平行もしくはジグザグ斜め山谷付き折り目による紙帯の平坦折り

電気通信大学 情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻
伊藤・Belmonte研究室
戸村瑞穂（M1）

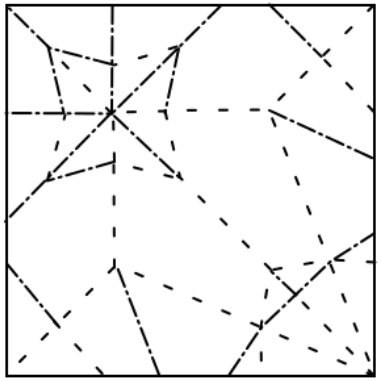
伊藤大雄教授（電通大），奈良知惠客員教授(明大),
白濱和泉(ecbeing)との共同研究

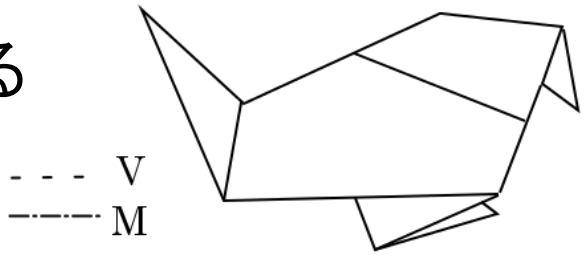
はじめに

平坦折り可能性問題

有限平面よりなる紙とその上に書かれた折り線の集合が与えられたとき，各折り線に指定されたラベルに沿って，全ての折り線を同時に平坦に折ることができるか.

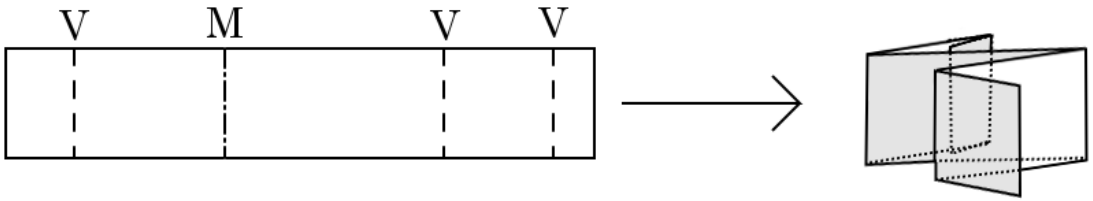
- 一般にNP完全[Bern & Hayes，1996]
  →多項式時間でとける部分問題もある





はじめに

- 細長い長方形(紙帯)に限定
  すべての折り線が互いに平行で長軸方向に垂直
  （一次元山谷付き平坦折り問題）　[Arkin et al, 2004]

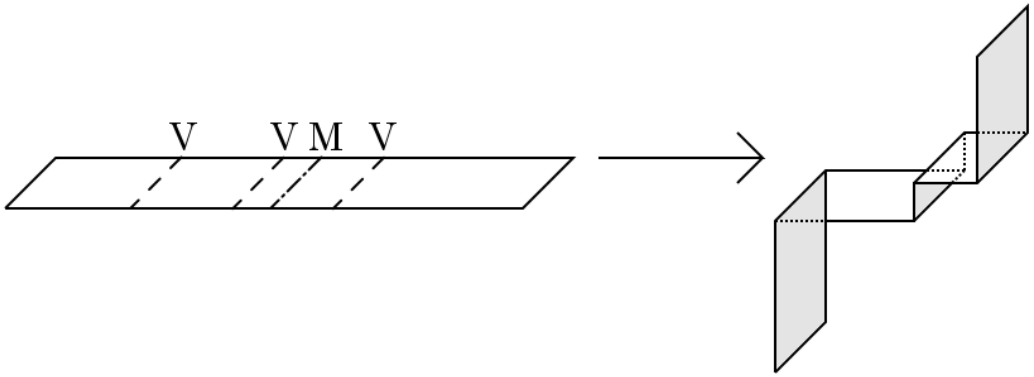


本研究で扱う問題

- 平行斜め山谷付き平坦折り問題
- ジグザグ斜め山谷付き平坦折り問題

平行斜め山谷付き平坦折り問題

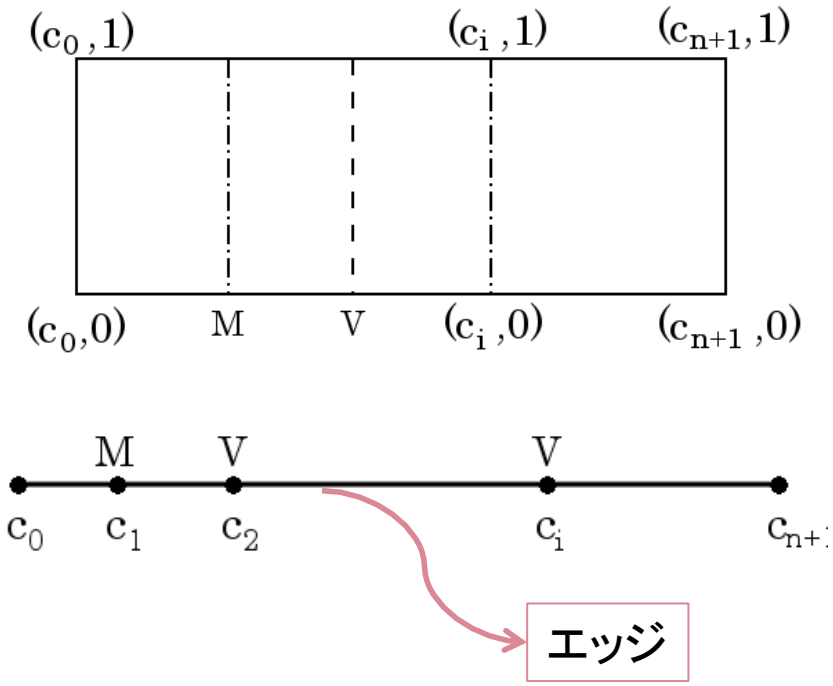
- 一次元山谷付き平坦折り問題を一般化
- すべての折り線が互いに平行で紙帯の長軸方向に対し θ
- 全ての折り線を指定通りに折って，平坦折りすることは可能か否かを判定

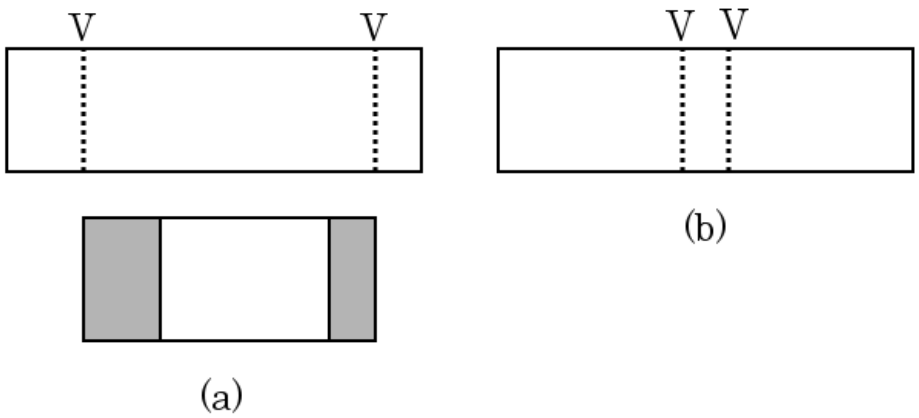


一次元山谷付き平坦折り問題 [Arkin et al. 2004]

一次元山谷付き平坦折り問題 [Arkin et al. 2004]

細長い長方形(紙帯)に限定し，すべての折り線が互いに平行で長軸方向に垂直な場合，どのようなときに平坦に折れるか.





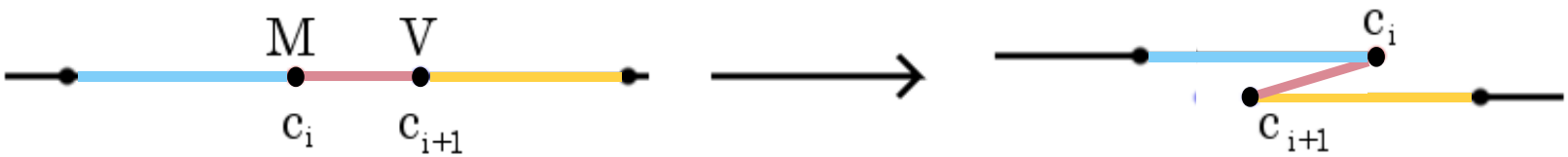
一次元山谷付き平坦折り問題 [Arkin et al. 2004]

- 段折り
- 端折り
- 束性

一次元山谷付き平坦折り問題 [Arkin et al. 2004]

- 段折り

二つの連続した折り線 c_i と c_{i+1} に対し，異なる山谷のラベルが割り当てられているとき，以下のように折る．



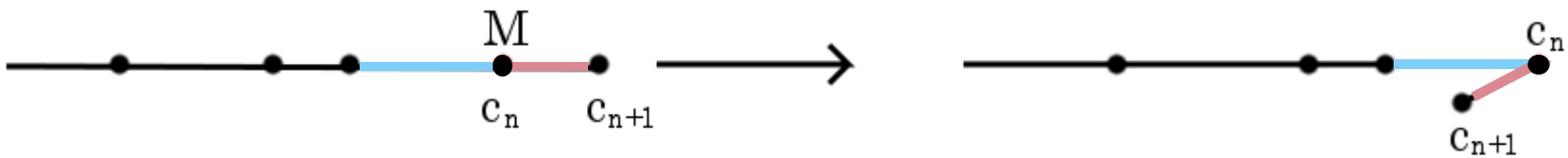
$$\left|c_{i-1}-c_i\right| \geq \left|c_i-c_{i+1}\right| \leq \left|c_{i+1}-c_{i+2}\right|$$

が成立しているとき，段折り可能．

一次元山谷付き平坦折り問題 [Arkin et al. 2004]

- 端折り

紙帯の端に対し，以下のように折る.



$$\left|c_{n-1} - c_n\right| \geq \left|c_n - c_{n+1}\right|$$

が成立しているとき，端折り可能.（c_1 側は対称なので省略）

一次元山谷付き平坦折り問題 [Arkin et al. 2004]

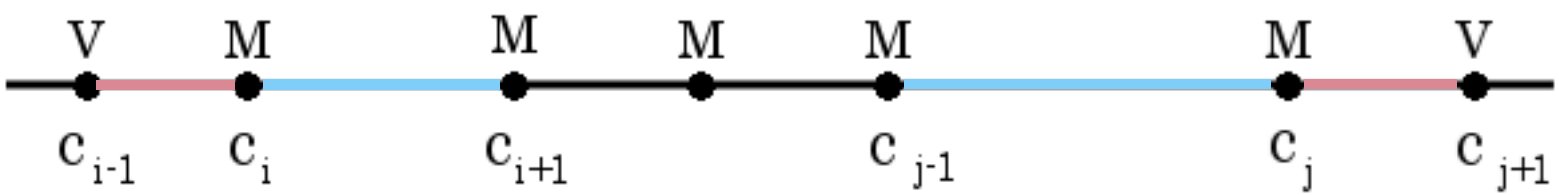
- 束性

同じラベルの折り線が2つ以上連続する任意の極大な列

$c_i, c_{i+1}, \ldots, c_j \ (1 \le i < j \le n)$において

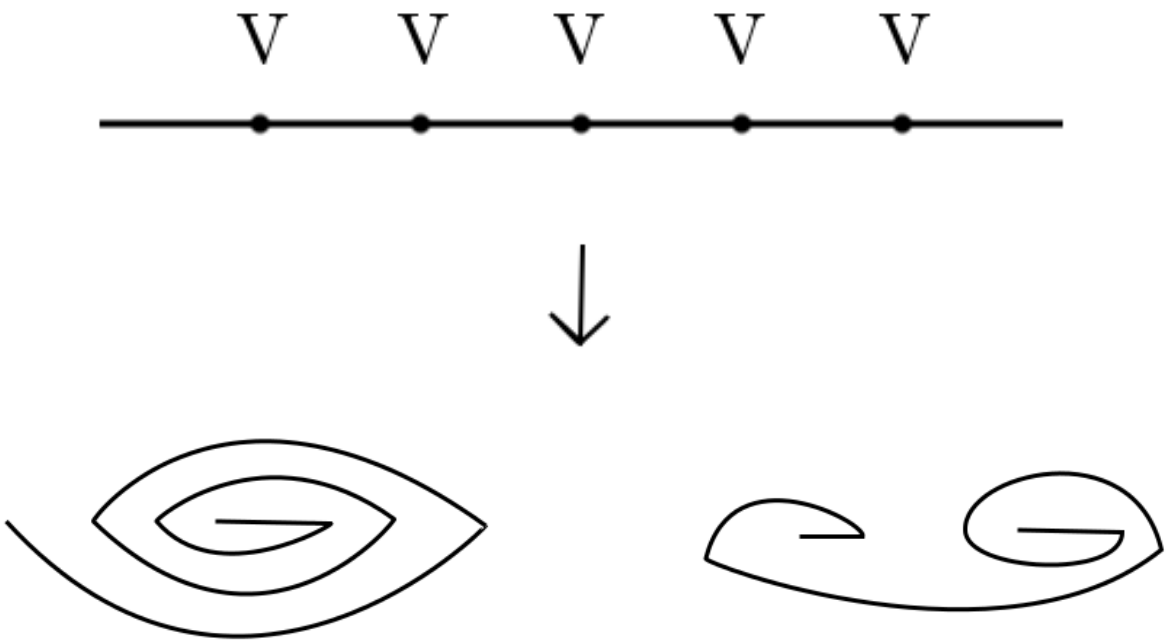
$$\underline{|c_{i-1} - c_i|} \le \underline{|c_i - c_{i+1}|}, \quad \underline{|c_{j-1} - c_j|} \ge \underline{|c_j - c_{j+1}|}$$

の少なくともどちらか一方が成り立つとき，束性をもつ.



一次元山谷付き平坦折り問題 [Arkin et al. 2004]

- 束性



一次元山谷付き平坦折り問題 [Arkin et al. 2004]

補題1
平坦折り可能な一次元山谷付き展開図は束性をもつ.

補題2
束性をもつ一次元の任意の山谷付き展開図には，段折り可能な折り線の対か端折り可能な折り線が存在する.

補題3
段折りと端折りはどちらも平坦折り可能性を保存する.

一次元山谷付き平坦折り問題 [Arkin et al. 2004]

補題4

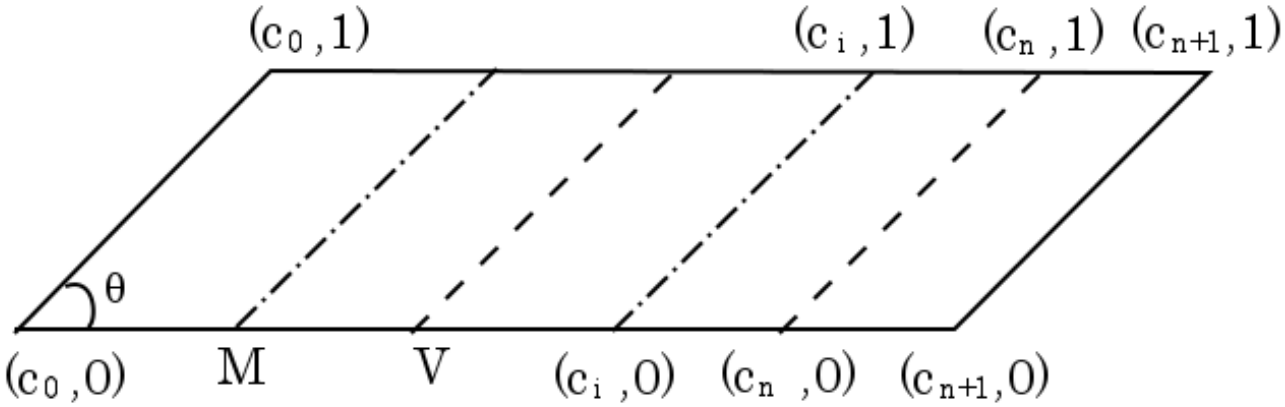
平坦折り可能な任意の一次元の山谷付き展開図Pは，段折りと端折りの列で平坦に折ることができる.

定理1

一次元山谷付き展開図が平坦折り可能か否かを判定し，可能な場合にはそれを実現する折り方の列を得る問題は，$O(n)$ 時間で解くことができる.

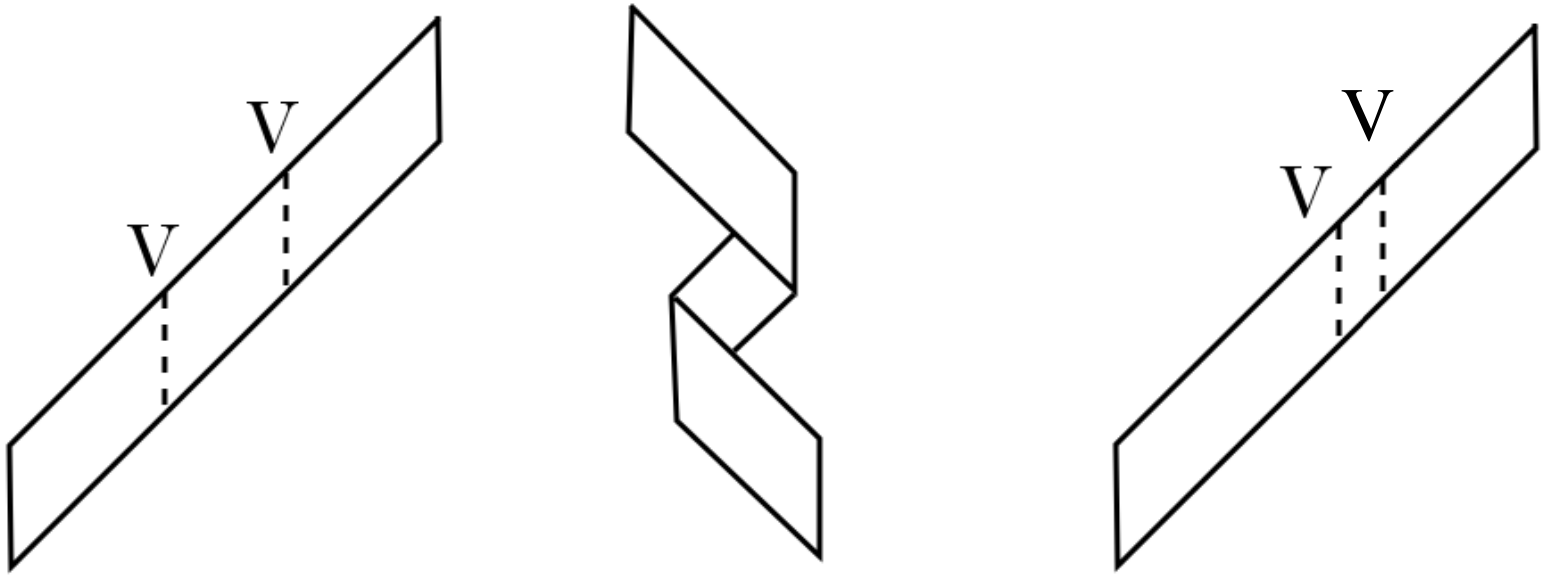
平行斜め山谷付き平坦折り問題

- 折り線を任意の角度 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とする
（ただし折り線同士は平行）



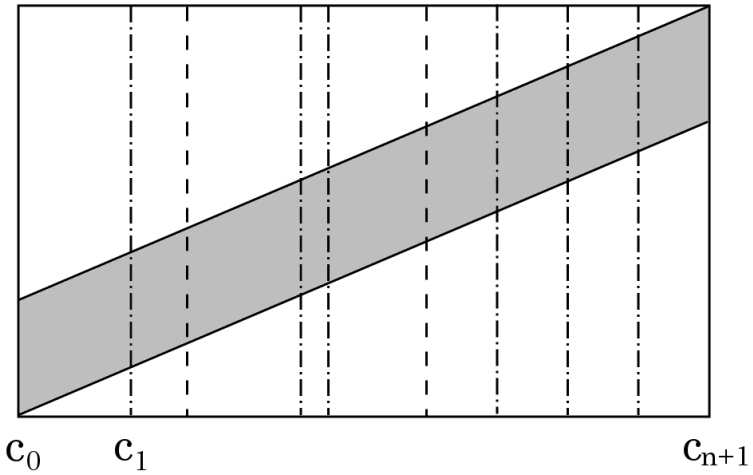
- 全ての折り線を指定通りに折って，平坦折りすることは可能か？

平行斜め山谷付き平坦折り問題



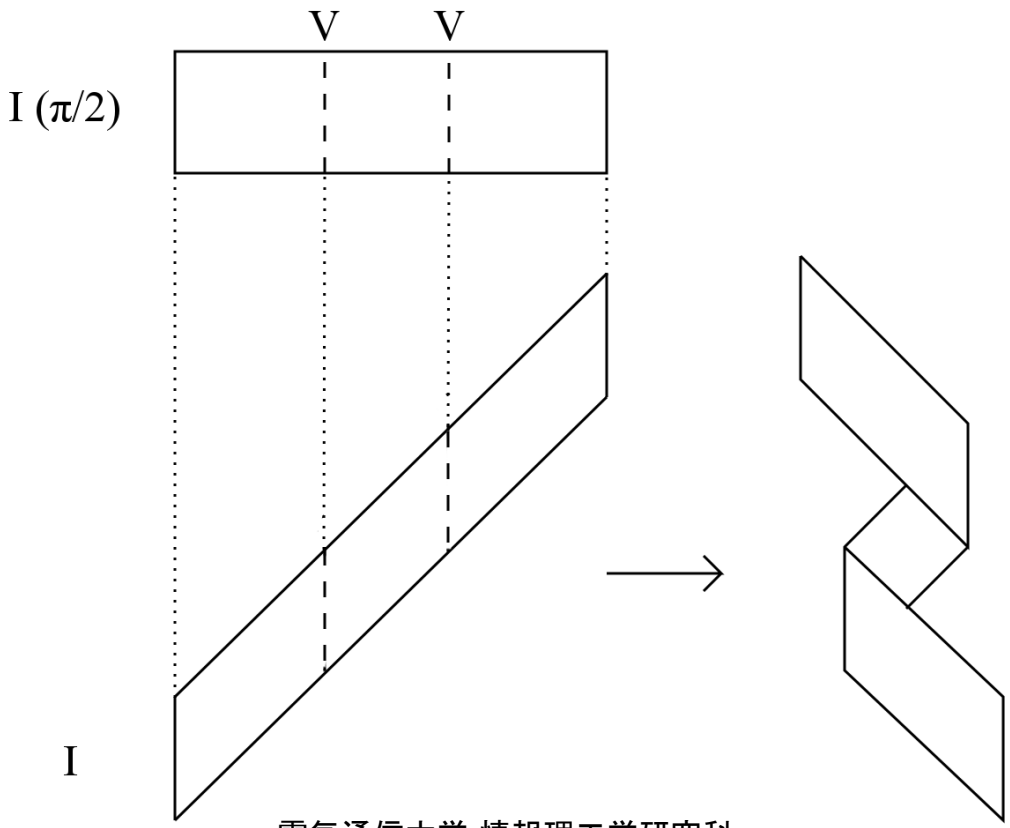
全面シート

- I を拡張し，一辺が折り線に平行な長方形の紙帯とする.
- I の全面シートは一次元山谷付き平坦折り問題とみなすことができる.
- 一次元山谷付き平坦折り問題のアルゴリズム(CRIMPと呼ぶ)が利用できる.
- 全面シートが平坦折り可能であれば，元のインスタンスも平坦折り可能.



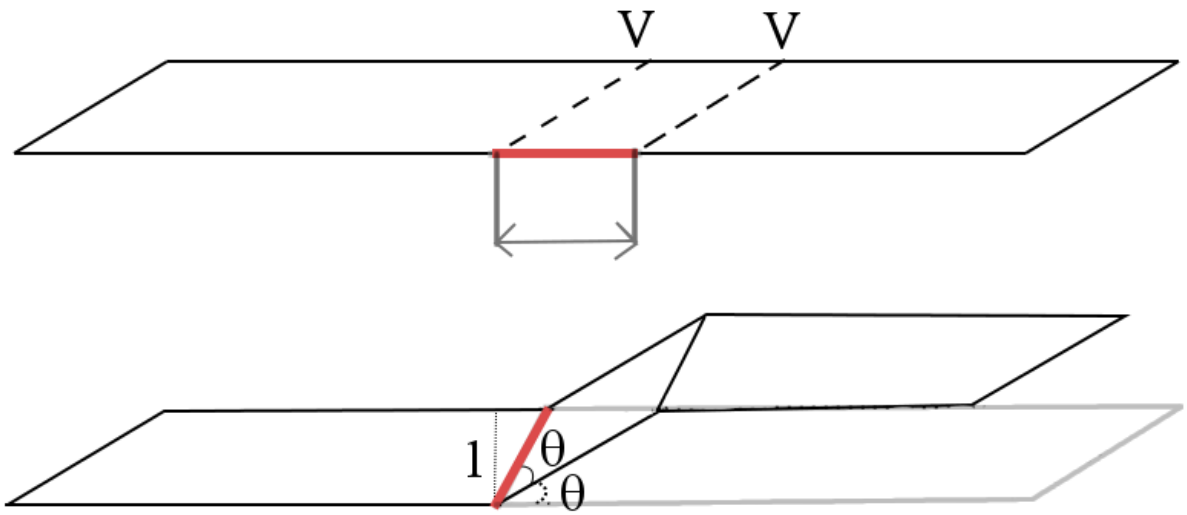
全面シート

- 全面シートは平坦折り不可能でも，斜めに行き違うことで元のインスタンスは平坦折り可能となる場合がある.



SEPARATE

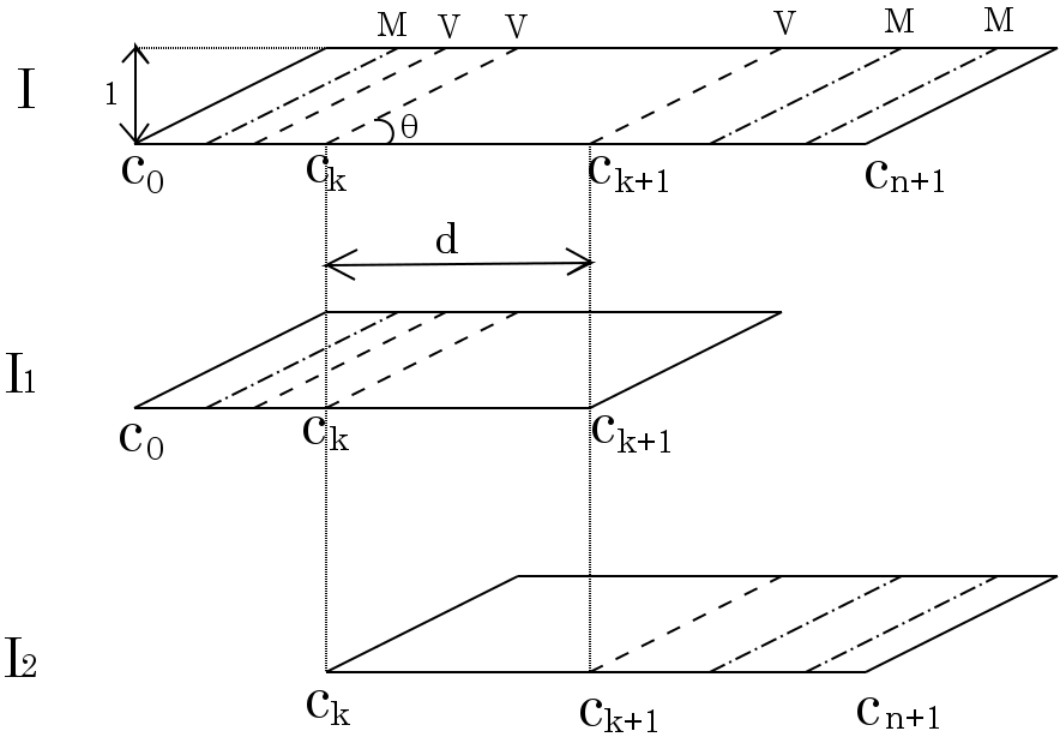
- 折り線の間の距離が $\dfrac{1}{\sin 2\theta}$ 以上となるとき，衝突が起こらない．



- その後，折り進んでも左右が干渉することはない．

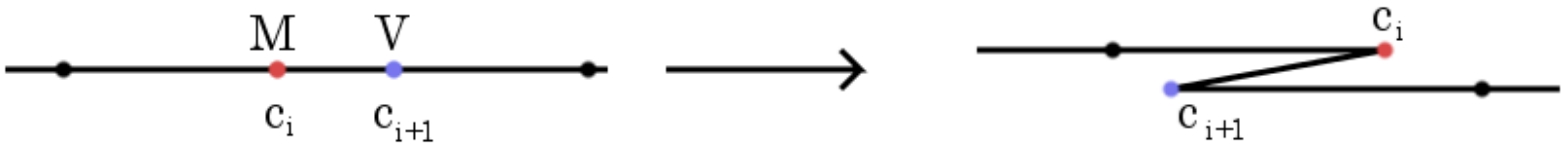
SEPARATE

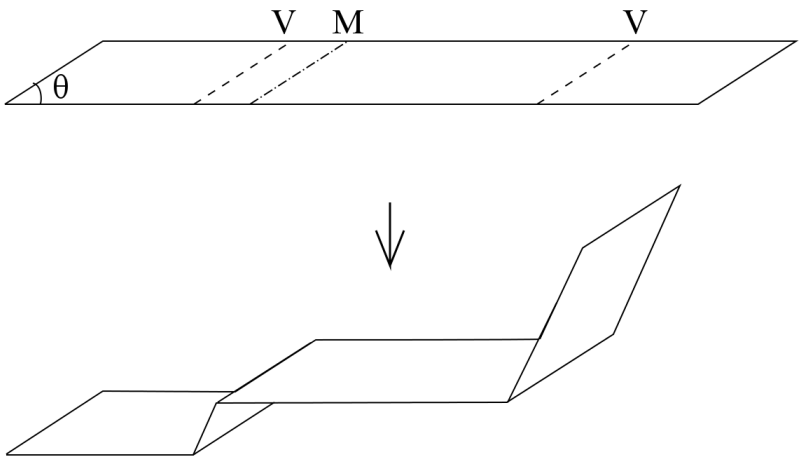
- 折り線間の距離が $\dfrac{1}{\sin 2\theta}$ 以上となるとき，インスタンス I を I_1 と I_2 に分割する.



SEPARATE

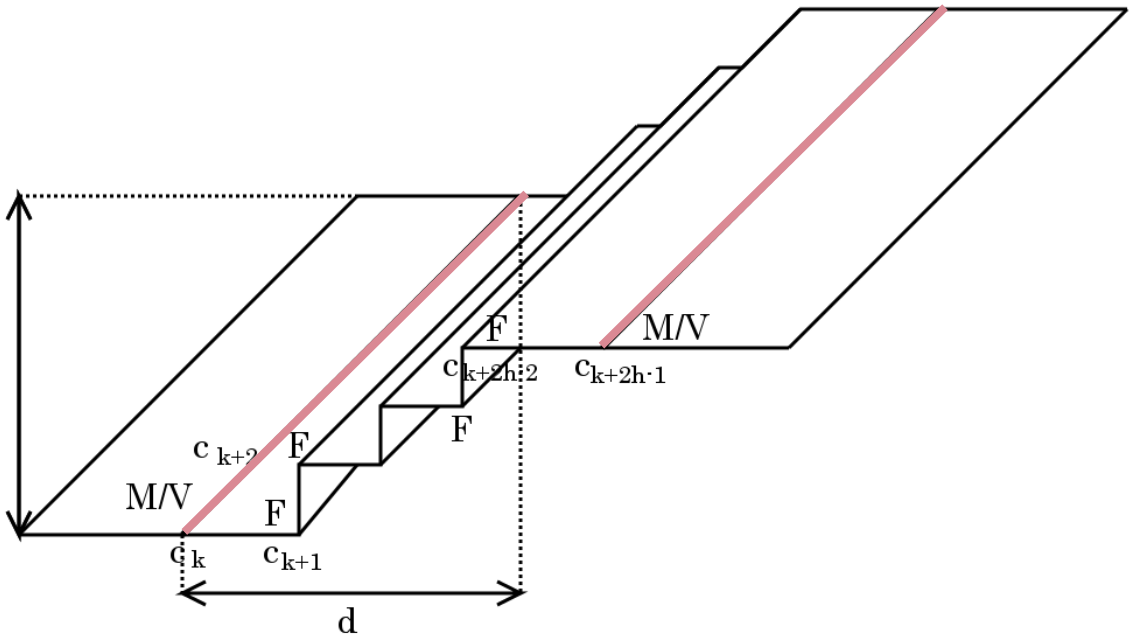
- 折った後の形が変化することに注意が必要





SEPARATE

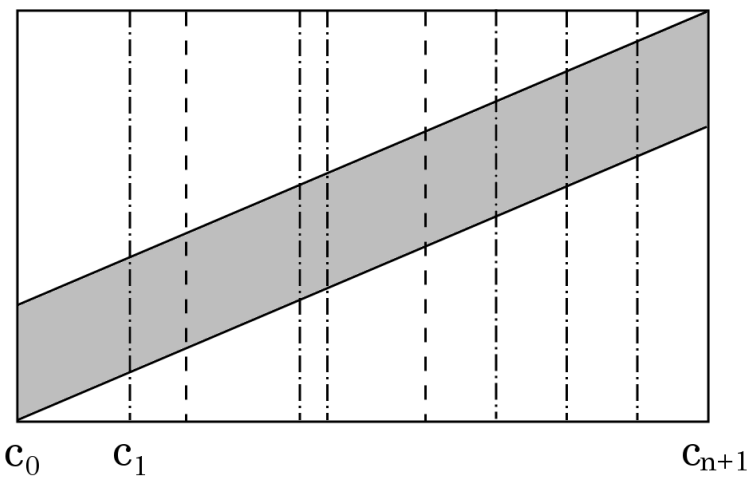
- 段折りが続く場合を考慮して，SEPARATEを再定義

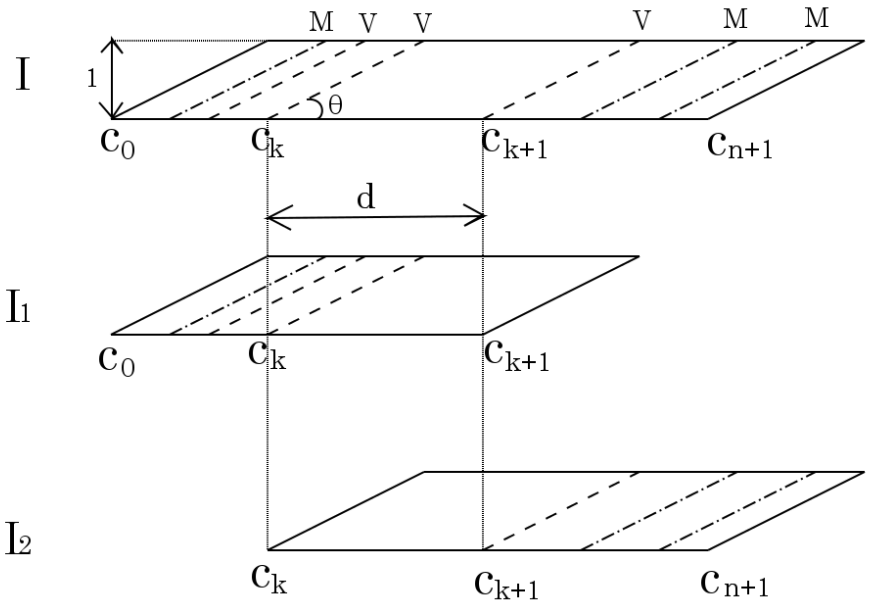


$$\left|c_{k+1}-c_k\right|+\left|c_{k+3}-c_{k+2}\right|+\ldots+\left|c_{k+2h-1}-c_{k+2h-2}\right|\geq\frac{1}{\sin 2\theta}$$

アルゴリズム

- CRIMPとSEPARATEを可能な限り適用し，適用できなければ平坦折り不可能と判定する.





アルゴリズムの正当性

平行斜め山谷付き平坦折りのアルゴリズムに関して

- 健全性
  平坦折り可能であると判定されるインスタンスはすべて平坦折り可能
- 完全性
  平坦折り不可能であると判定されるインスタンスはすべて平坦折り不可能

- 両方が成り立てばアルゴリズムの正当性が保証される.

アルゴリズムの正当性

- 健全性

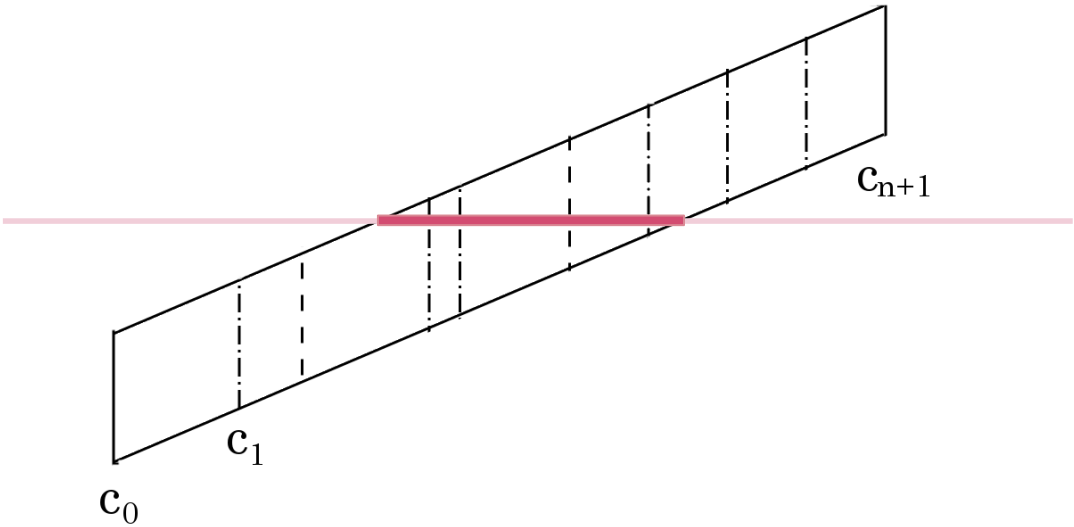
  →CRIMP，SEPARATEの定義から明らかに満たす.

- 完全性

  →

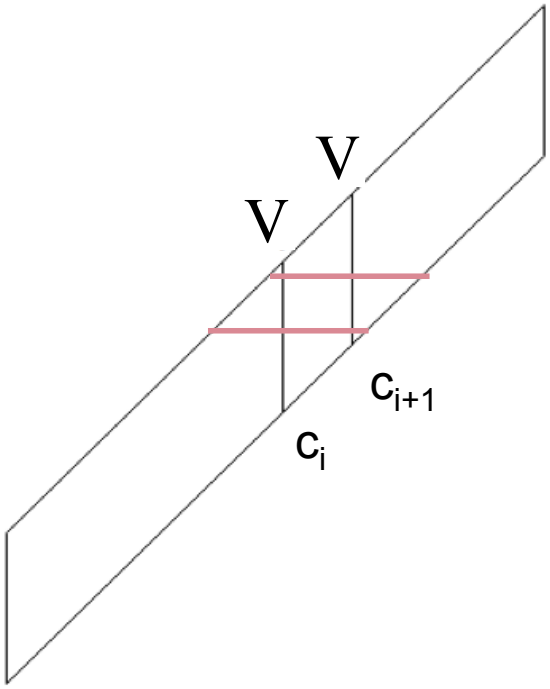
必須部分インスタンス

必須部分インスタンス：I の全面シートに対し，折り線と交わるような任意の水平線と I の紙帯と交わる部分 (線分)

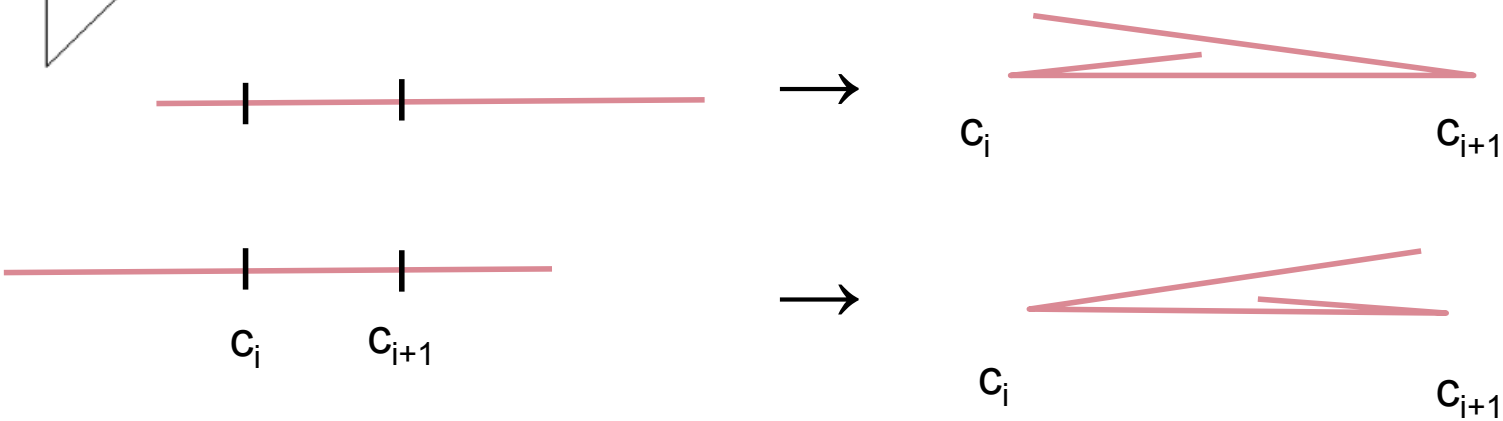


平坦折り不可能な必須部分インスタンスがあれば，
I は平坦折り不可能

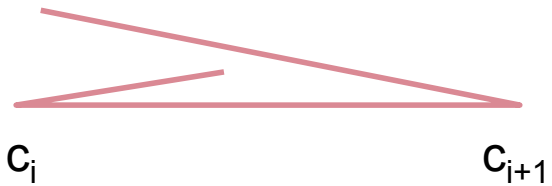
アルゴリズムの完全性



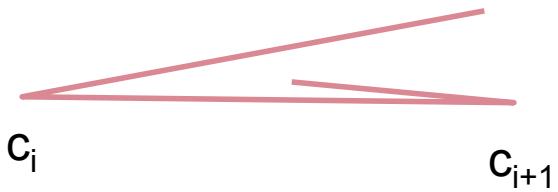
どの必須部分インスタンスも平坦折り可能



アルゴリズムの完全性



左右の紙帯の上下関係が異なる状況が同じ折り線で同時に起こる→矛盾



どの必須部分インスタンスも平坦折り可能であるにも関わらず，平坦折り不可能な場合にはこのような状態が生じる.

アルゴリズムの完全性

- 2通りに場合分け

（1）必須部分インスタンスに折れないものがある場合
→平坦折り不可能
（2）どの必須部分インスタンスも平坦折り可能である場合

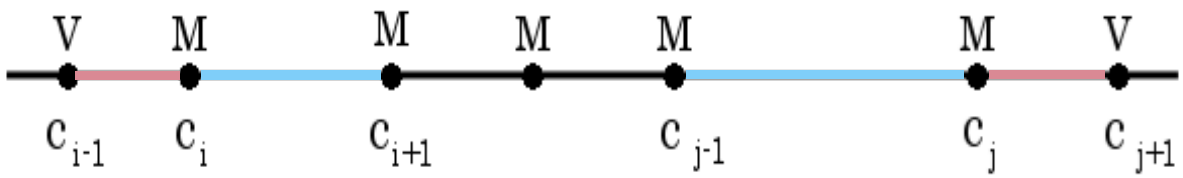
アルゴリズムの完全性

- 平坦折り不可能であると判定されるのは十分に分割されたインスタンスにおいてCRIMP不可能となった場合.

- 一次元山谷付き平坦折り問題の補題から，このインスタンスは束性を持たない.

束性

任意の連続した同じラベルの折り線の列で，少なくともどちらかが成り立つ

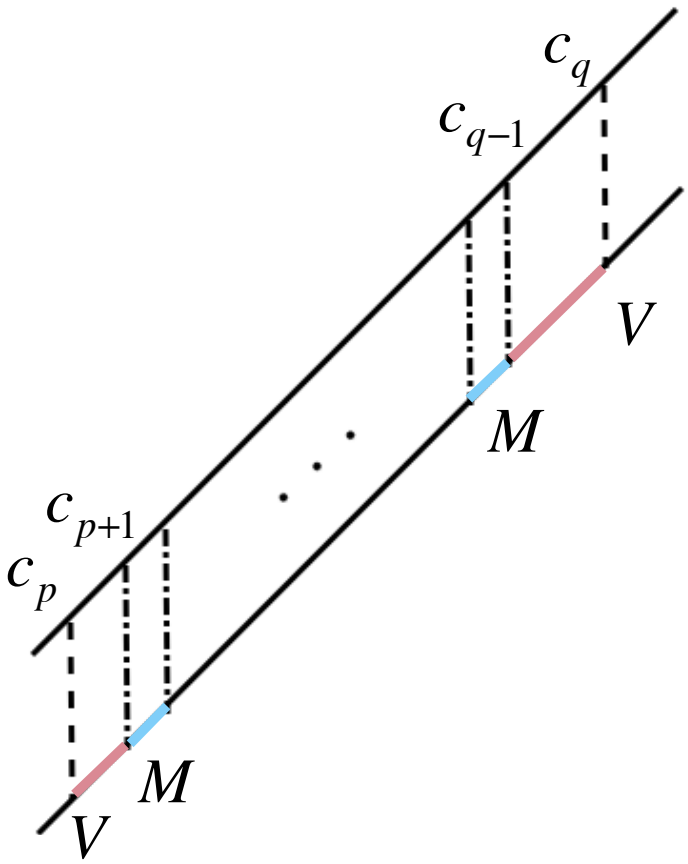


アルゴリズムの完全性

- 連続した同じラベルを持つ極大な列 $c_p, c_{p+1}, \ldots, c_{q-1}, c_q$ で以下を共に満たすものが存在する.

$$\left|c_{p-1} - c_p\right| > \left|c_p - c_{p+1}\right|$$

$$\left|c_{q-1} - c_q\right| < \left|c_q - c_{q+1}\right|$$

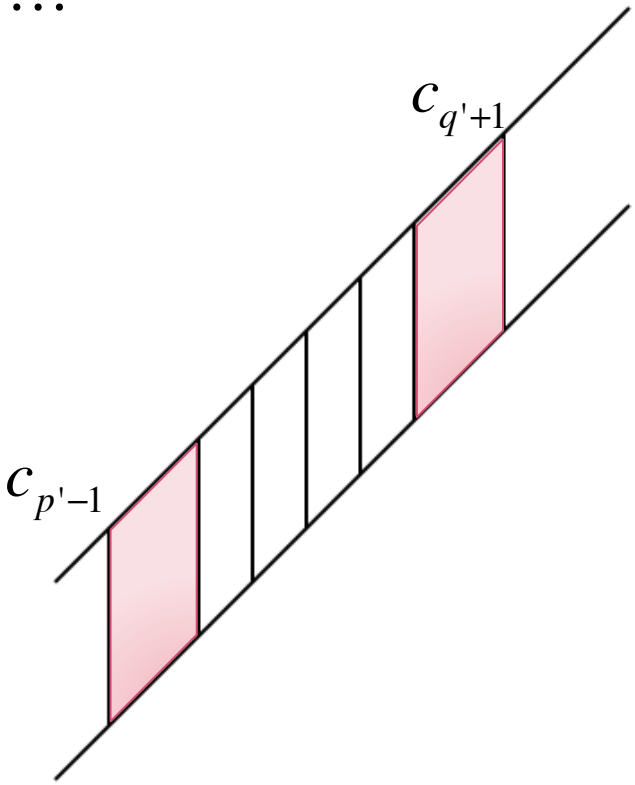


アルゴリズムの完全性

- $c_p, c_{p+1}, \ldots, c_{q-1}, c_q$ の中に,

$$\left|c_{p'-1} - c_{p'}\right| > \left|c_{p'} - c_{p'+1}\right| = \ldots = \left|c_r - c_{r+1}\right| = \ldots$$
$$= \left|c_{q'-1} - c_{q'}\right| < \left|c_{q'} - c_{q'+1}\right|$$

となるラベルの等しい折り線の列が存在する.

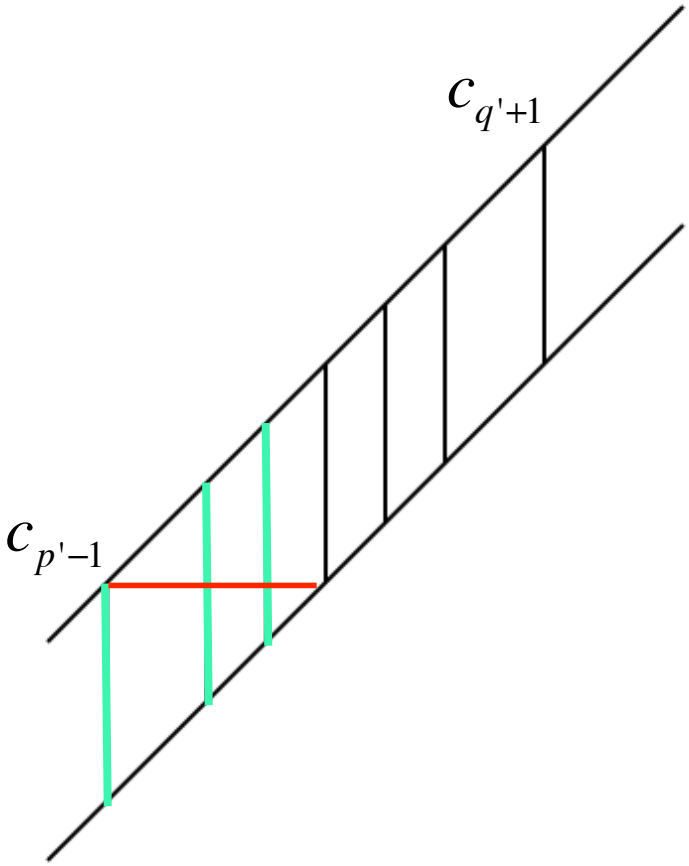


- これは一つの必須部分インスタンスには収まらない.

アルゴリズムの完全性

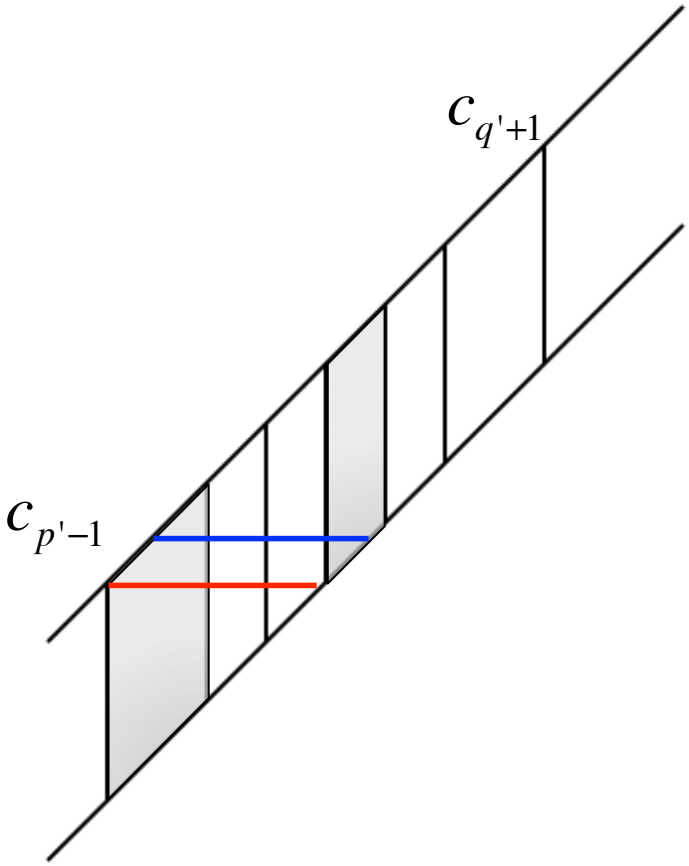
このとき,

- $c_{p'-1}$ を端とし, $c_{p'}$, $c_{p'+1}$ を含む必須部分インスタンスを考える.
- $\left|c_{p'-1}-c_{p'}\right|>\left|c_{p'}-c_{p'+1}\right|$ より, この必須部分インスタンスは $\left(c_{p'-1},c_{p'}\right)$ を一番外側にする螺旋構造となる.



アルゴリズムの完全性

- 次に $\left(c_{p'-1}, c_{p'}\right)$ から $\left(c_{p'+2}, c_{p'+3}\right)$ を含む必須部分インスタンスを考える.
- これは，上記の必須部分インスタンスの折りと矛盾しないために，$\left(c_{p'-1}, c_{p'}\right)$ を一番外側とする螺旋構造になる.
- 以下，帰納的に，$\left(c_r, c_{r+1}\right)$ は $\left(c_{r+1}, c_{r+2}\right)$ よりも螺旋構造の外側に位置する.



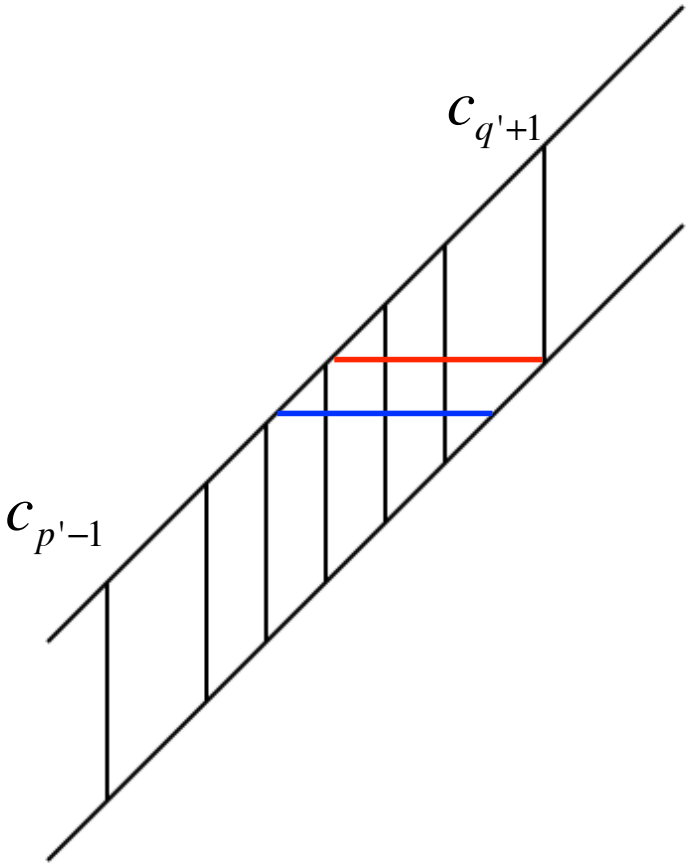
アルゴリズムの完全性

同様の議論を右側から行うと

(c_r, c_{r+1}) は (c_{r+1}, c_{r+2}) よりも

螺旋構造の内側に位置するこ

とになるので矛盾する.



アルゴリズムの完全性

- 以上より，(1)(2)のどちらの場合も平坦折り不可能である.
- したがって，上述のアルゴリズムで平坦折り不可能と判定される場合，平坦折り不可能である.

- 健全性と完全性の両方を満たすのでアルゴリズムの正しさを保証することができる.

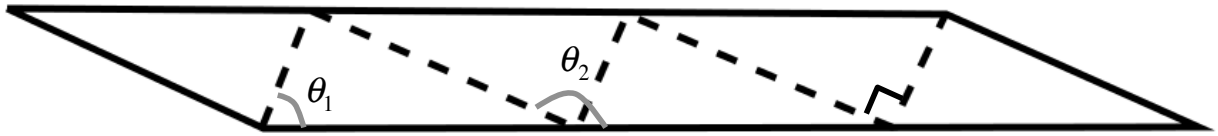
アルゴリズムの計算量

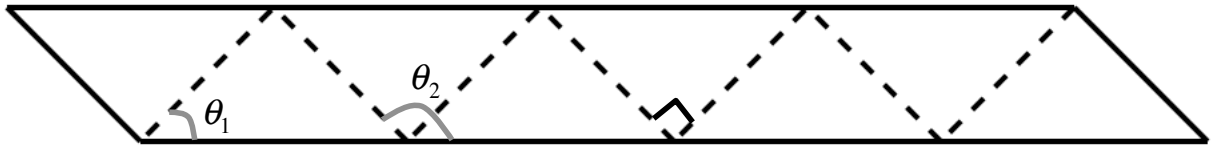
- 単純に実行する場合の計算時間は $\Theta\left(n^2\right)$.

- 段折り可能な部分を先にすべて段折りしてからSEPARATEを適用する方法をとることで，$O\left(n\right)$ 時間で解くことができる.

ジグザグ斜め山谷付き平坦折り問題

- 折り線は θ_1, θ_2 の2種類（ただし $\theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{2}$ ）
- 2種類の折り線は交互にジグザグ状になっている.

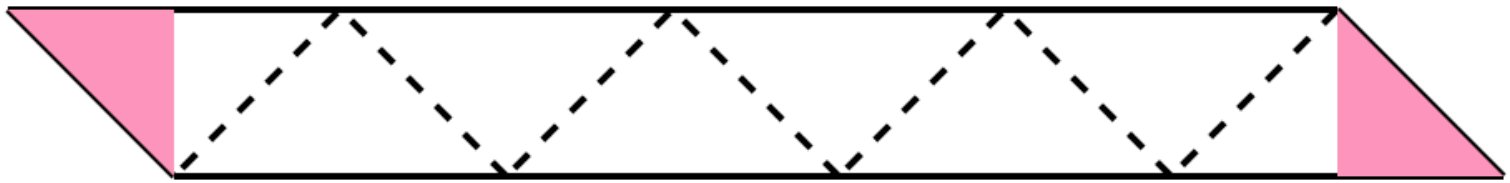




- 折り線を「折るか折らないか」,「谷折りか山折りか」は与えられる.

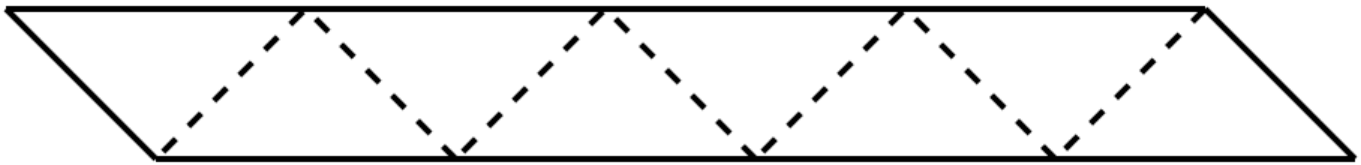
ジグザグ斜め山谷付き平坦折り問題

- まず，すべての折り線を折る場合を考える.
- 最終折り状態において，色の付いた部分を一番外側の面に出すように平坦折り可能であることを示す.

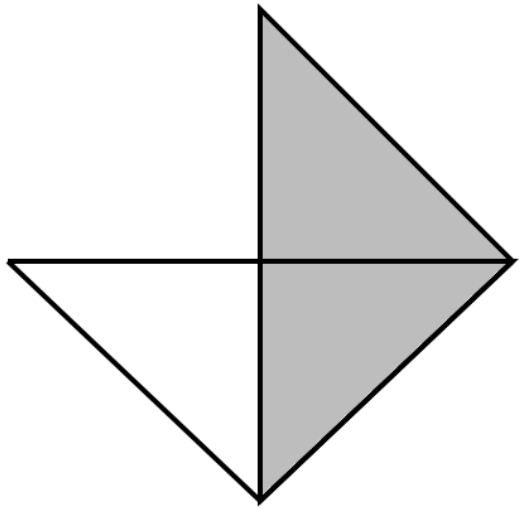


ジグザグ斜め山谷付き平坦折り問題

- 折りの方向は与えられる.

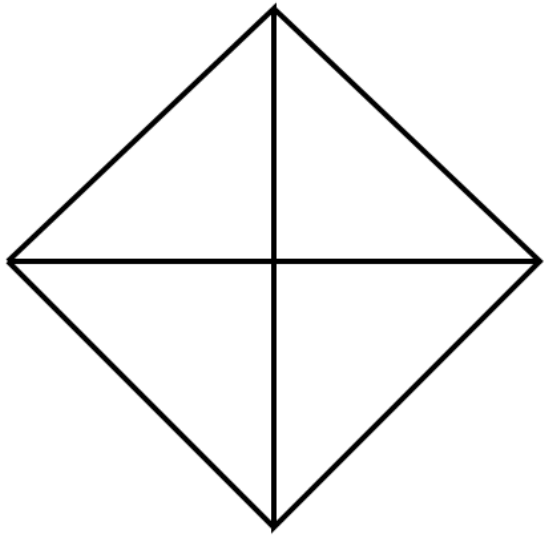


- 隣り合う二つの三角形に着目すると右図のように重なる.



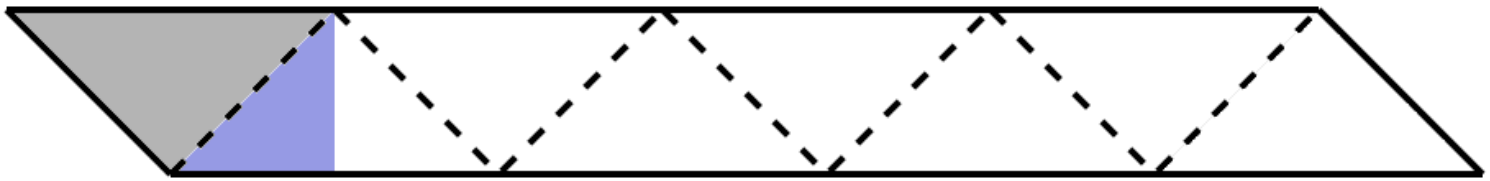
ジグザグ斜め山谷付き平坦折り問題

- 繰り返して折ると一定の長方形になる.

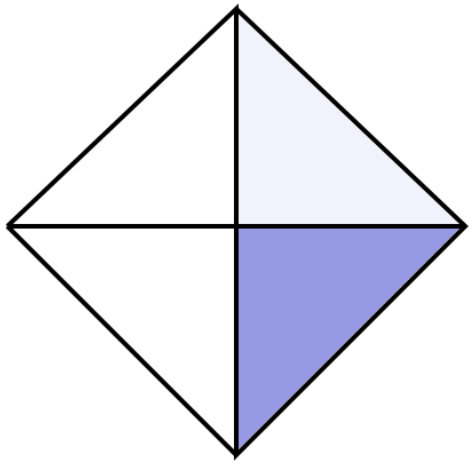


ジグザグ斜め山谷付き平坦折り問題

- 三角形が一つ少ない場合に主張が成り立つと仮定する.

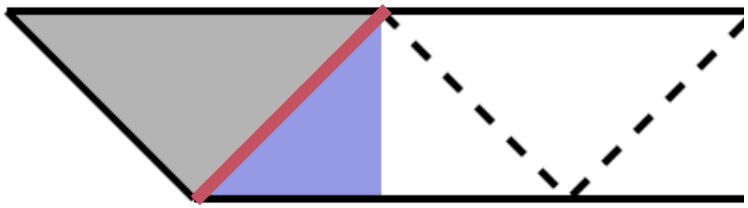


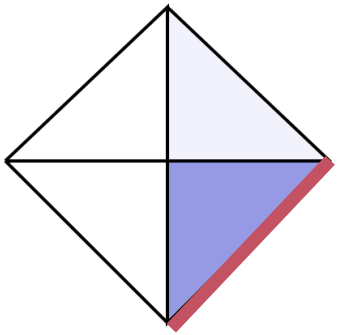
- このとき右図のようになっている.
  ここに三角形を一つつなげる.



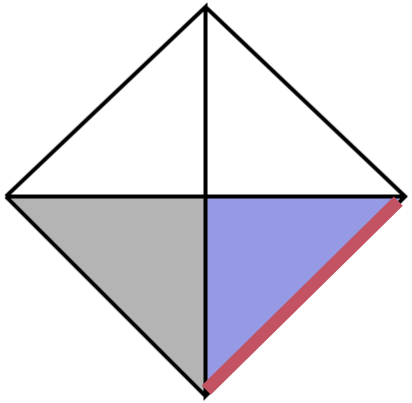
ジグザグ斜め山谷付き平坦折り問題

- 折り線の向きによって重なり方が変わる.

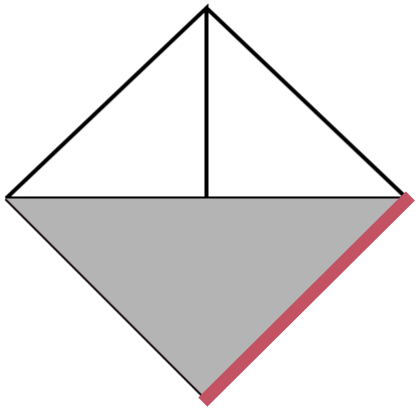




谷折り

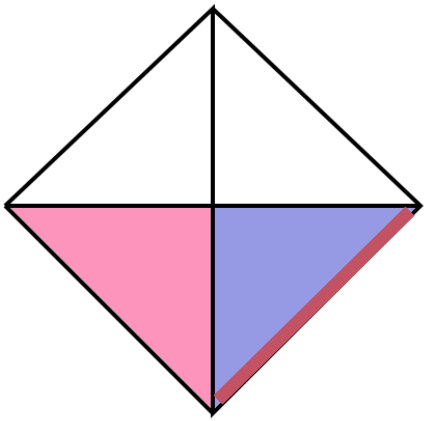


山折り

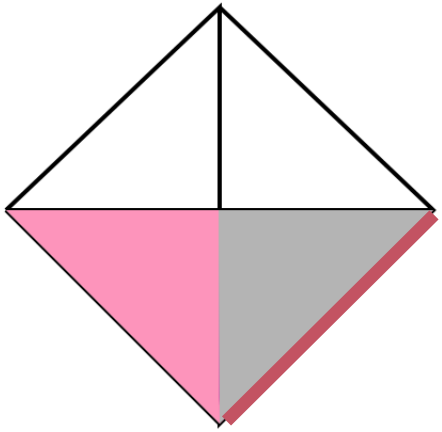


ジグザグ斜め山谷付き平坦折り問題

谷折り



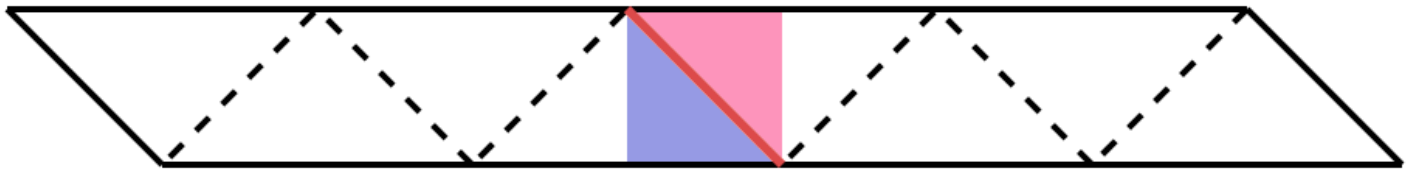
山折り



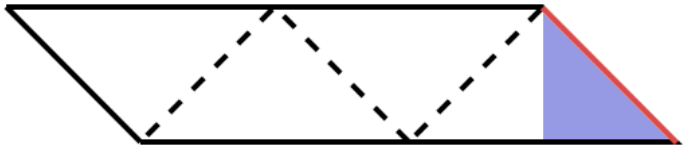
- どちらの場合も主張を満たす.
- 三角形が一つの時は明らかに成り立つので，帰納法を用いて証明できる.

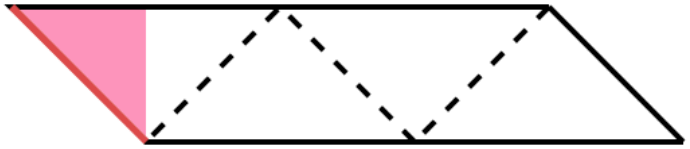
ジグザグ斜め山谷付き平坦折り問題

- 次に，折らない線がある場合を考える.



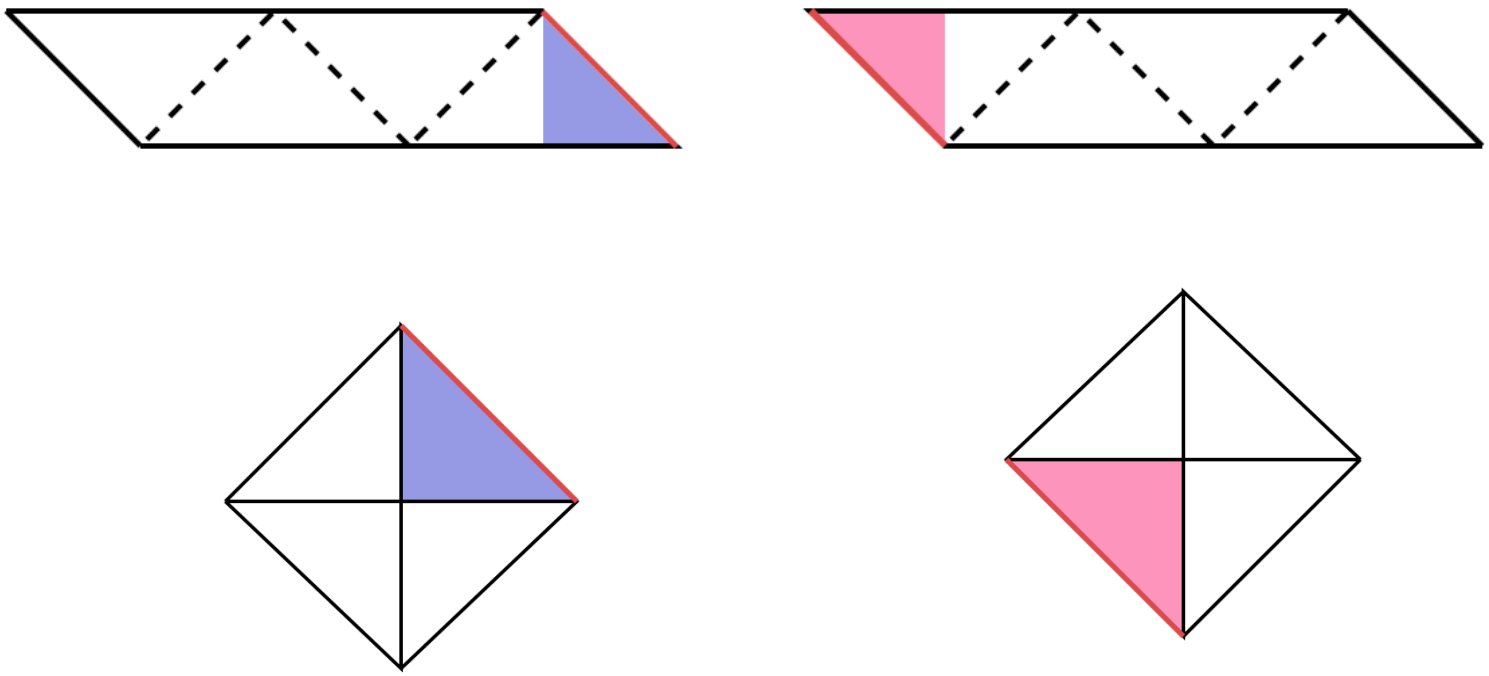
- 折らない線で分割して考える.





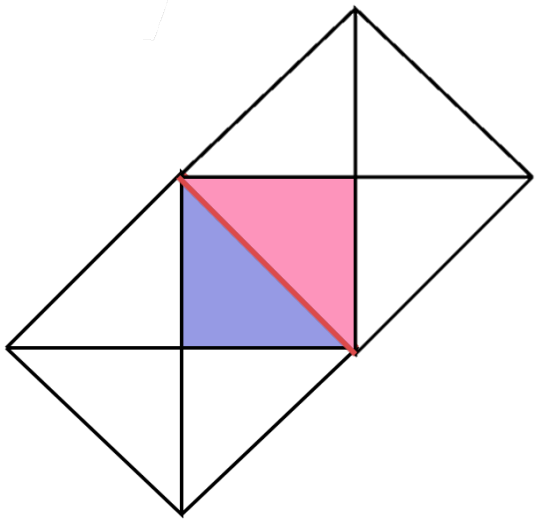
ジグザグ斜め山谷付き平坦折り問題

- 先ほどの議論よりそれぞれ色の付いた部分を一番外側の面に出して平坦に折ることができる.



ジグザグ斜め山谷付き平坦折り問題

- 分割した線で接着しても紙の重なりの順番に影響を及ぼさないので，平坦折り可能性に影響しない．
- したがって，折らない線があった場合にも平坦折り可能．



まとめ

- 一次元山谷付き平坦折り問題の折り線の角度を一般の角度に拡張した平行斜め山谷付き平坦折り問題を提示し，この問題に対し，線形時間アルゴリズムを提示した.

- 2種類の折り線がジグザグ状に並ぶジグザグ斜め山谷付き平坦折り問題を提示し，常に平坦折り可能であることを示した.

今後の課題

- 折り線の角度が2種類以上混在している問題を考える.