頂点Kaylesに対するモジュラ幅FPTアルゴリズム

小林 靖明
京都大学

発表の内容

- 頂点Kaylesが効率よく解けるグラフクラスについて
  - 一般にはPSPACE完全
  - グラフのモジュラ幅が小さいと効率よく解ける
  - 解析ではK集合と呼ばれる部分グラフの数え上げを使う
- Kaylesに関する未解決問題について
- (時間が余れば)関連する問題について

タイトルは去年の研究会の

「消防士問題に対するモジュラ幅FPTアルゴリズム」

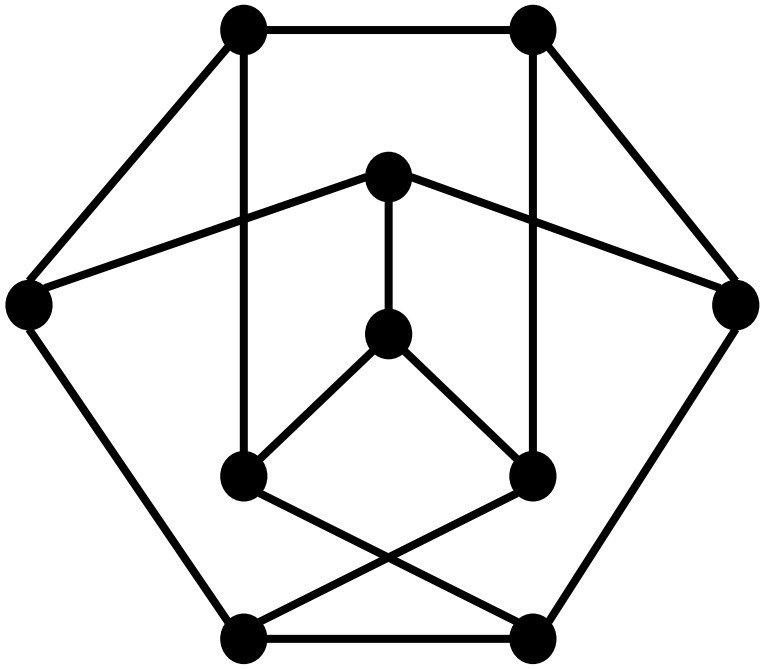
をマネしました

Kayles

https://www.pedagonet.com/puzzles/kayles.html

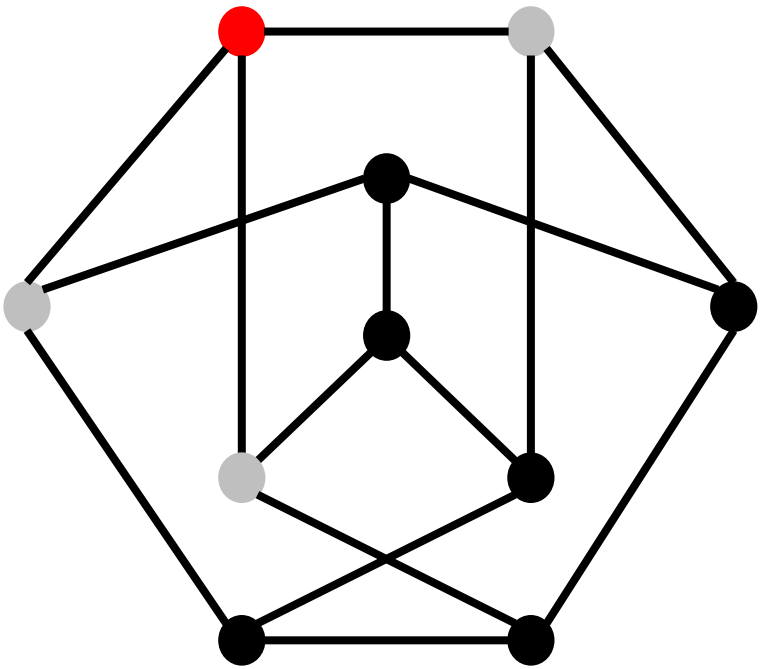
頂点Kayles [Schaefer 78]

- 2人プレイヤー完全情報ゲーム
- 各プレイヤーは交互に頂点とその隣接点を削除していく
- 頂点を削除できなくなったプレイヤーの敗北



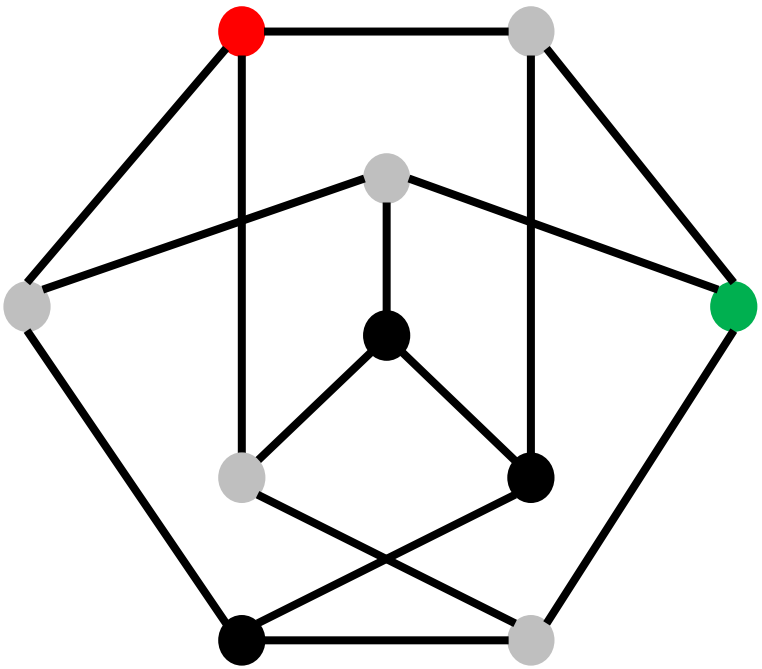
頂点Kayles [Schaefer 78]

- 2人プレイヤー完全情報ゲーム
- 各プレイヤーは交互に頂点とその隣接点を削除していく
- 頂点を削除できなくなったプレイヤーの敗北



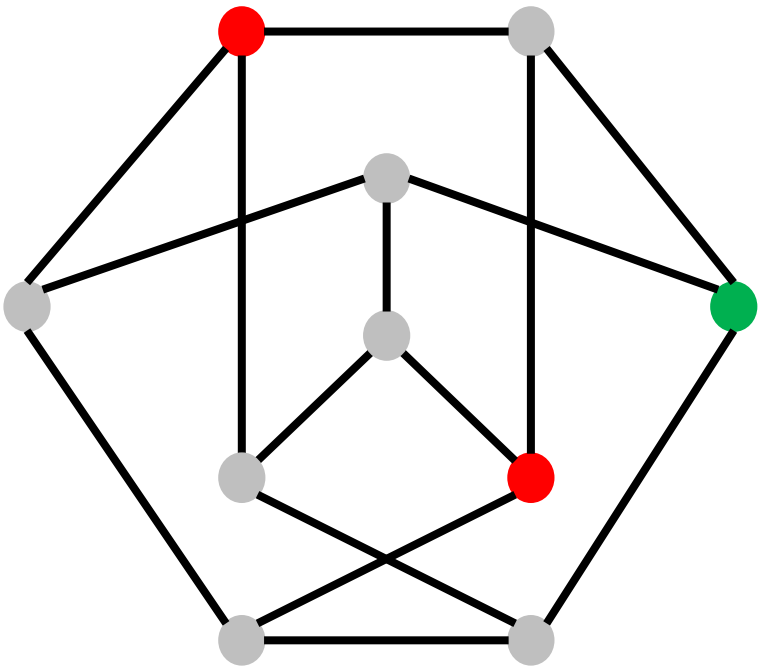
頂点Kayles [Schaefer 78]

- 2人プレイヤー完全情報ゲーム
- 各プレイヤーは交互に頂点とその隣接点を削除していく
- 頂点を削除できなくなったプレイヤーの敗北



頂点Kayles [Schaefer 78]

- 2人プレイヤー完全情報ゲーム
- 各プレイヤーは交互に頂点とその隣接点を削除していく
- 頂点を削除できなくなったプレイヤーの敗北
  - ゲームが終局したとき選ばれた頂点は極大独立集合



頂点Kaylesの複雑さ

先手に必勝戦略が存在するかどうかを判定する問題:

- PSPACE完全 [Schaefer 78]
- クラスを限定すればP [Bodlaender-Kratsch 02]
  - 区間グラフ，コグラフなど
- $O(1.6031^n)$時間アルゴリズム [Bodlaender+ 15]
  - n: 頂点数

疑問:

どのような(グラフの)性質があると
頂点Kaylesが効率よく解けるか？

結果

定理: 頂点Kaylesは$1.6031^{mw(G)}n^{O(1)}$時間で解ける

- mw(G): グラフGのモジュラ幅
- $O(1.6031^{n})$ [Bodlaender+ 15] -> $1.6031^{mw(G)}n^{O(1)}$

アイデア: [Bodlaender+ 15]のアルゴリズムを走らせるだけ

- アルゴリズムにおいてモジュラ幅は一切出てこない！

アルゴリズムのアイデア[Bodlaender+ 15]

グランディ数を再帰的に計算する

1手先の局面

- $$\begin{cases} g(\emptyset) := 0 \\ g(G) := \mathrm{mex}(\ \{g(\underline{G - N[v]}) : v \in V(G)\}\ ) \end{cases}$$
  - mex(S): Sに含まれない最小の非負整数
    - mex({0, 1, 2, 4, 6}) = 3, mex({1, 2}) = 0

定理 (Sprague-Grundyの定理):

- Gにおいて先手必勝 ↔ $g(G) > 0$
- $g(G \cup H) := g(G) \oplus g(H)$
  - G, H: 互いに素なグラフ
  - ⊕ : (2進数表現での)ビットごとの排他的論理和

グランディ数の再帰式の評価

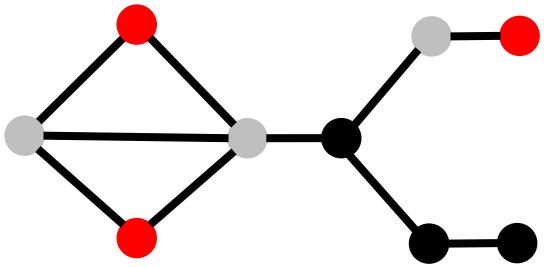
$$g(G) = \begin{cases} 0 & \text{if } G\text{が空グラフ} \\ g(G_1) \oplus g(G_2) \oplus \cdots \oplus g(G_k) & \text{if } G\text{が非連結} \\ \mathrm{mex}(\ \{g(G - N[v]) : v \in V(G)\}\ ) & \text{otherwise} \end{cases}$$

- メモ化(memoization)を使って評価
  - アルゴリズムはこれだけ！
- 実行時間は“連結な”異なる局面の数によって決まる
  - 自明な上界は2^n個

K集合 [Bodlaender+ 15]

定義: 非空なW ⊆ VがK集合:

- G[W] が連結
- 独立集合XでW = V - N[X]を満たすものが存在



観察: “連結な”局面 ↔ K集合

定理 [Bodlaender+ 15]: 頂点KaylesはO*(κ(G))時間で解ける.

- κ(G): GのK集合の数

K集合って何個ぐらいあるの?

定理 [Bodlaender+ 15]:

$$\kappa(G) = O(1.6031^n).$$

補題:

$$\kappa(G) \leqq 6 \cdot 3^{\tau(G)} + n.$$

- $\tau(G)$: 頂点被覆数

補題(今日の内容):

$$\kappa(G) = O(1.6031^{mw(G)} n^{1+\varepsilon}).$$

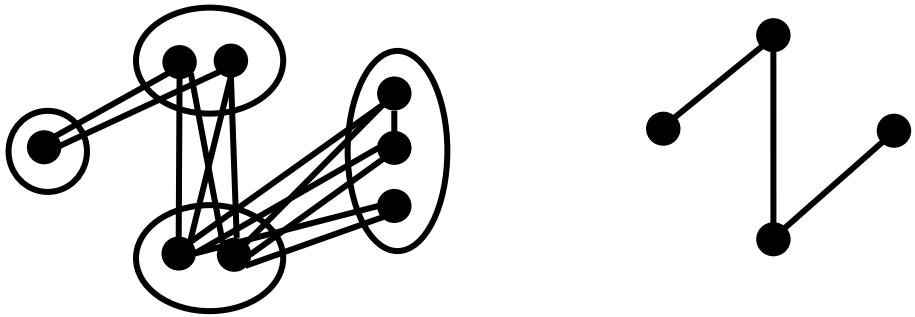
- mw(G): モジュラ幅

モジュラ幅

G = (V, E) のモジュラ幅とは以下いずれかを満たす最小の正整数k:

1. Gは高々1頂点
2. Gは高々k個のモジュールに分割でき，各モジュールのモジュラ幅がk以下

モジュール: $M \subseteq V$で任意の$v \in V - M$が$M \subseteq N(v)$または$M \cap N(v) = \varnothing$



商グラフ: 各モジュールを1点に縮約したグラフ

モジュラ幅を用いたK集合の数の見積もり

補題: $\kappa(G) = O(1.6031^{mw(G)} n^{1+\varepsilon})$.

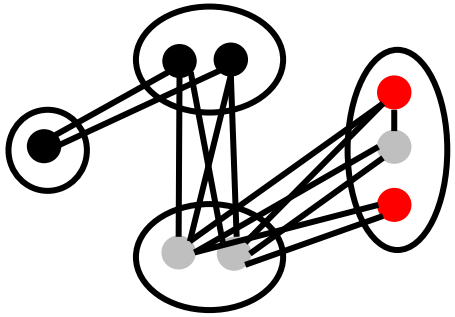
証明のスケッチ:

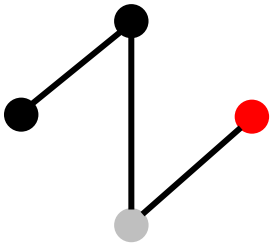
定義(再掲): 非空な$W \subseteq V$がK集合:

- G[W] が連結
- 独立集合XでW = V - N[X]を満たすものが存在

Gがモジュールに分割できるとするとK集合Wは次のいずれか:

1. WはあるモジュールMにおいてG[M]のK集合($W \subseteq M$)
2. Wは商グラフのK集合の「拡大」をなす





モジュラ幅を用いたK集合の数の見積もり

補題: $\kappa(G) = O(1.6031^{mw(G)} n^{1+\varepsilon})$.

証明のスケッチ:

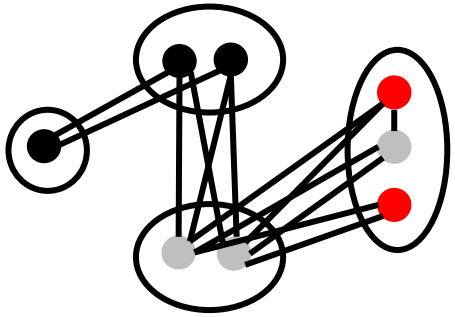
定義(再掲): 非空な$W \subseteq V$がK集合:

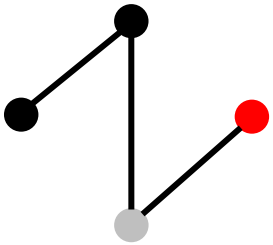
- G[W] が連結
- 独立集合XでW = V - N[X]を満たすも

1: $\Sigma\, 1.6031^{mw(G)} n_i^{1+\varepsilon}$
2: $1.6031^{mw(G)}$
1+2 = $1.6031^{mw(G)} n^{1+\varepsilon}$

Gがモジュールに分割できるとするとK集合Wは次のいずれか:

1. WはあるモジュールMにおいてG[M]のK集合($W \subseteq M$)
2. Wは商グラフのK集合の「拡大」をなす





グラフ上のKaylesにまつわる未解決問題

- 木の上の頂点KaylesはP?
  - 指数的な数のK集合を持つ木が存在 [Bodlaender+ 15]
- 辺Kayles
  - 計算複雑性は長年未解決 [Schaefer 78]
  - ライングラフの頂点Kayles
  - 独立集合 vs マッチング
  - kターン以内に先手の必勝戦略があるかどうかは
    - 頂点Kayles: AW[*]完全 [Abrahamson+ 95]
    - 辺Kayles: FPT [Lampis-Mitsou 14]
  - ２部グラフに限れば？
  - マッチングの端点集合はΔマトロイドをなす
    - (通常の)マトロイドなら基の大きさで勝敗判定ができる
    - ΔマトロイドだとΔ何か良い性質はないのか？

彩色ゲーム(時間が余った用)

- 使える色数 k が与えられて二人のプレイヤーが頂点彩色する
  - 隣り合う頂点同士は同じ色で彩色できない

グラフ彩色ゲーム:

- 彩色できなくなったプレイヤーの敗北
  - k = 1は頂点Kaylesと一致
- k = 2のときPSPACE完全 [Bodlaender 91]
  - k > 2の場合未解決！
  - 自明な$O^*((k + 1)^n)$時間アルゴリズムを改善できる？
    - 特にk = 2: ゲームの終局は極大な2部グラフ

ゲーム彩色数(グラフ彩色ゲームとは異なる概念):

- 先手はすべての頂点が彩色できるようにプレイし，後手はそれを防ぐようにプレイする
- すべての頂点が彩色できるようになるための色数は？
  - 未解決: k色で先手が勝つならばk+1色で先手が勝てる？
  - 未解決: k色で先手が勝利できるかどうか判定する問題の複雑性？