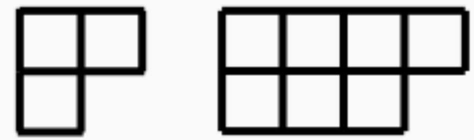
p飽和マヤゲームと対称群の既約表現

第14回 組合せゲーム・パズル研究集会
電気通信大学 ２０１９年3月10日

入江佑樹
東北大学 数理科学連携研究センター

佐藤幹夫の予想（70年代）

Y : n 個の箱からなるYoung図形



Y : マヤゲームの局面

$$\mathrm{sg}\,(Y) = \bigoplus_{2} N_2(h)$$

h :フック長

$\bigoplus_2$ 二進法で

繰上りなしの足し算

$$N_2(h) = h \oplus_2 (h-1)$$

R^Y : 対称群の既約表現

$$\deg(R^Y) = \frac{n!}{\prod h}$$

h :フック長

本研究の概要

Y : n 個の箱からなるYoung図形　　p : 素数

Y p 飽和マヤゲームの局面

$$\mathrm{sg}(Y) = \bigoplus_{p} {}_{h:\text{フック長}} N_p(h)$$

$\oplus_p$ p進法で繰上りなしの足し算

$$N_p(h) = h \ominus_p (h-1)$$

R^Y : 対称群の既約表現

$$\deg(R^Y) = \frac{n!}{\prod_{h:\text{フック長}} h}$$

p'成分存在定理

R^Y をどこまで制限したら

次数が p と素な既約成分を持つか

ゲームの公式の背景に表現の性質

本研究の要点

1. p 飽和を導入
2. ゲームと表現の関係
3. p' 成分存在定理(表現論)

この定理から p 飽和マヤの
Sprague-Grundy 関数の明示公式を得る

ゲームの公式の背景に表現の性質

局面集合 $X \subseteq \mathbb{N}^m \quad \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

石とり集合 $T \subseteq \mathbb{N}^m \setminus \{\mathbb{0}\}$

$t \in T$ かつ $x, x - t \in X$ のとき

$$x \longrightarrow x - t$$

$\Gamma(X, T)$ **石とりゲーム**

石とりゲームの例

ニム $\Gamma(\mathbb{N}^m, T_1)$ $\quad T_1 = \{t \in \mathbb{N}^m : \mathrm{wt}(t) = 1\}$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
(1,2) \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & (1,1)\ \ (= (1,2) - (0,1)) \\
 & (1,0)\ \ (= (1,2) - (0,2)) \\
 & (0,2)\ \ (= (1,2) - (1,0))
\end{tikzcd}$$

マヤ $\Gamma(M, T_1)$ $\quad x = (x_1, \ldots, x_m)$

$$M = \{x \in \mathbb{N}^m : x_i \neq x_j\,(i \neq j)\}$$

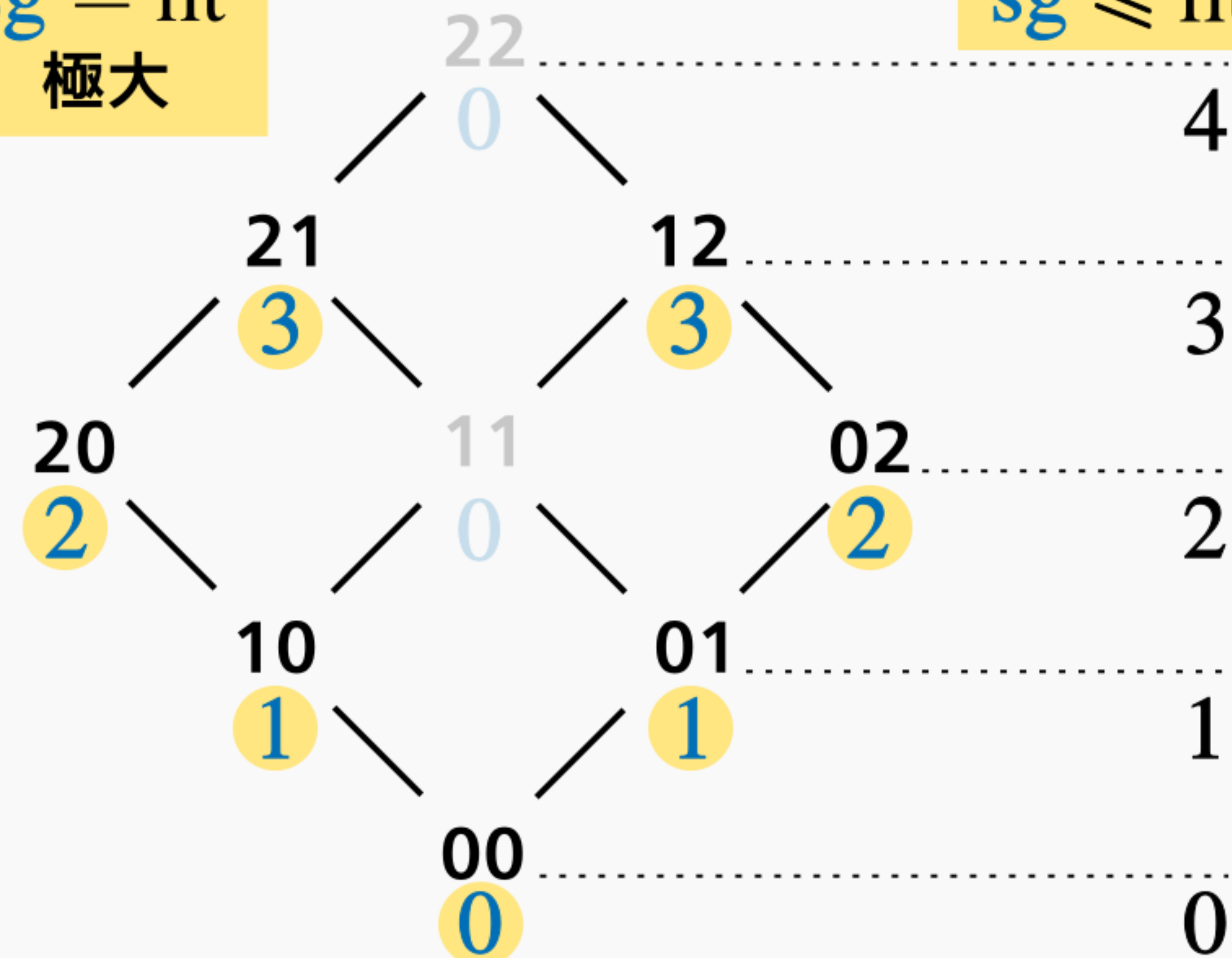
$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
(1,2) \arrow[dr] \arrow[ddr] & (1,1) \notin M \\
 & (1,0) \\
 & (0,2)
\end{tikzcd}$$

極大局面：ニムの場合

$\mathrm{sg} = \mathrm{ht}$

極大

$\mathrm{sg} \leqslant \mathrm{ht}$



Flanigan's Rim$_p$ ： $\Gamma(\mathbb{N}^m, T_F^{(p)})$

$$\mathrm{sg}_{\Gamma(\mathbb{N}^m, T_F^{(p)})}(x) = \underbrace{x_1 \oplus_p \cdots \oplus_p x_m}_{\sigma_p(x)}$$

問. p **進法のマヤは存在するか？**

うまく T をとって $\Gamma(M, T)$ のSG関数をマヤのSG関数の 2 の部分を p にしたものにできるか？

$T_F^{(p)}$ ではうまくいかない。

$$T^{(p)} = \left\{ \begin{array}{l} t \in \mathbb{N}^m \setminus \{ \mathbb{0} \} : \\ \mathrm{ord}_p \left(\sum t_i \right) \\ \qquad\qquad = \min \{ \mathrm{ord}_p(t_i) : 1 \leqslant i \leqslant m \} \end{array} \right\}$$

$\mathrm{ord}_p(t) =$ t が p で何回割り切れるか

$\mathrm{ord}_p(0) = \infty \quad \mathrm{ord}_2(12) = 2 \ (2^2 \mid 12,\ 2^3 \nmid 12)$

$$\mathrm{sg}(\mathbb{N}^m, T^{(p)})(X) = \boldsymbol{\sigma}_p(X) = x_1 \oplus_p \cdots \oplus_p x_m$$

SG関数が $\boldsymbol{\sigma}_p$ であるゲームは一つではない

$T^{(2)}$

$$(1,2) \in T^{(2)}$$

$$\operatorname{ord}_2(1+2) = 0$$

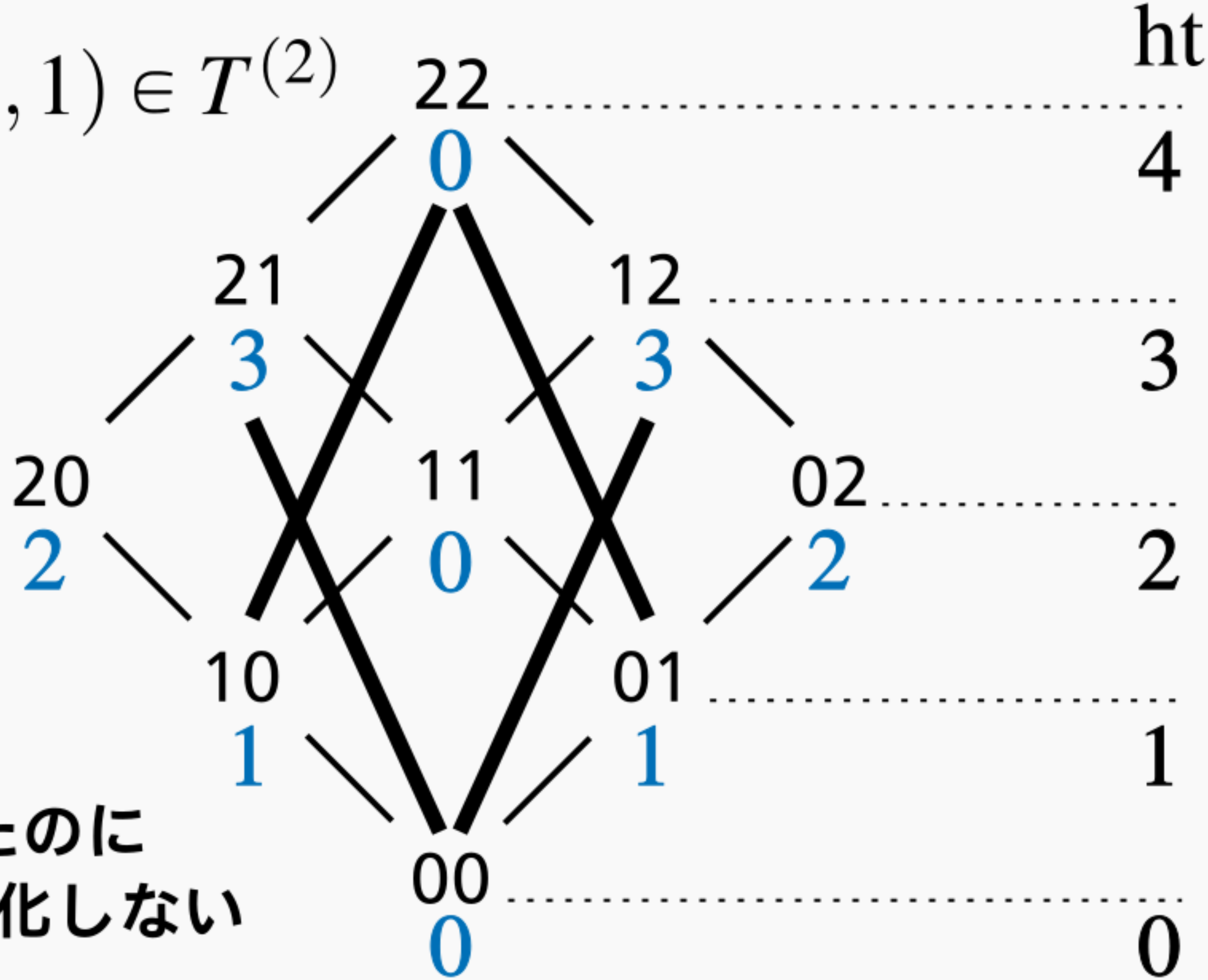
$$\min\{\underbrace{\operatorname{ord}_2(1)}_{0}, \underbrace{\operatorname{ord}_2(2)}_{1}\} = 0$$

$$(1,1) \notin T^{(2)}$$

$$\operatorname{ord}_2(1+1) = 1$$

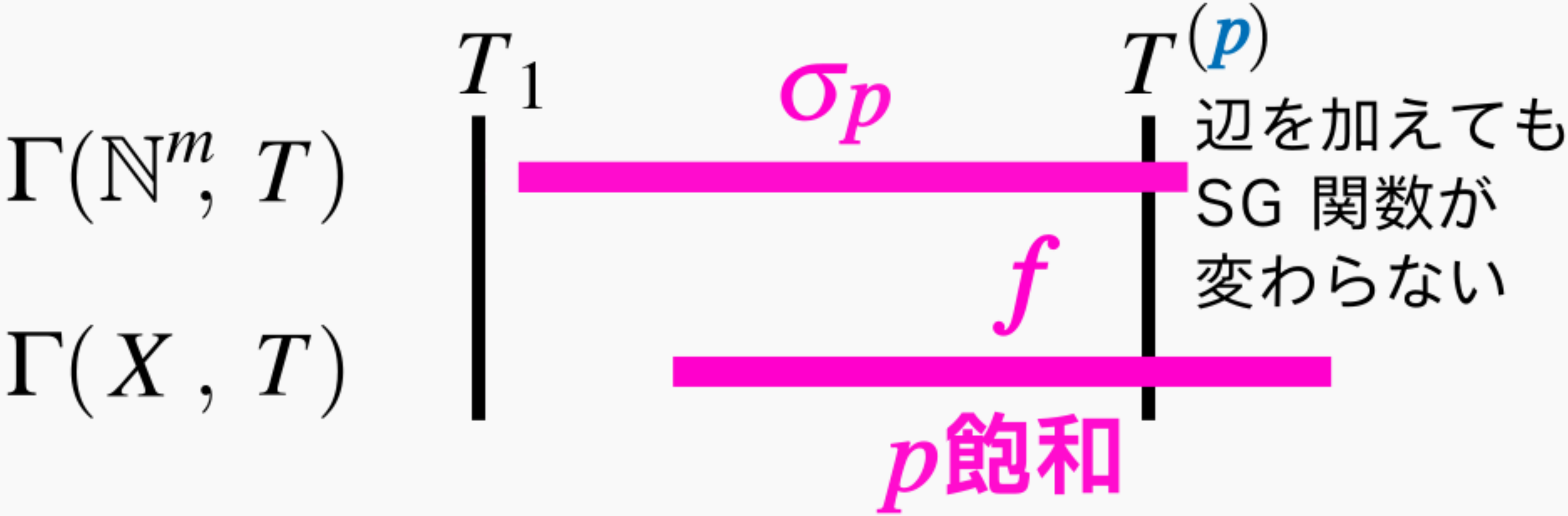
$$\min\{\underbrace{\operatorname{ord}_2(1)}_{0}, \underbrace{\operatorname{ord}_2(1)}_{0}\} = 0$$

$(1,2), (2,1) \in T^{(2)}$



辺が増えたのに
SG数が変化しない

p 飽和

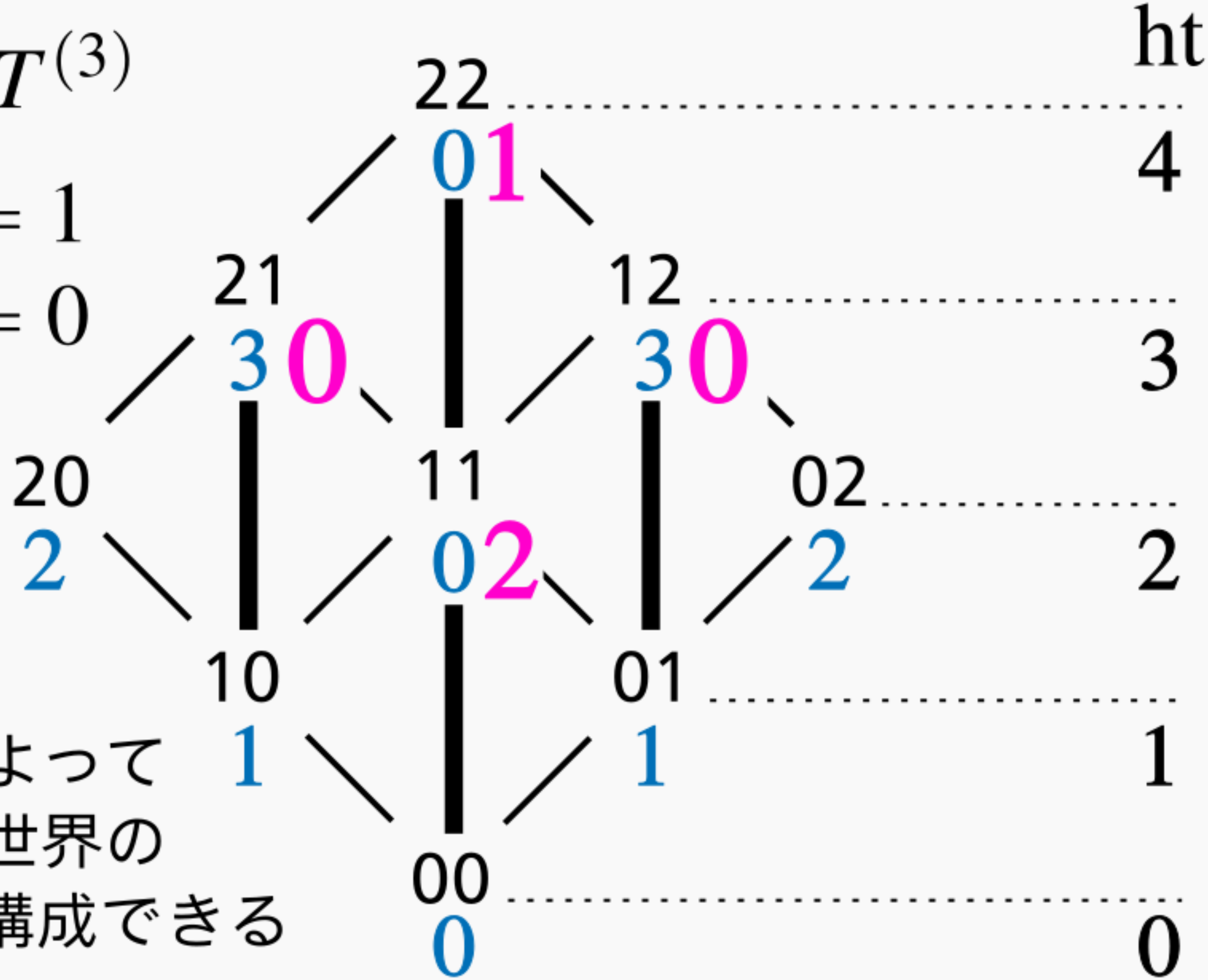


$$T^{(p)} = \left\{ \begin{aligned} & t \in \mathbb{N}^m \setminus \{\mathbb{0}\} : \\ & \operatorname{ord}_p\left(\sum t_i\right) \\ & \qquad\qquad = \min\{\operatorname{ord}_p(t_i) : 1 \leqslant i \leqslant m\} \end{aligned} \right\}$$

$(1,1) \in T^{(3)}$

$2 \oplus_3 2 = 1$

$2 \oplus_3 1 = 0$



p 飽和によって
p 進法の世界の
ゲームを構成できる

❶ **石とりゲーム**

定義と例、極大局面

❷ **p 飽和**

動機、定義と例

❸ **ゲームと表現**

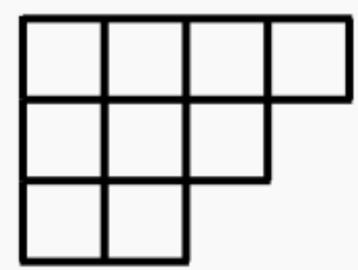
p 飽和マヤ、極大局面と表現

フック長を使って SG 数を計算できる

$$\Gamma(M, T_1) \qquad M = \{x \in \mathbb{N}^m : x_i \neq x_j (i \neq j)\}$$

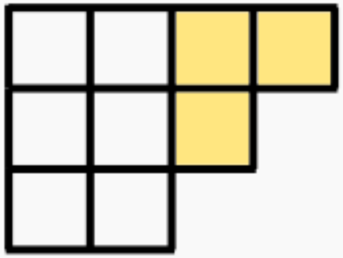
マヤの局面 $\longrightarrow$ **Young図形**

$$(2,6,4) \xrightarrow{\text{並び替え}} (6,4,2) \xrightarrow{-(2,1,0)} (4,3,2)$$



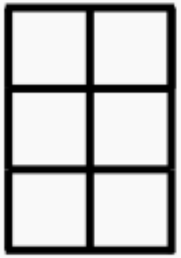
マヤの局面 → **Young図形**

$(2,6,4)$ →



石をとる ↓ ↓ **フックをぬく**

$(2,3,4)$ →



マヤの局面をYoung図形と思う

高さ $\mathrm{ht}(Y)$ = **箱の数** $|Y| = 9$

フック長

6	5	3	1
4	3	1	
2	1		

定理：マヤのSG公式(佐藤)

Y : マヤの局面

6	5	3	1
4	3	1	
2	1		

$$\mathrm{sg}(Y) = \bigoplus_{2} N_2(h)$$

h : Y のフック長

$$= 3 \oplus_2 1 \oplus_2 7 \oplus_2 1 \oplus_2 1 \oplus_2 3 \oplus_2 1 \oplus_2 1 \oplus_2 1 = 7$$

$$N_2(h) = h \oplus_2 (h-1) = 1 + 2 + \cdots + 2^{\mathrm{ord}_2(h)}$$

h	1	2	3	4	5	6	7	8
$N_2(h)$	1	3	1	7	1	3	1	15

Y : p 飽和マヤの局面

$$\mathrm{sg}(Y) = \underset{h:\,Y\text{のフック長}}{\bigoplus\nolimits_{p}} N_{p}(h)$$

$$\|$$

$$\phi_{p}(Y)$$

6	5	3	1
4	3	1	
2	1		

$$N_{p}(h) = h \ominus_{p} (h-1) = 1 + p + \cdots + p^{\mathrm{ord}_{p}(h)}$$

h	1	2	3	4	5	6	7	8
$N_3(h)$	1	1	4	1	1	4	1	1

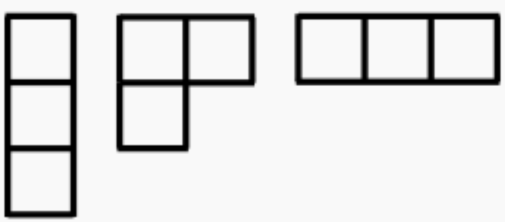
極大局面

$$\phi_p(Y) \stackrel{?}{=} \mathrm{sg}(Y) \leqslant \mathrm{ht}(Y) = |Y|$$

局面 Y は**極大** $\stackrel{\text{def}}{\iff} \phi_p(Y) = |Y|$

$p = 2$

#箱	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
#極大局面	1	1	2	2	4	4	8	8	8	8	16	16	32



3箱からなる局面の内、
2個が極大

ϕ_2 3 1 3

極大局面

$$\phi_p(Y) \overset{?}{=} \mathrm{sg}(Y) \leqslant \mathrm{ht}(Y) = |Y|$$

局面 Y は**極大** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\phi_p(Y) = |Y|$

$p = 2$

#箱	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
#極大局面	1	1	2	2	4	4	8	8	8	8	16	16	32

|| OEIS

#対称群の既約表現で奇数次数のもの

Macdonaldの特徴付けを使うと

Y が極大 $\iff$ R^Y の次数が p と素

ありがとうございました

❶ p 飽和を使うと p 進法のゲームが作れる

❷ ゲームと表現の関係:

極大局面 $\Longleftrightarrow$ 次数が p と素な表現

❸ p' 成分存在定理:この定理から

$$\mathrm{sg}(Y) = \phi_p(Y) = \bigoplus\nolimits_p N_p(h).$$

h: Y のフック長

ゲームの公式の背景に表現の性質