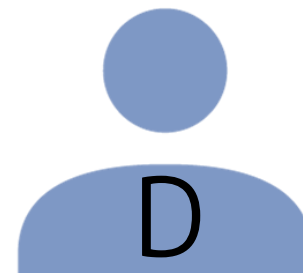
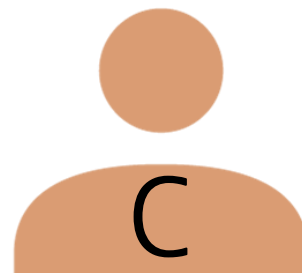
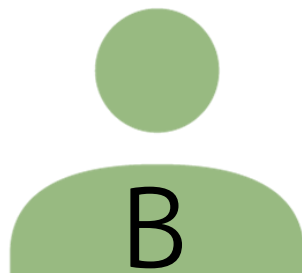
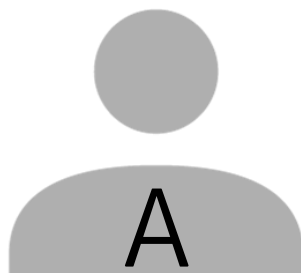
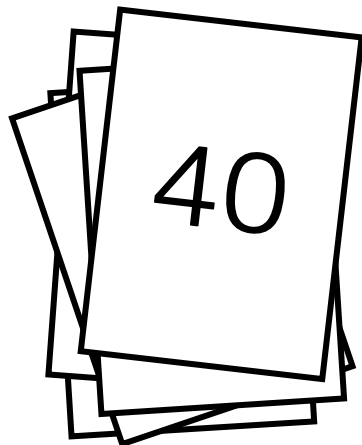
目標：カードを小さい順に出す



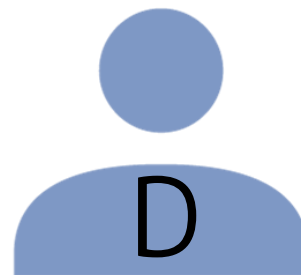
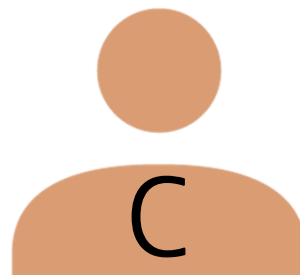
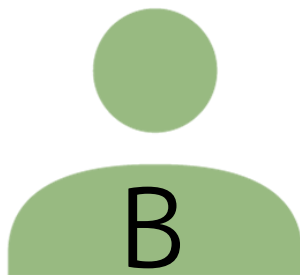
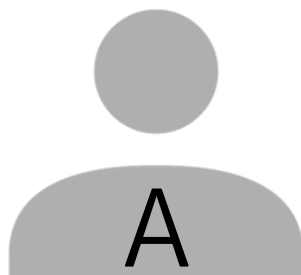
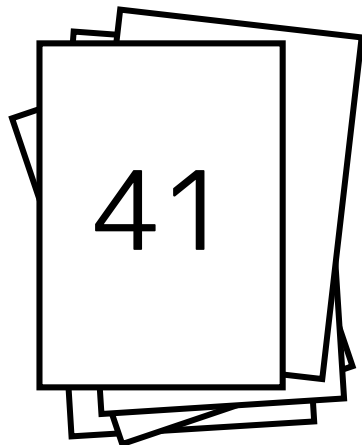
目標：カードを小さい順に出す



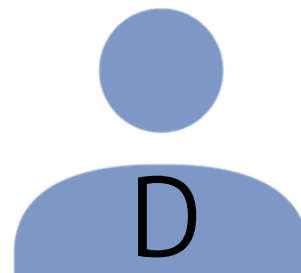
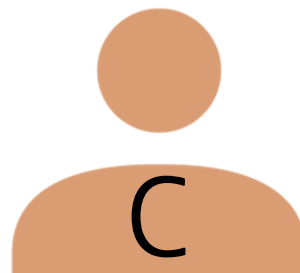
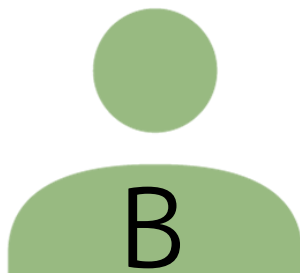
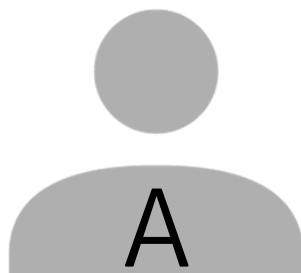
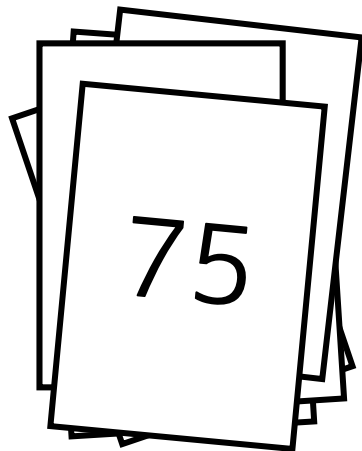
目標：カードを小さい順に出す



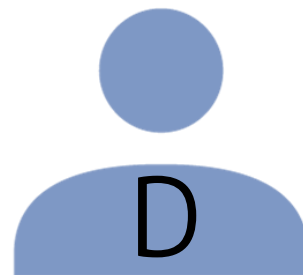
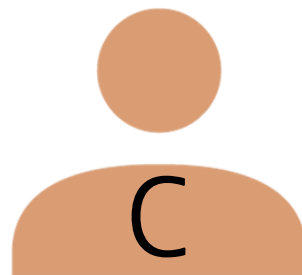
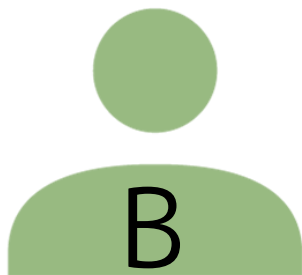
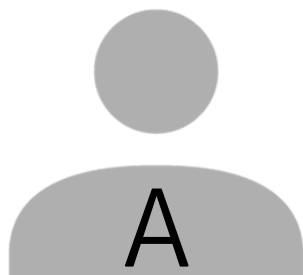
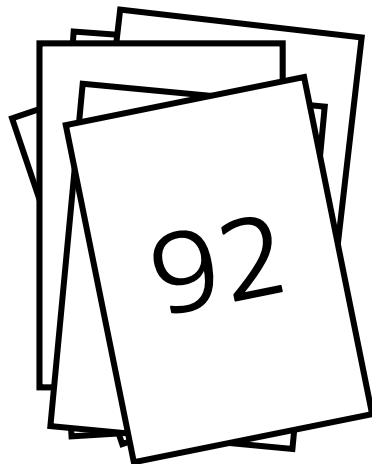
目標：カードを小さい順に出す



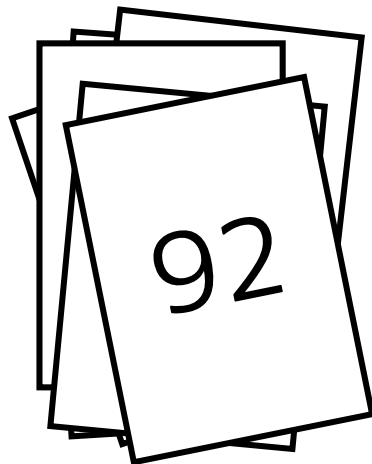
目標：カードを小さい順に出す



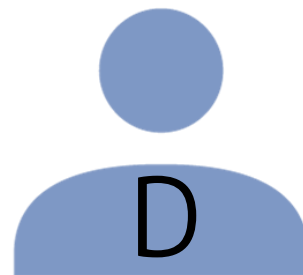
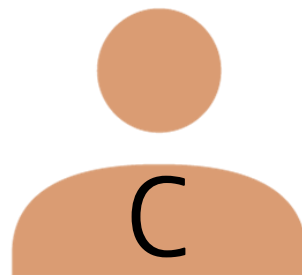
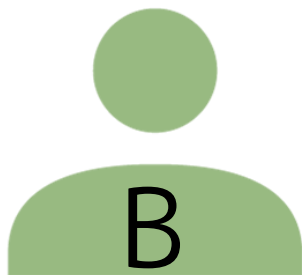
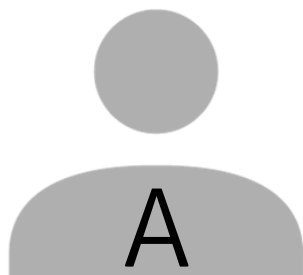
目標：カードを小さい順に出す



目標：カードを小さい順に出す



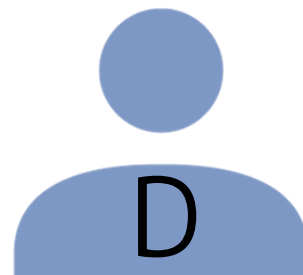
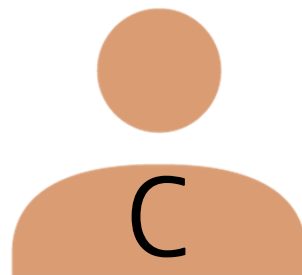
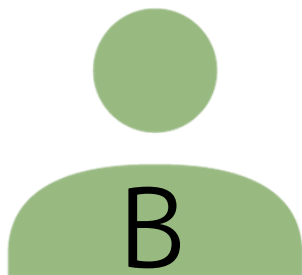
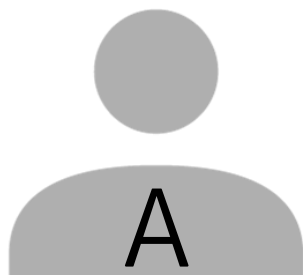
K人全員の勝利



目標：カードを小さい順に出す

≪ ルール ≫

プレイヤーは
コミュニケーションを
してはいけない

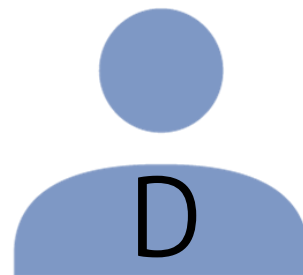
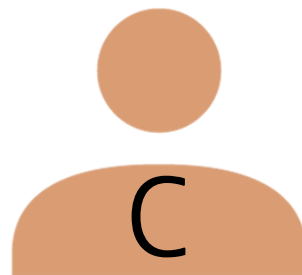
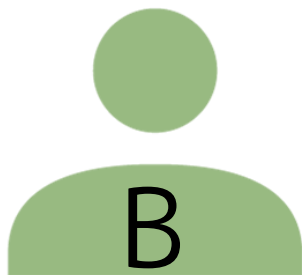
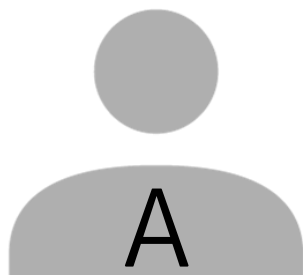


利

なぜ勝利が難しいのか？

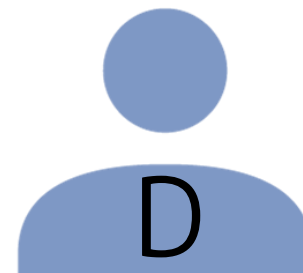
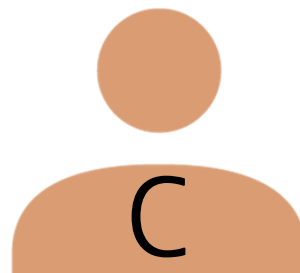
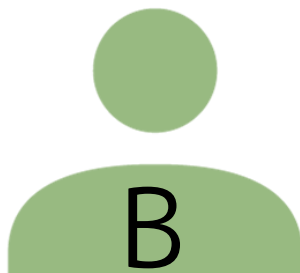
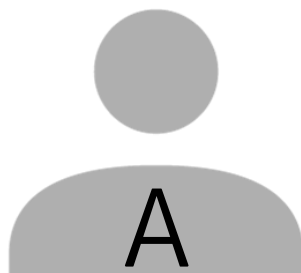
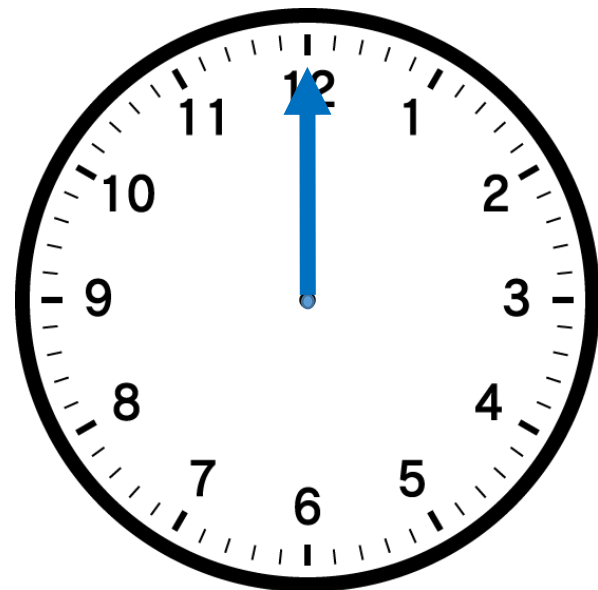
≪ **ルール** ≫

プレイヤーは
コミュニケーションを
してはいけない

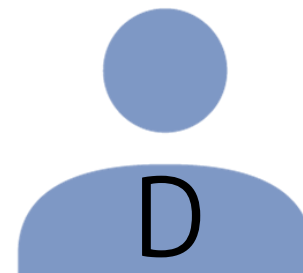
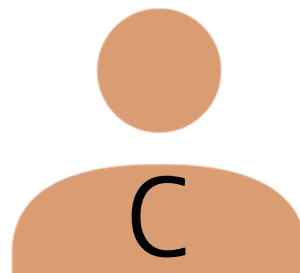
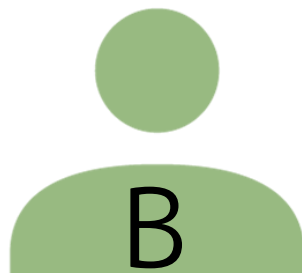
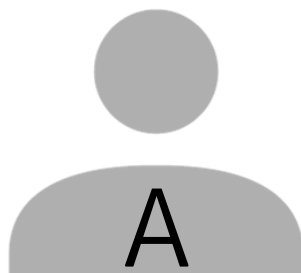
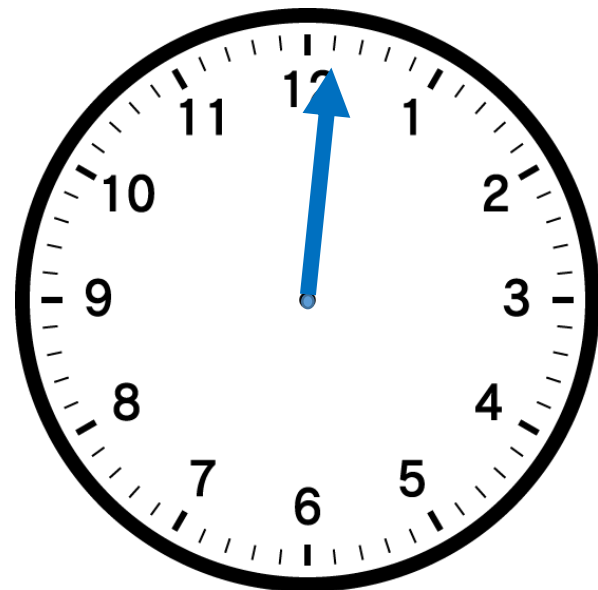


利

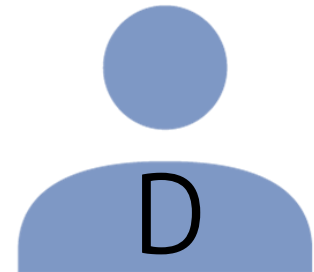
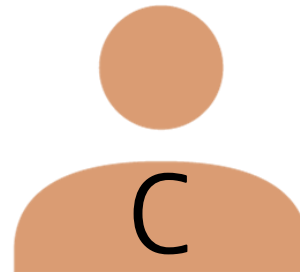
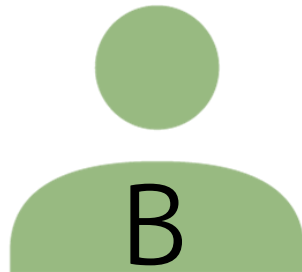
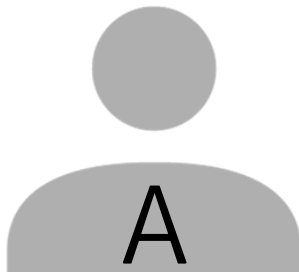
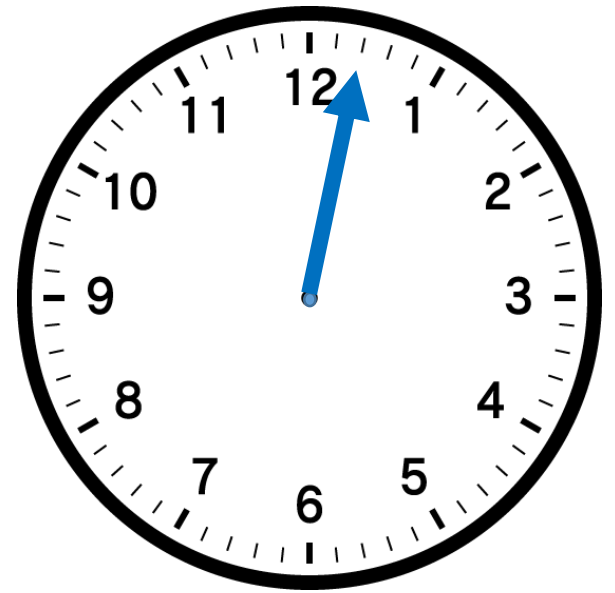
時計が見えていたら...



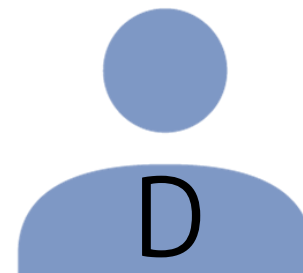
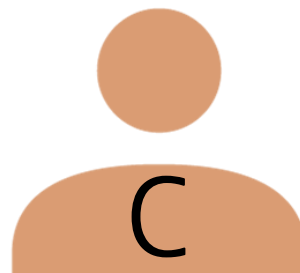
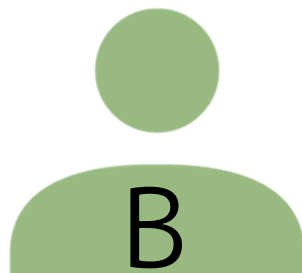
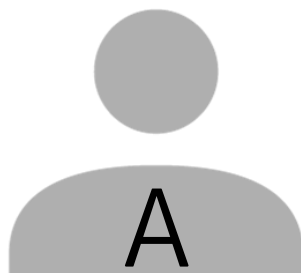
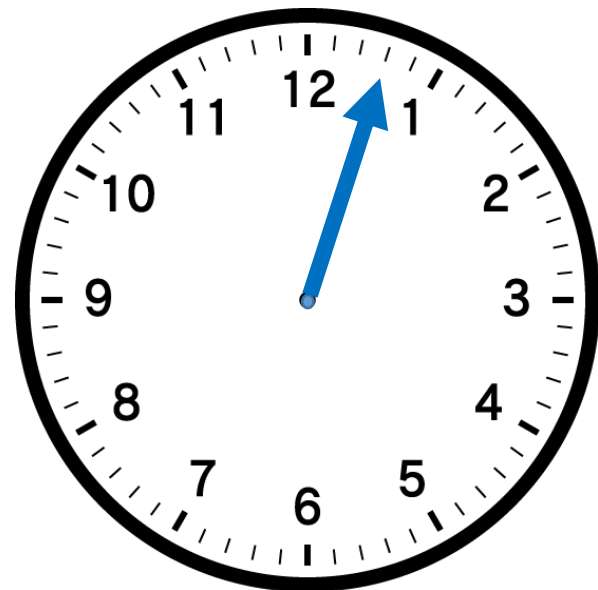
時計が見えていたら...



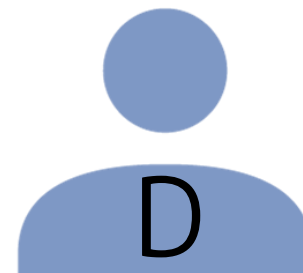
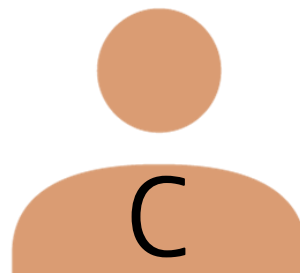
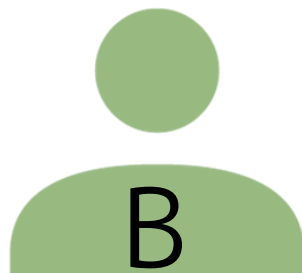
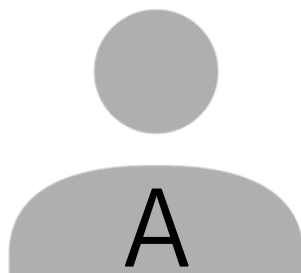
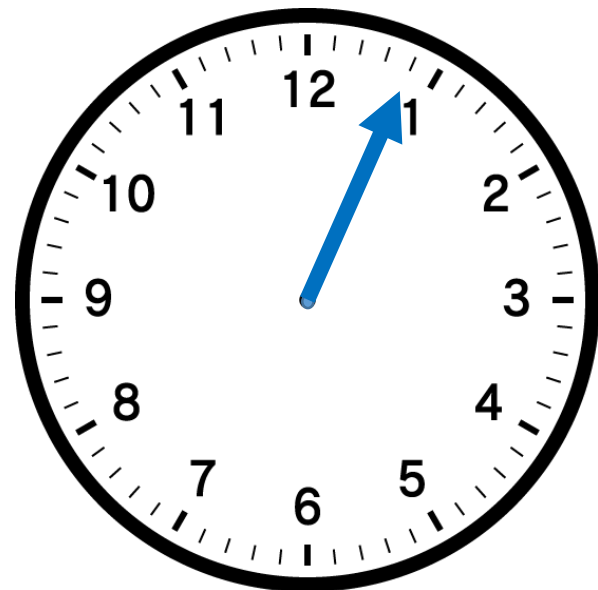
時計が見えていたら...



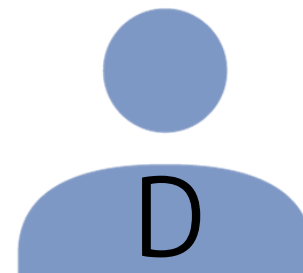
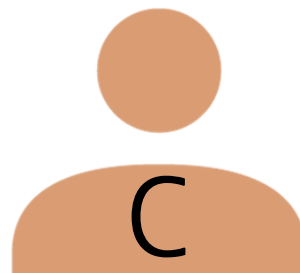
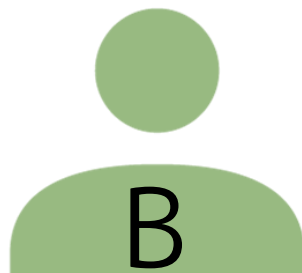
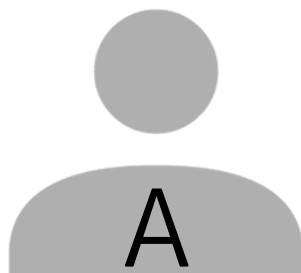
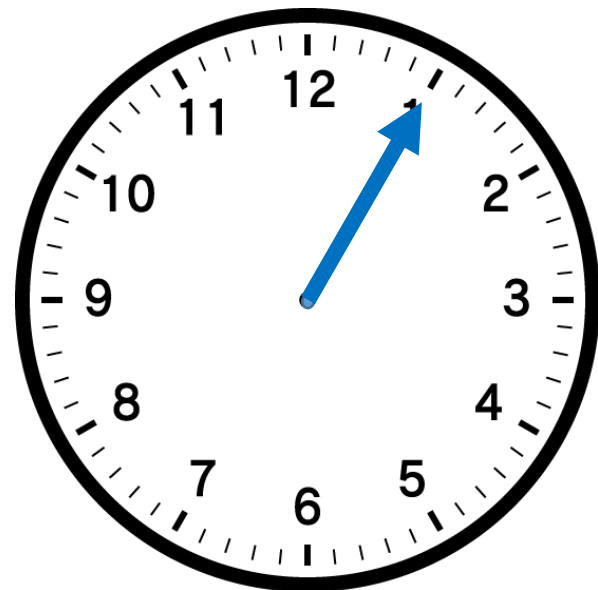
時計が見えていたら...



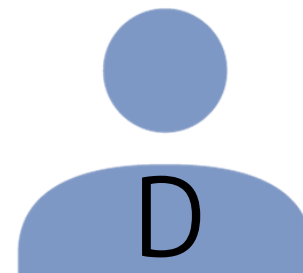
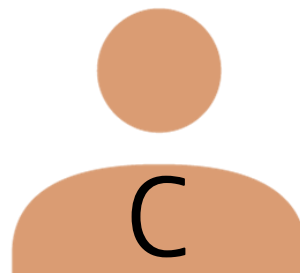
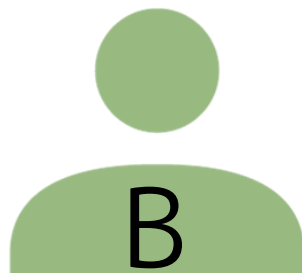
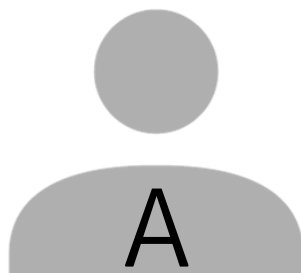
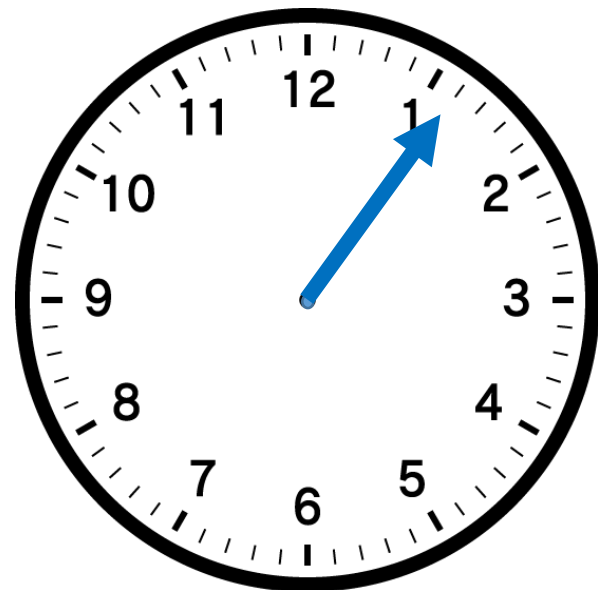
時計が見えていたら...



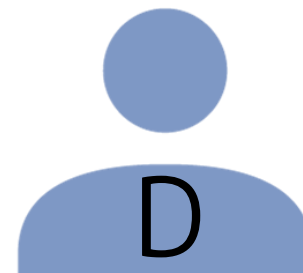
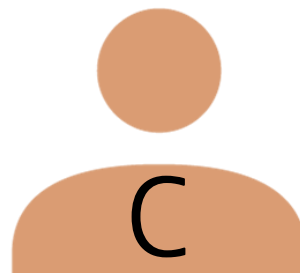
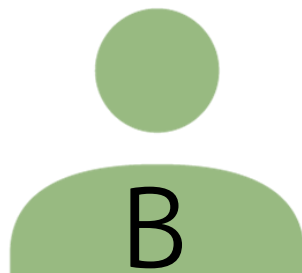
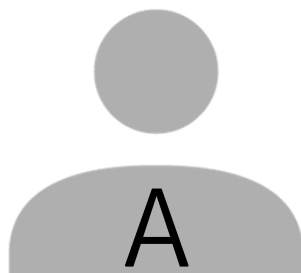
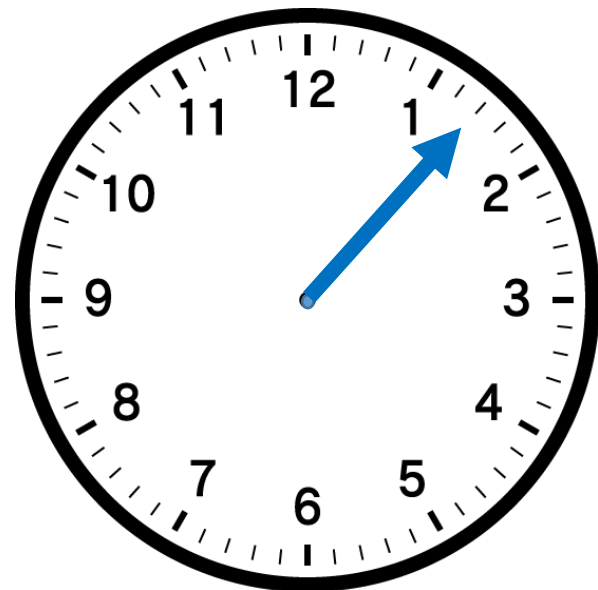
時計が見えていたら...



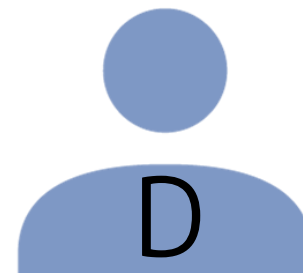
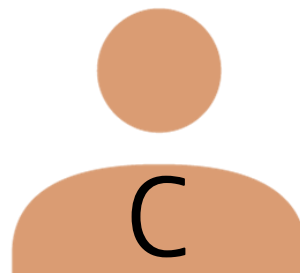
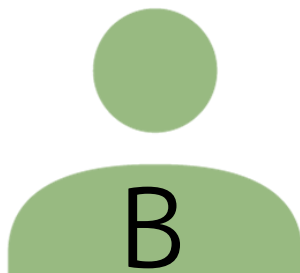
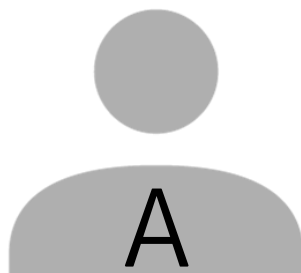
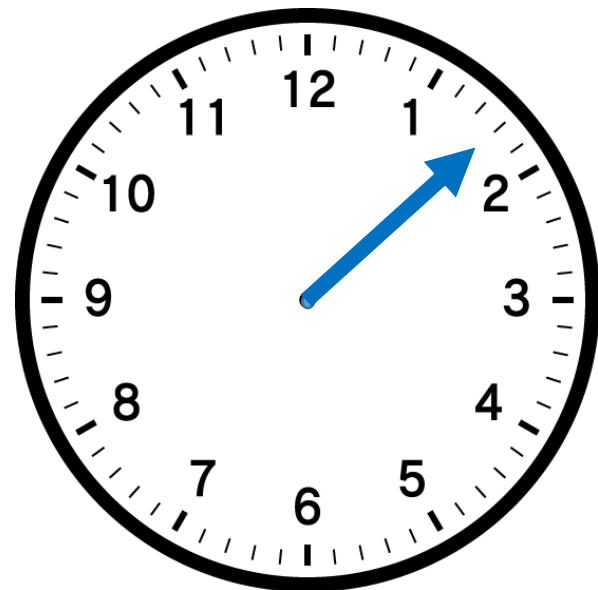
時計が見えていたら...



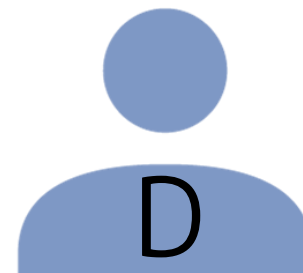
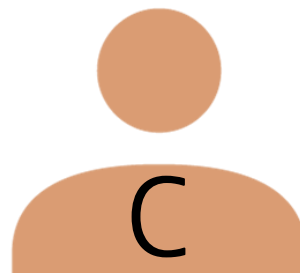
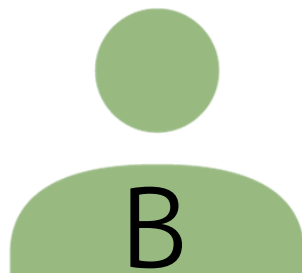
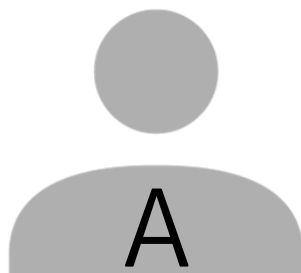
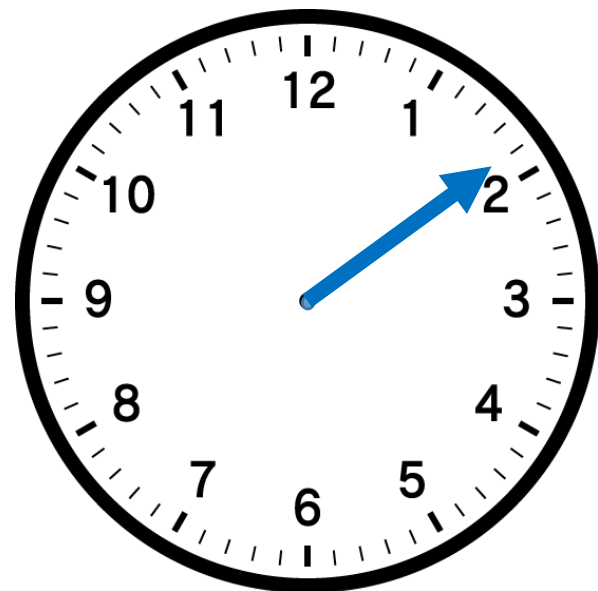
時計が見えていたら...



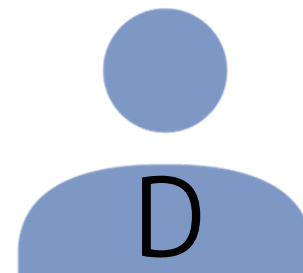
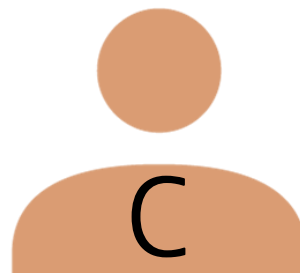
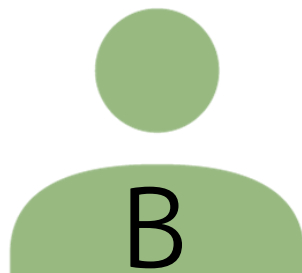
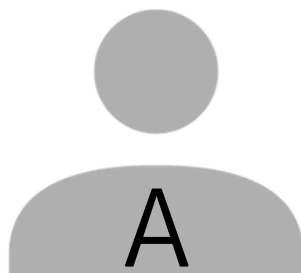
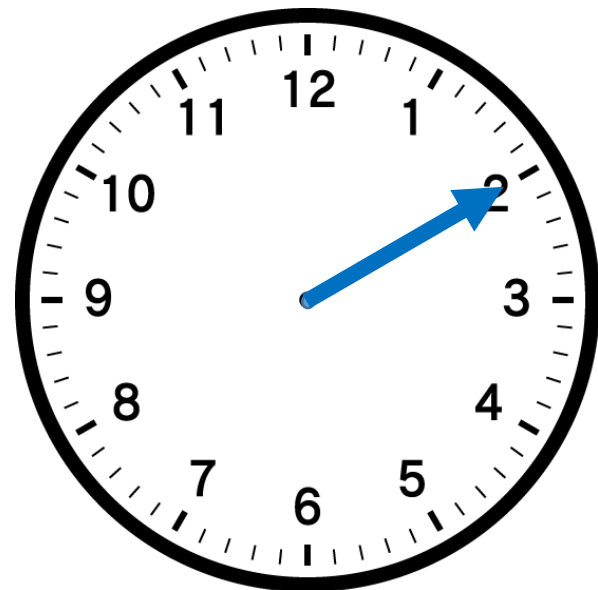
時計が見えていたら...



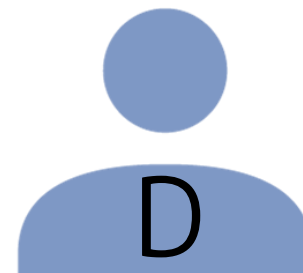
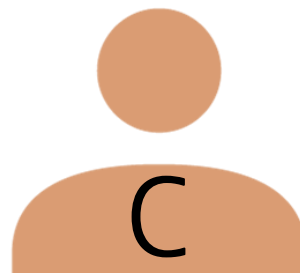
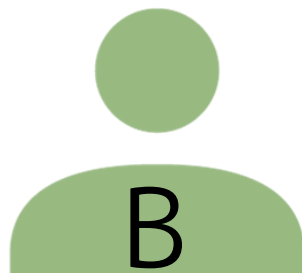
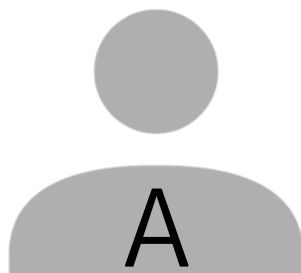
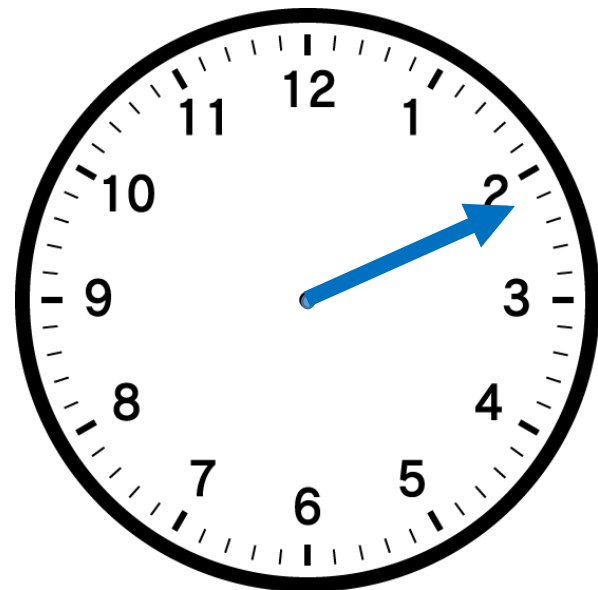
時計が見えていたら...



時計が見えていたら...

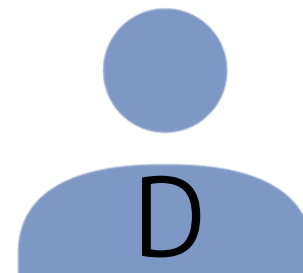
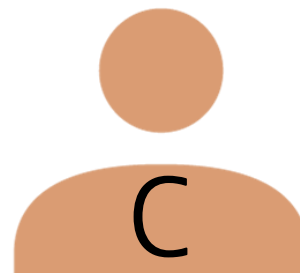
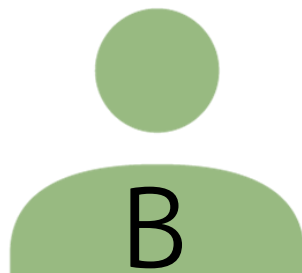
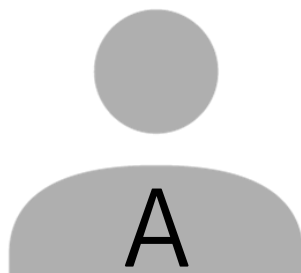
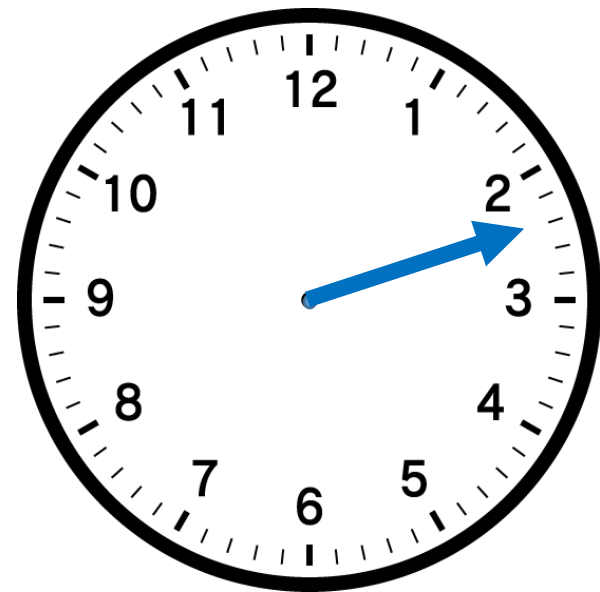


時計が見えていたら...



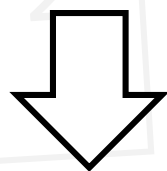
時計が見えていたら...

12

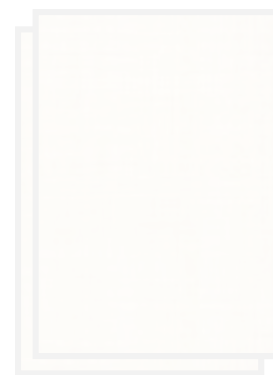
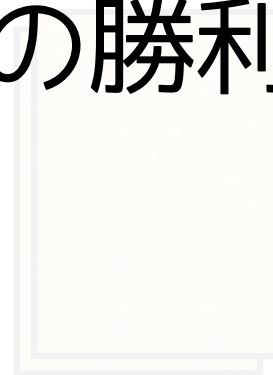
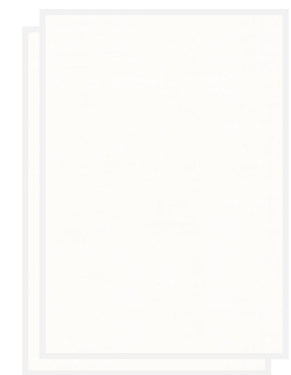


時計が見えていたら...

時刻 t に, カード t を出す

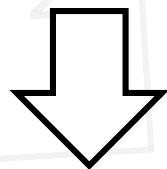


K 人全員の勝利



時計が見えていたら...

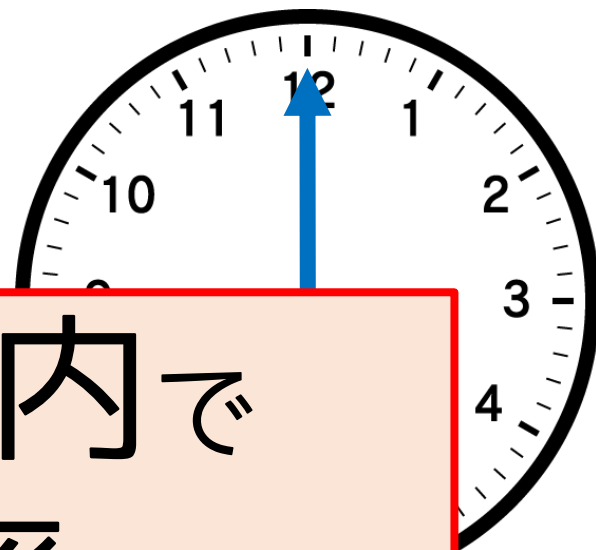
時刻 t に, カード t を出す



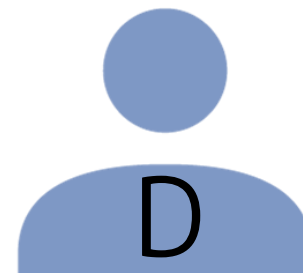
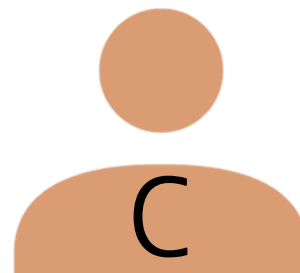
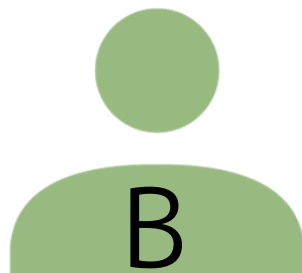
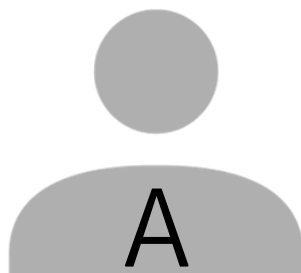
K人全員の勝利

問題点：時間がかかりすぎる

目標



与えられた時間内で
勝利する確率を
最大化したい



与えられた時間内で
勝利する確率を
最大化したい

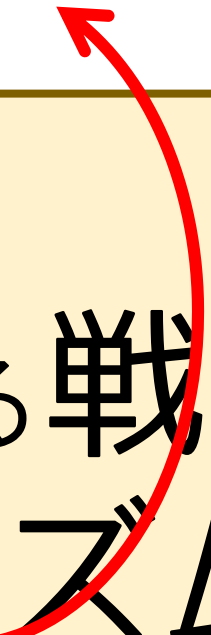
M 枚のカードを K 人のプレイヤーに
一様ランダムに配る

結果

注：正確に計算する

$M=1$ のとき

勝利確率を最大にする戦略を
導出する アルゴリズム



M 枚のカードを K 人のプレイヤーに
一様ランダムに配る

未解決問題

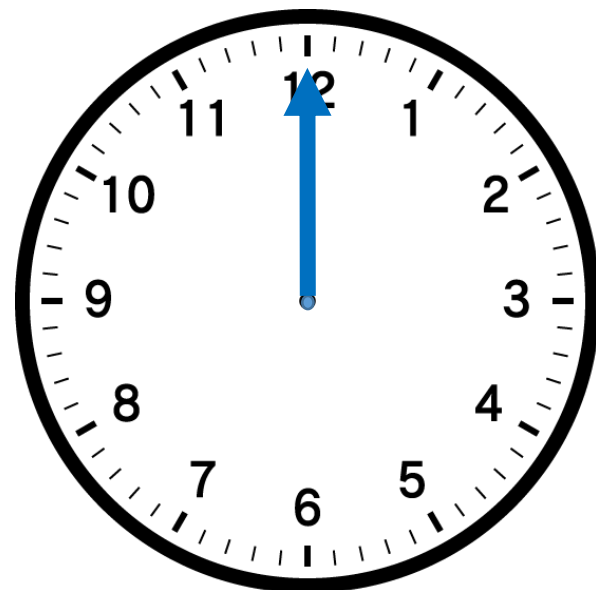
$M \geq 2$ のとき

勝利確率を最大にする戦略を
導出するアルゴリズム

M 枚のカードを K 人のプレイヤーに
一様ランダムに配る

設定

共通の時計
制限時間： T

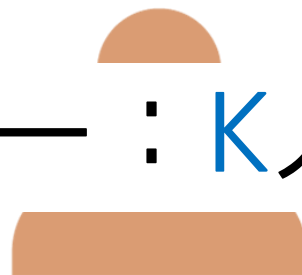


総カード枚数： N 枚

各プレイヤー： 1 枚

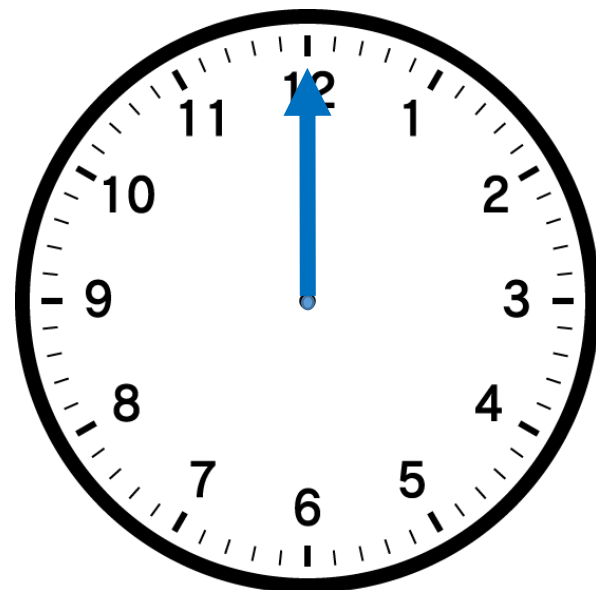


プレイヤー： K 人



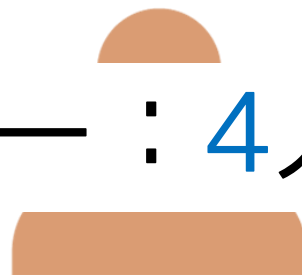
設定

共通の時計
制限時間：50



総カード枚数：100枚

各プレイヤー：1枚



プレイヤー：4人

勝利確率

N=100, T=50

$$3008/3201 = 0.9397$$

N=100, T=50

Kを変化

0

10

20

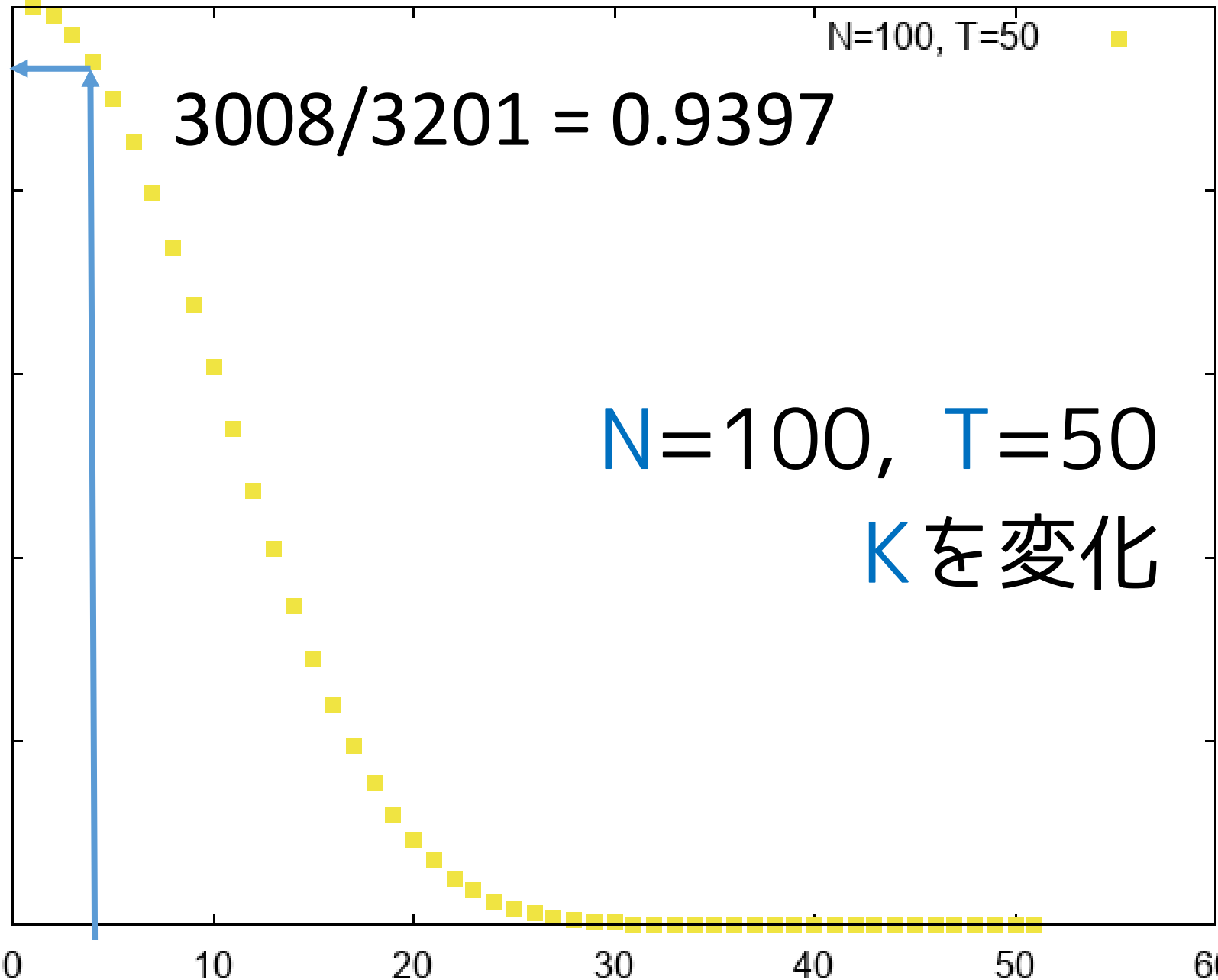
30

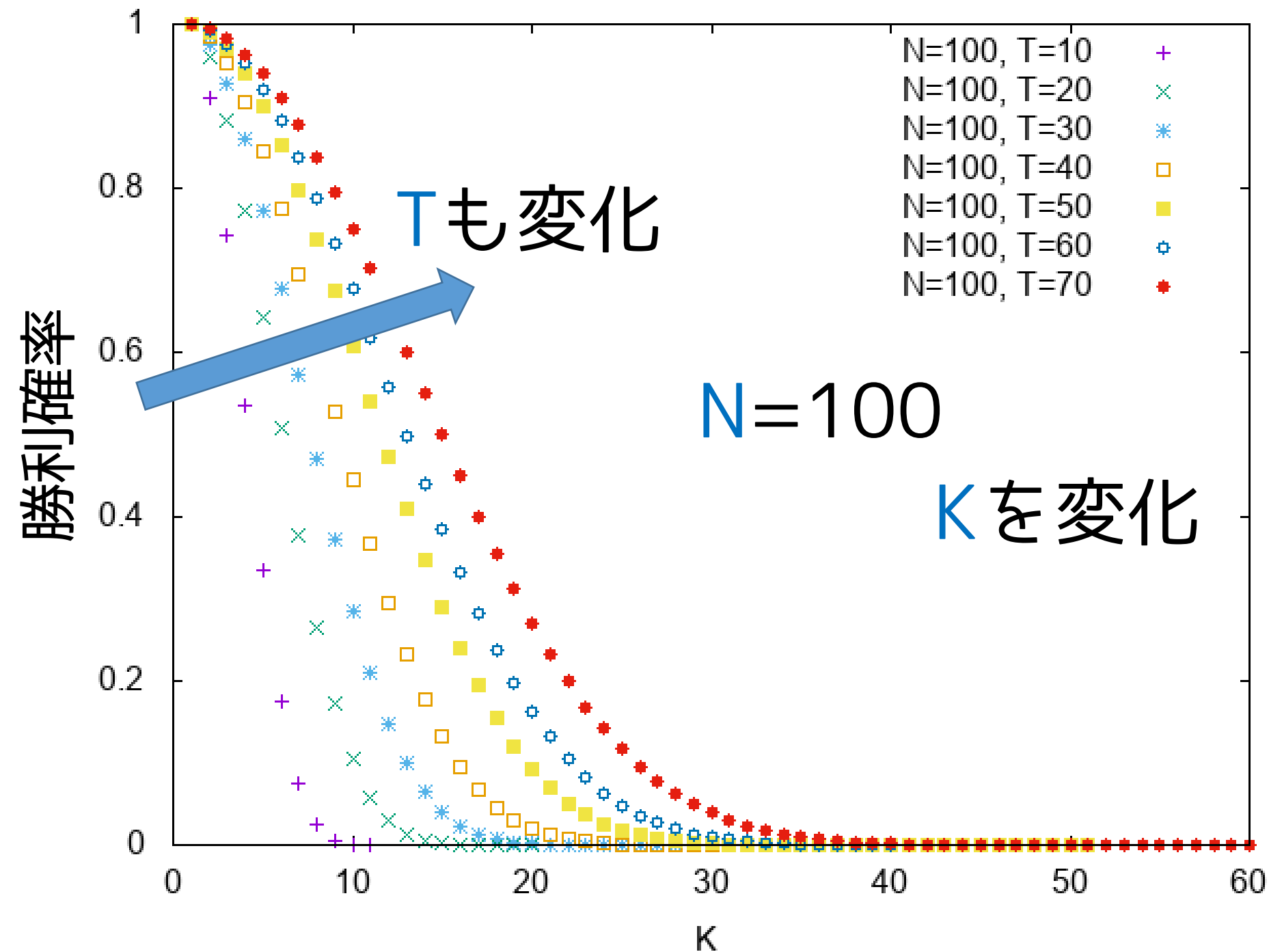
40

50

60

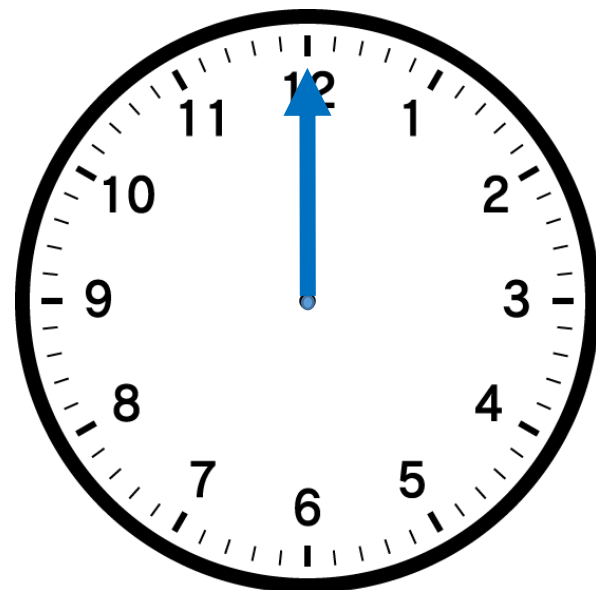
K





設定

共通の時計
制限時間： T

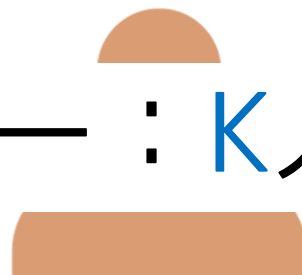


総カード枚数： N 枚

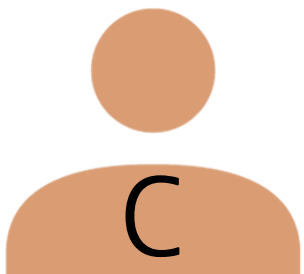
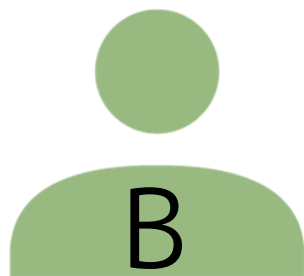
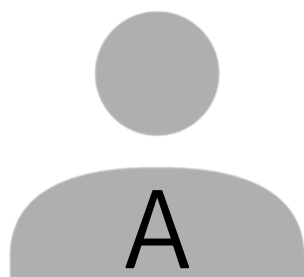
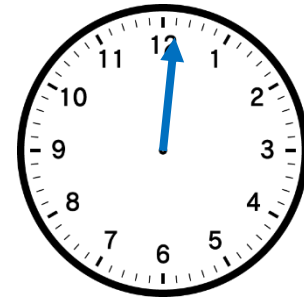
各プレイヤー： 1 枚



プレイヤー： K 人

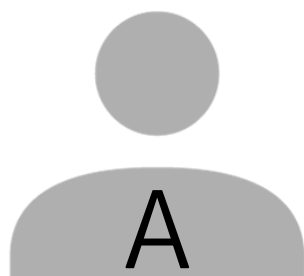
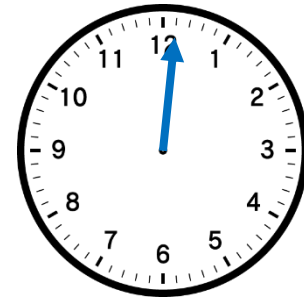


戦略の記述



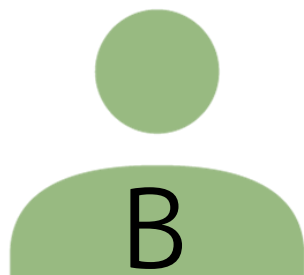
時刻 $t=1$ で
出すカードを
定める

戦略の記述

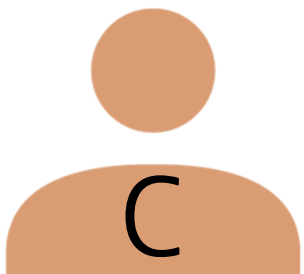


$\{1, 3, 5\}$

時刻 $t=1$ で
出すカードを
定める



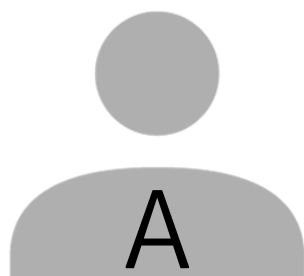
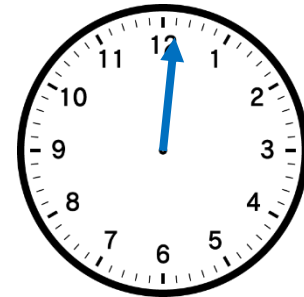
$\{1, 2, 3, 4\}$



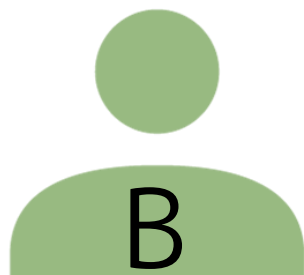
$\{1, 2, 4\}$

1か2か3か4を
持っていたら出す

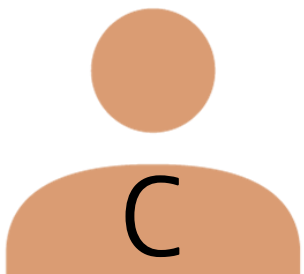
戦略の記述



$\{1, 3, 5\}$



$\{1, 2, 3, 4\}$



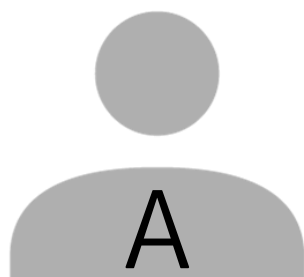
$\{1, 2, 4\}$

時刻 $t=1$ で
出すカードを
定める

戦略の記述



補題1



$\{1, 3, 5\}$ より
 $\{1, 2, 3\}$ の方がよい



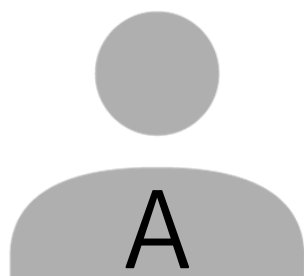
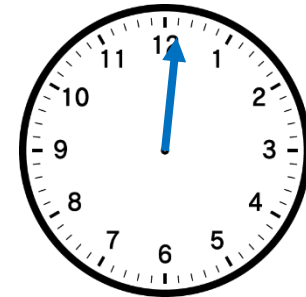
$\{1, 2, 3, 4\}$



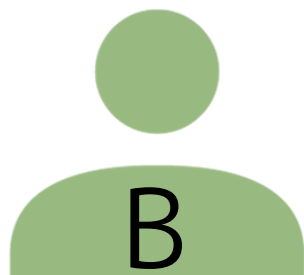
$\{1, 2, 4\}$

時刻 $t=1$ で
出すカードを
定める

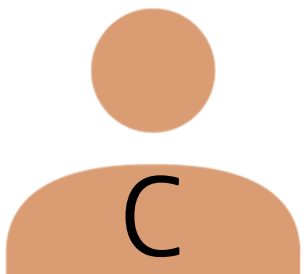
戦略の記述



$\{1, 2, 3\}$



$\{1, 2, 3, 4\}$



$\{1, 2, 4\}$

時刻 $t=1$ で
出すカードを
定める

戦略の記述



$\{1, 2, 3\}$

時刻 $t=1$ で
出すカードを
定める

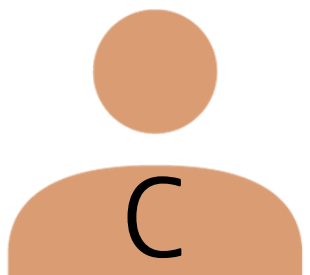


$\{1, 2, 3, 4\}$

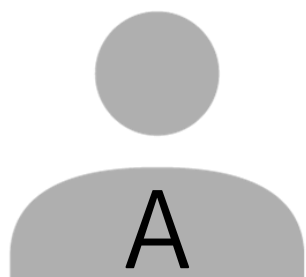
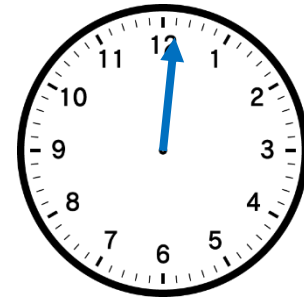
補題1

$\{1, 2, 3\}$ の方が

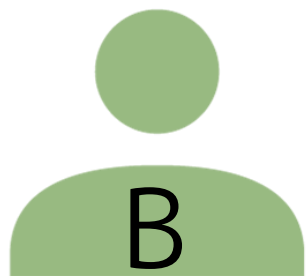
$\{1, 2, 4\}$ よりよい



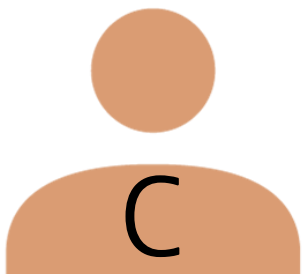
戦略の記述



$\{1, 2, 3\}$



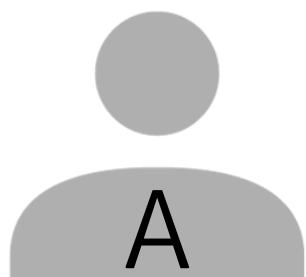
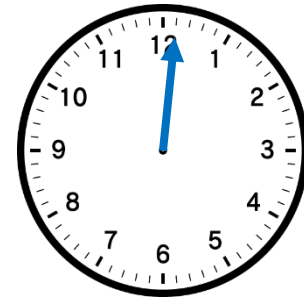
$\{1, 2, 3, 4\}$



$\{1, 2, 3\}$

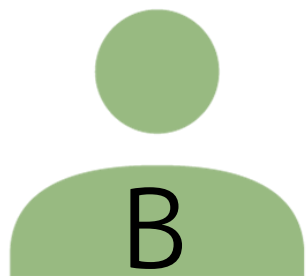
時刻 $t=1$ で
出すカードを
定める

戦略の記述



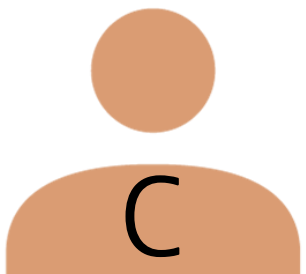
$\{1, 2, 3\}$

時刻 $t=1$ で
出すカードを
定める



$\{1, 2, 3, 4\}$

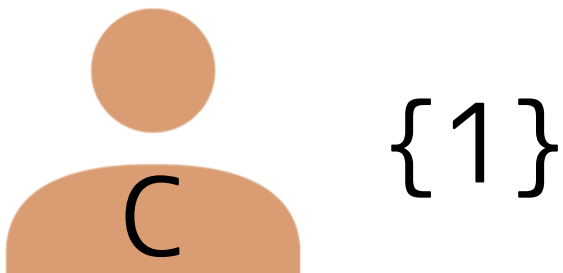
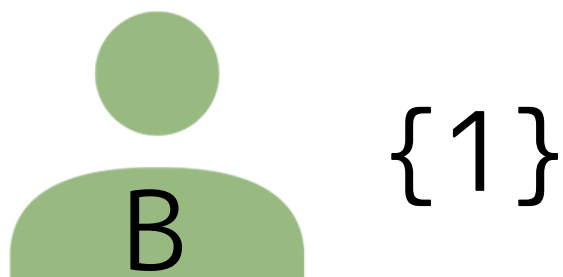
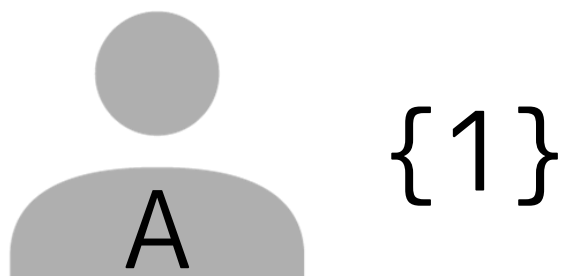
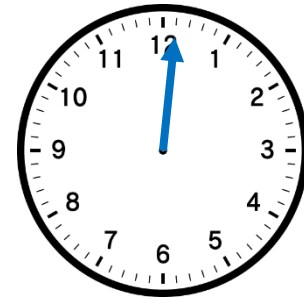
補題2



$\{1, 2, 3\}$

バラバラより
揃ってる方が
よい

戦略の記述

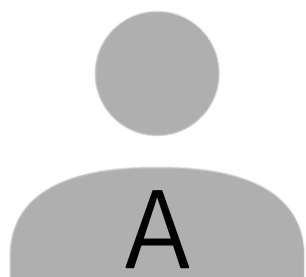
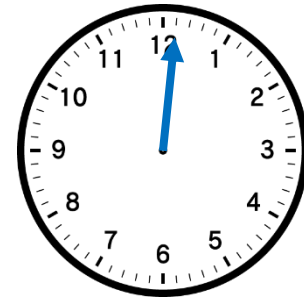


時刻 $t=1$ で
出すカードを
定める

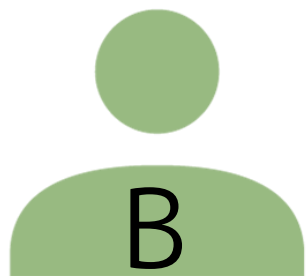
補題2

バラバラより
揃ってる方が
よい

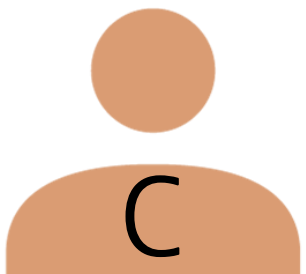
戦略の記述



$\{1, 2\}$



$\{1, 2\}$



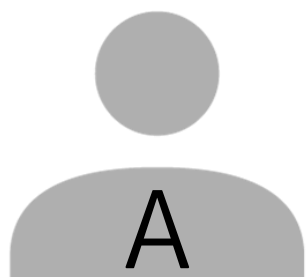
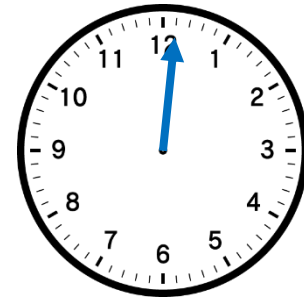
$\{1, 2\}$

時刻 $t=1$ で
出すカードを
定める

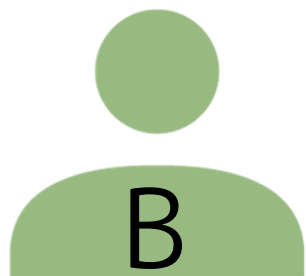
補題2

バラバラより
揃ってる方が
よい

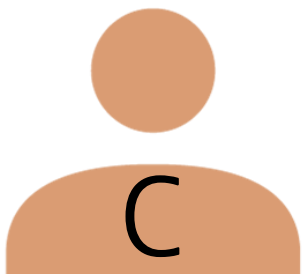
戦略の記述



$\{1, 2, 3\}$



$\{1, 2, 3\}$



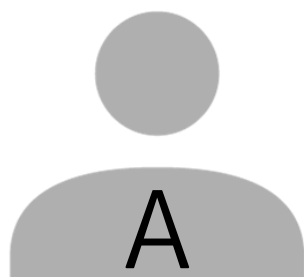
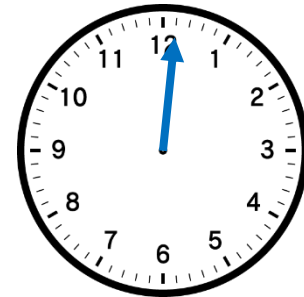
$\{1, 2, 3\}$

時刻 $t=1$ で
出すカードを
定める

補題2

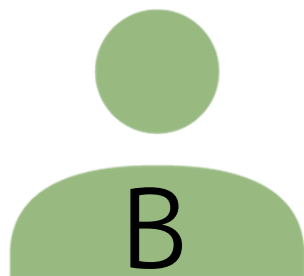
バラバラより
揃ってる方が
よい

戦略の記述



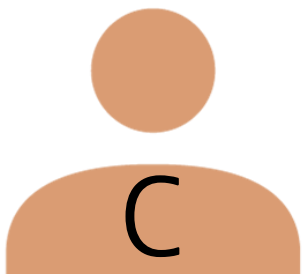
{1, 2, 3, 4}

時刻 $t=1$ で
出すカードを
定める



{1, 2, 3, 4}

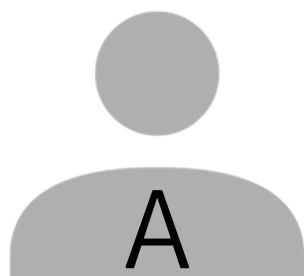
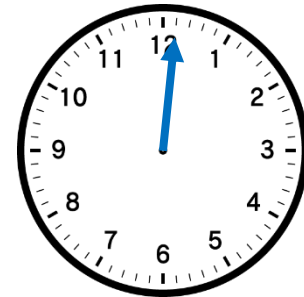
補題2



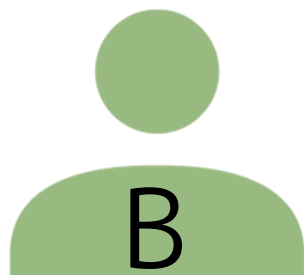
{1, 2, 3, 4}

バラバラより
揃ってる方が
よい

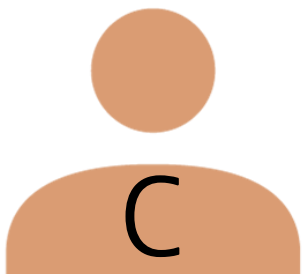
戦略の記述



{1, 2, 3, 4, 5} 時刻 $t=1$ で
出すカードを
定める

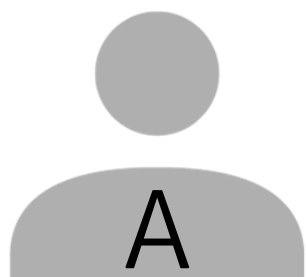
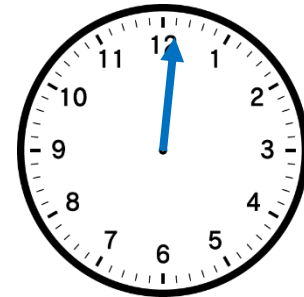


{1, 2, 3, 4, 5} 補題2

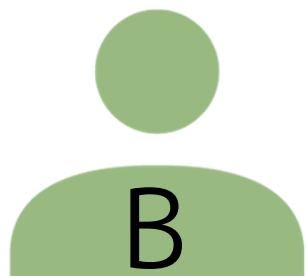


{1, 2, 3, 4, 5} バラバラより
揃ってる方が
よい

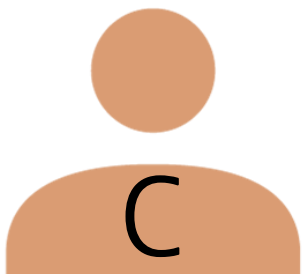
戦略の記述



{1, 2, 3}



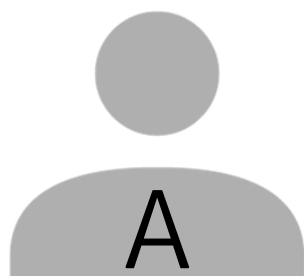
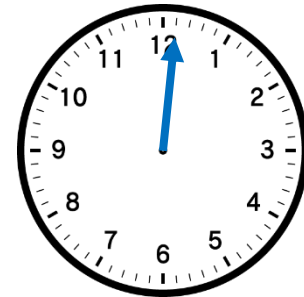
{1, 2, 3}



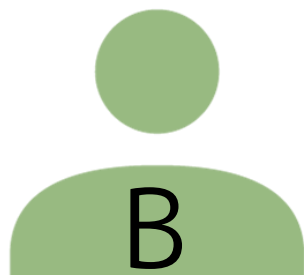
{1, 2, 3}

時刻 $t=1$ で
出すカードを
定める

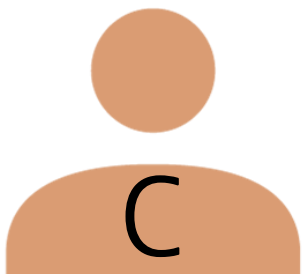
場合分け



{1, 2, 3}



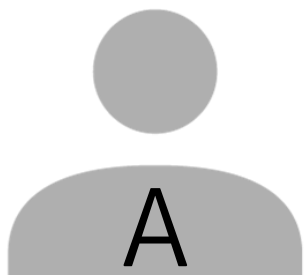
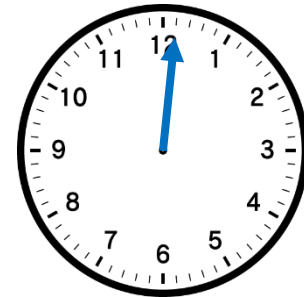
{1, 2, 3}



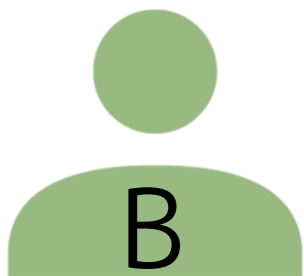
{1, 2, 3}

時刻 $t=1$ で
出すカードを
定める

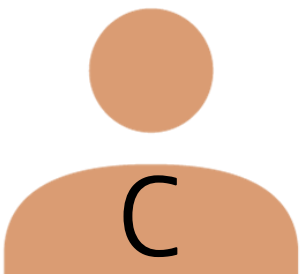
(1) $t=1$ で 2人以上出す



{1, 2, 3}

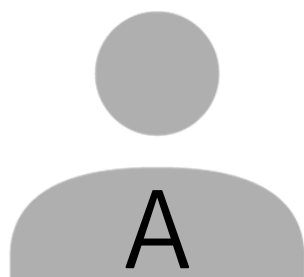
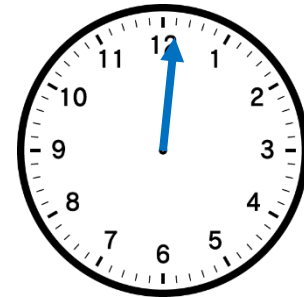


{1, 2, 3}

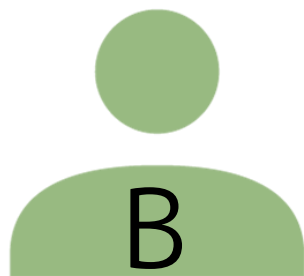
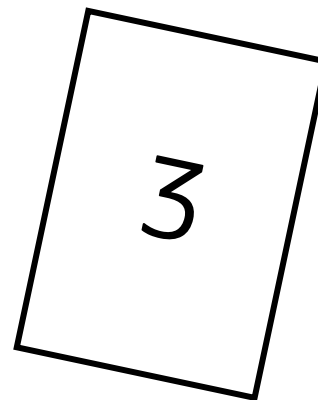


{1, 2, 3}

(1) $t=1$ で 2人以上出す

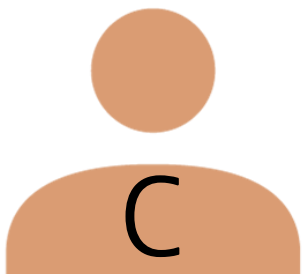


$\{1, 2, 3\}$

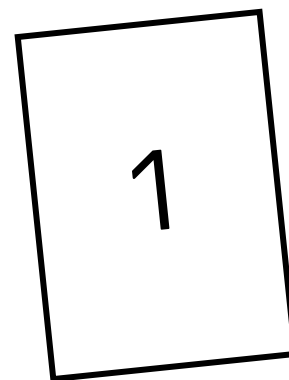


$\{1, 2, 3\}$

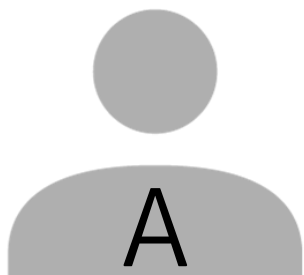
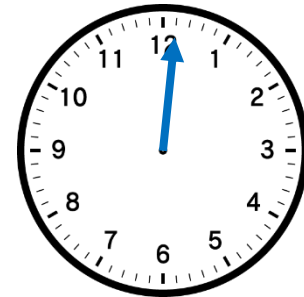
K 人全員の敗北



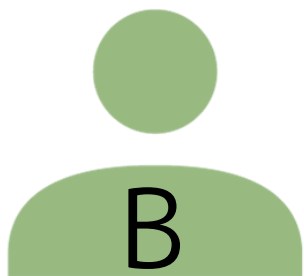
$\{1, 2, 3\}$



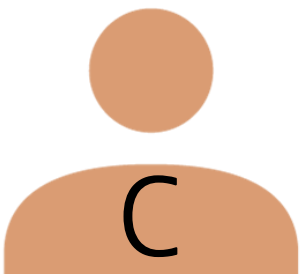
(2) $t=1$ で 1人だけ出す



$\{1, 2, 3\}$

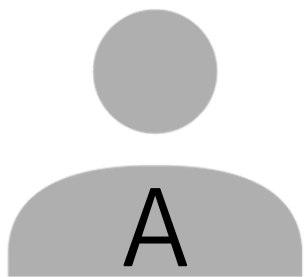
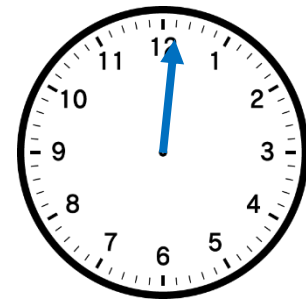


$\{1, 2, 3\}$

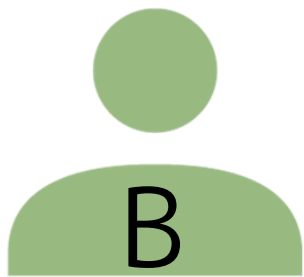


$\{1, 2, 3\}$

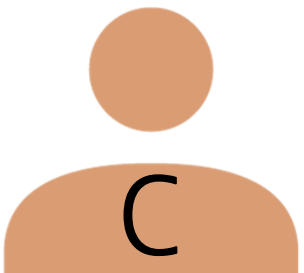
(2) $t=1$ で 1人だけ出す



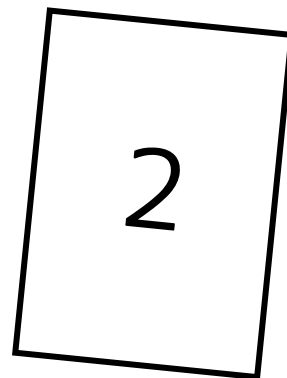
$\{1, 2, 3\}$



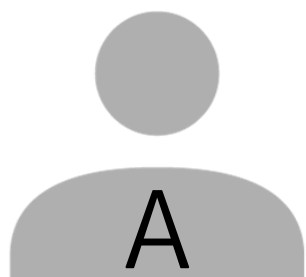
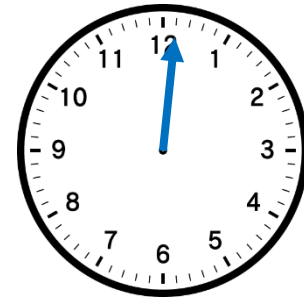
$\{1, 2, 3\}$



$\{1, 2, 3\}$

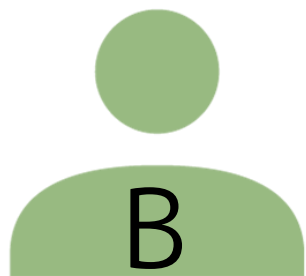


(2) $t=1$ で 1人だけ出す



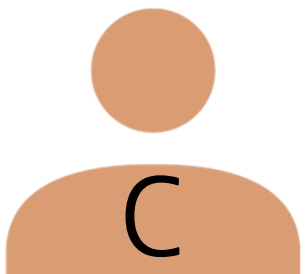
$\{1, 2, 3\}$

残りのカードは
 $4 \sim N$

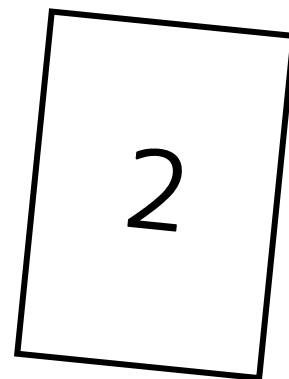


$\{1, 2, 3\}$

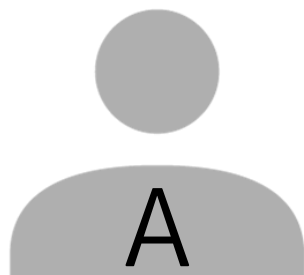
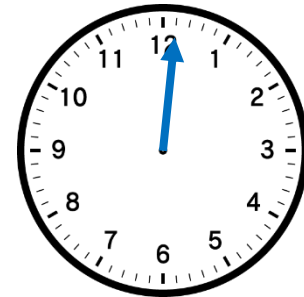
残り時間は $T-1$



$\{1, 2, 3\}$

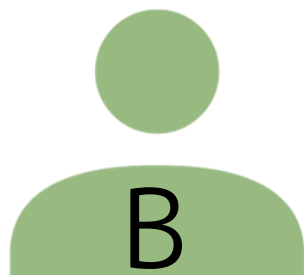


(2) $t=1$ で 1人だけ出す



$\{1, 2, 3\}$

残りのカードは
 $4 \sim N$

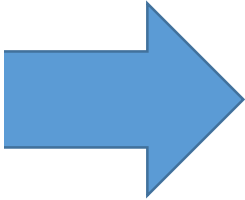


$\{1, 2, 3\}$

残り時間は $T-1$

残りプレイヤー
 $K-1$ 人

(2) $t=1$ で 1人だけ出す

$t=1$  問題の
パラメータ
が変化  $t=2$

N 枚

K 人

T 秒

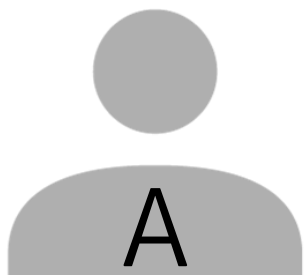
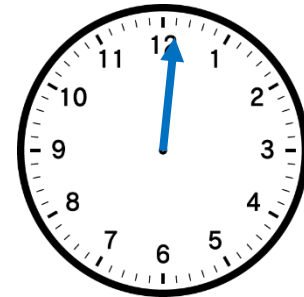
$N-3$ 枚

$K-1$ 人

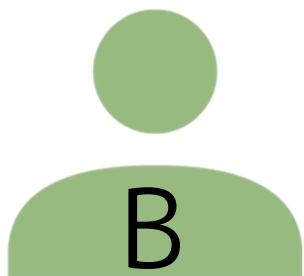
$T-1$ 秒

再帰！

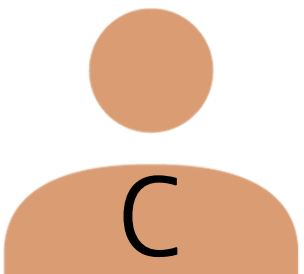
(3) $t=1$ で 誰も出さない



$\{1, 2, 3\}$

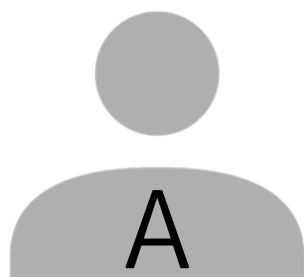
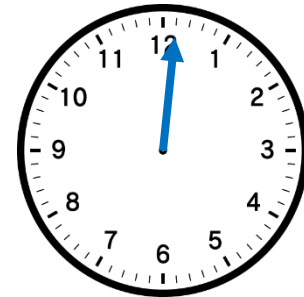


$\{1, 2, 3\}$



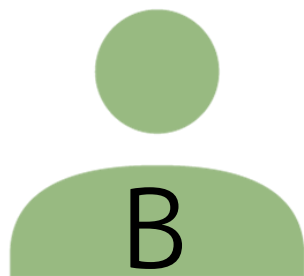
$\{1, 2, 3\}$

(3) $t=1$ で 誰も出さない



$\{1, 2, 3\}$

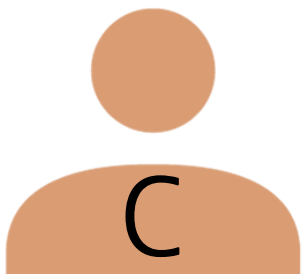
残りのカードは
 $4 \sim N$



$\{1, 2, 3\}$

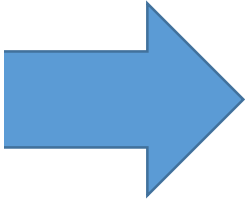
残り時間は $T-1$

残りプレイヤー
 K 人



$\{1, 2, 3\}$

(3) $t=1$ で 誰も出さない

問題の
 $t=1$  パラメータ
が変化  $t=2$

N 枚

K 人

T 秒

$N-3$ 枚

K 人

$T-1$ 秒

再帰！

N 枚
K 人
T 秒

最大勝利確率 $p(N, K, T)$

N 枚
K 人
T 秒

最大勝利確率 $p(N, K, T)$

戦略を定める

$p(N, K, T) =$
 $\max\{$

$\text{Pr}(1 \text{ 人だけ出す}) * p(N - N', K - 1, T - 1) +$
 $\text{Pr}(\text{誰も出さない}) * p(N - N', K, T - 1) \mid$

$N' \in \{1, \dots, N\}$

$\}$

N 枚
K 人
T 秒

最大勝利確率 $p(N, K, T)$

直接計算できる

$p(N, K, T) =$

$\max\{$

$\Pr(1 \text{ 人だけ出す}) * p(N - N', K - 1, T - 1) +$

$\Pr(\text{誰も出さない}) * p(N - N', K, T - 1) \mid$

$N' \in \{1, \dots, N\}$

$\}$

N 枚

K 人

T 秒

計算時間： $O(N^2KT)$

$p(N, K, T) =$

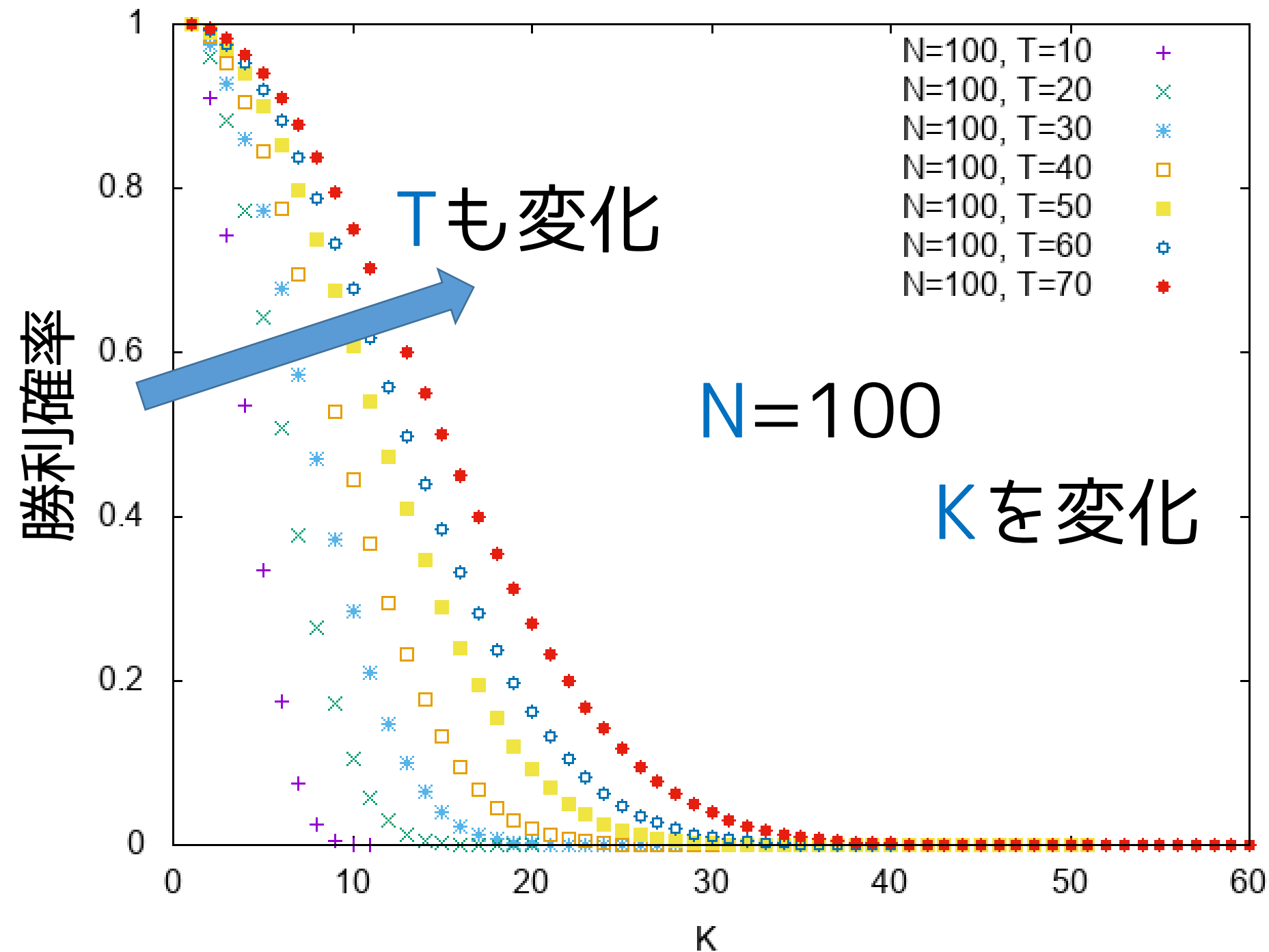
$\max\{$

$\text{Pr}(1 \text{ 人だけ出す}) * p(N - N', K - 1, T - 1) +$

$\text{Pr}(\text{誰も出さない}) * p(N - N', K, T - 1) \mid$

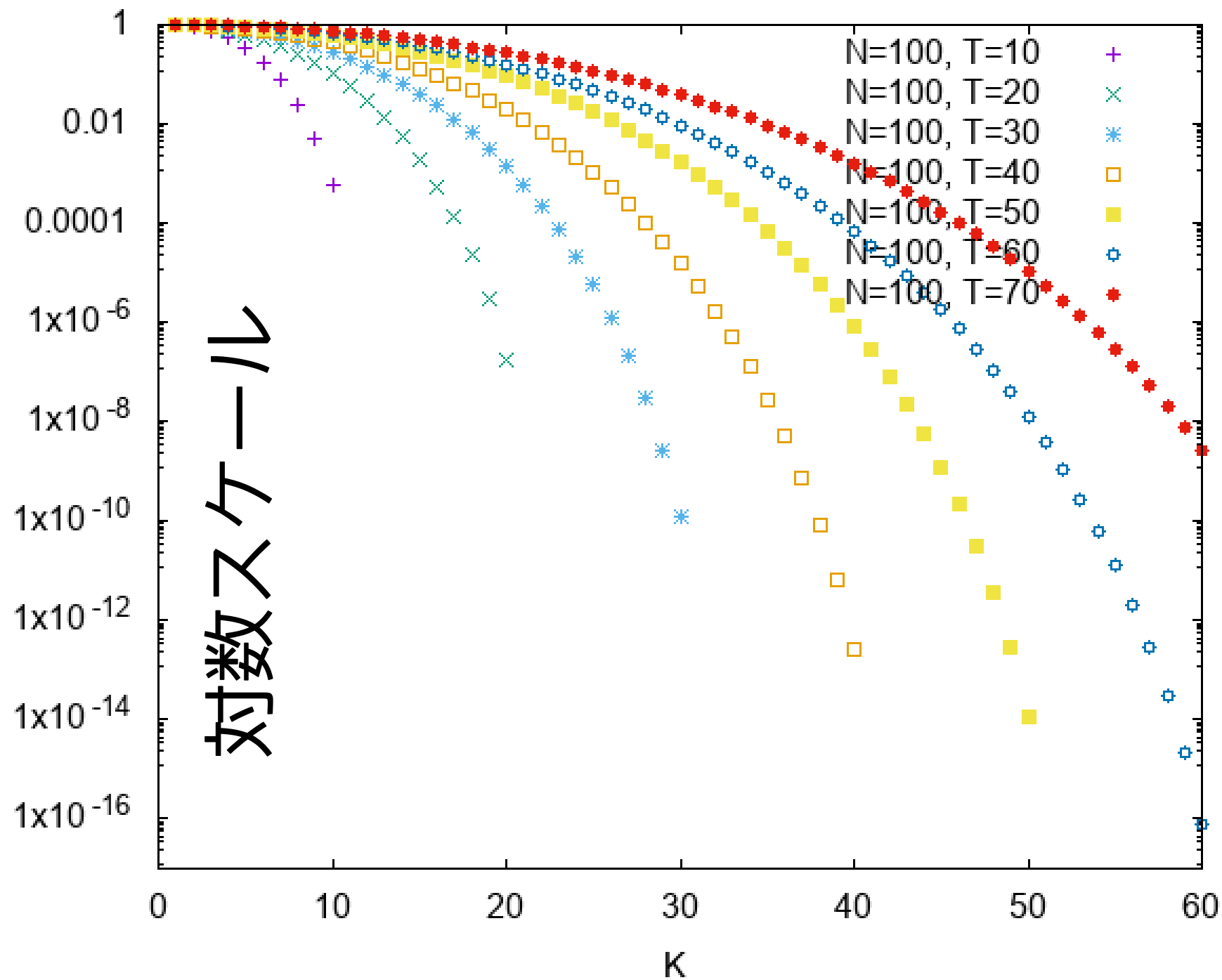
$N' \in \{1, \dots, N\}$

$\}$



勝利確率

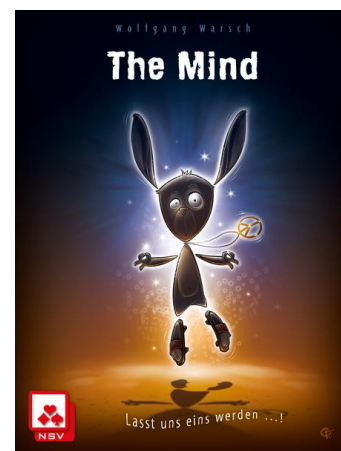
対数スケール



まとめ — *The Mind* の数学

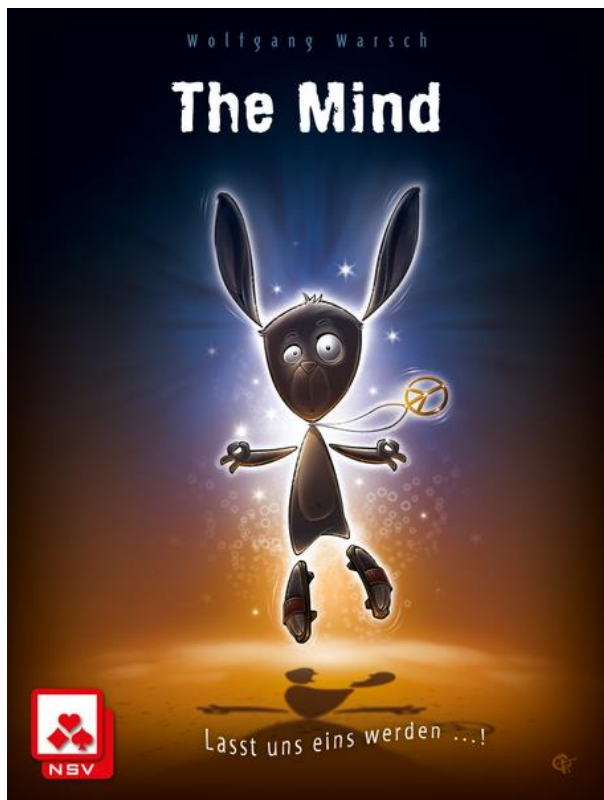
設定：共通の時計，制限時間あり，
各プレイヤーに1枚

結果：最大勝利確率の
計算アルゴリズム



未解決：各プレイヤーに2枚？
共通の時計がないとき？

Mind *the Mind* with Synchronous Clocks



堀山	貴史	埼玉大
栗田	和宏	北大
岡本	吉央	電通大
内澤	啓	山形大
上原	隆平	JAIST

$t=1$ における

プレイヤー i の戦略: $S(i) \subseteq N$

補題1

勝利確率を最大化する戦略では,
各 i に対して ある n_i が存在して,
 $S(i) = \{1, 2, \dots, n_i\}$

$t=1$ における
プレイヤー i の戦略: $S(i) \subseteq N$

補題2

勝利確率を最大化する戦略では,
ある $S \subseteq N$ が存在して,
各 i に対して $S(i) = S$

N 枚

K 人

T 秒

戦略： $\{1, 2, \dots, N'\}$

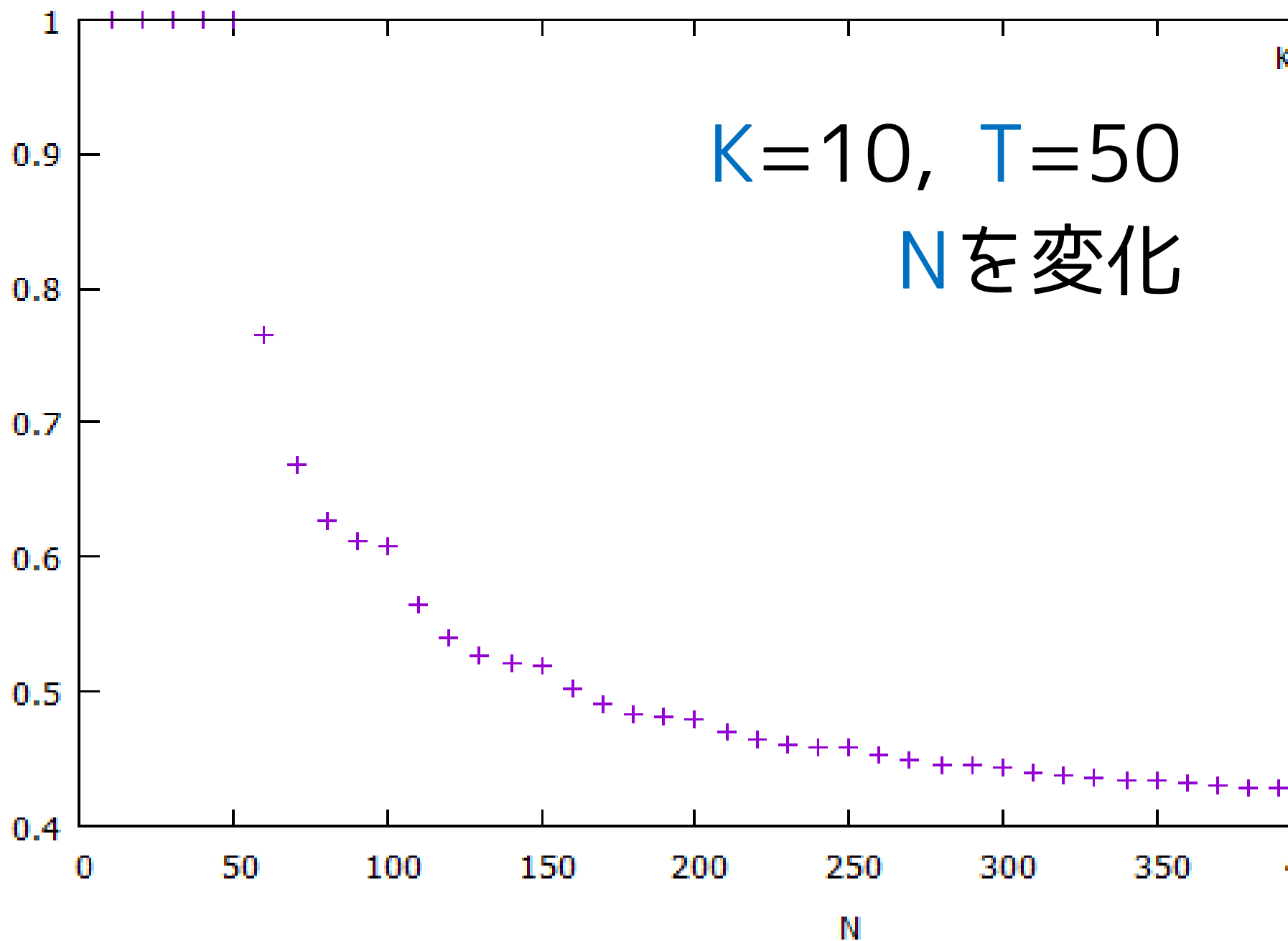
$$\Pr(\text{1人だけ出す}) = \frac{KN'(N-N')!(N-K)!}{N!(N-N'-K+1)!}$$

$$\Pr(\text{誰も出さない}) = \frac{(N-N')!(N-K)!}{N!(N-N'-K)!}$$

勝利確率

$K=10, T=50$

N を变化



勝利確率

