



公平なサイコロの作り方

谷口 智子, 上原 隆平 (JAIST)

uehara@jaist.ac.jp

<http://www.jaist.ac.jp/~uehara>

2018/03/07

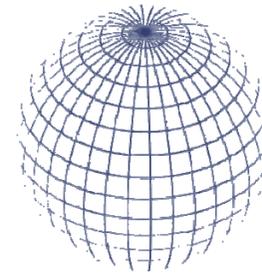
組合せゲーム・パズル研究集会
@大阪府立大



公平なサイコロの作り方

1. 背景・動機

2. 球体を元にしたモデル



3. コインを元にしたモデル



公平なサイコロ：背景

うまくいきませんでしたね。

1. 「トリビアの泉」：サイコロの公平性

- 杉原厚吉先生の「幾何モデル」

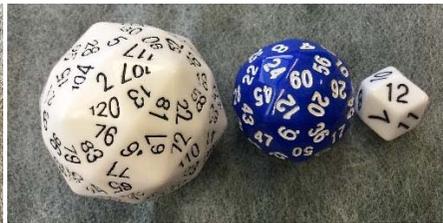
<http://www1.odn.ne.jp/sugihara/geotemple/dice.html>

- 実験結果に**全然**一致せず



鉛筆型，角錐×2型

正多面体 原の型 準正多面体 ココロ 100面サイコロ



歪んだ公平サイコロ
2018/03/07

歪んだ不公平サイコロ

角柱サイコロ

サイコロじゃない

公平なサイコロの作り方

1. 背景・動機

- 人々が納得できる「公平」なサイコロのモデルとは？
- 二つの「公平なサイコロ」の作り方を提案

2. 球体を元にしたモデル

3. コインを元にしたモデル

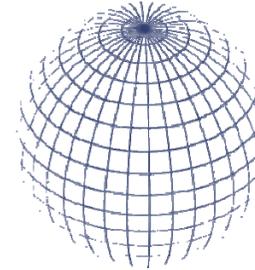


以降, 簡単のため,
「地面についた面」を
「出目」と考える

公平なサイコロ(1): 球体モデル

2. 球体を元にしたモデル

- おそらく誰もが同意するモデル:



密度が一様な球体は, 無限の面を持つ公平なサイコロ

無限個の面は...

球体の面を n 個の同じ面積の面 s_1, s_2, \dots, s_n に分割し, 停止したときに地面についた面 s_i を出目 i と考えれば公平なサイコロ.

転がったら停止しないじゃ...

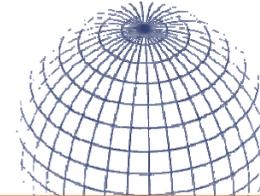
各面 s_1, s_2, \dots, s_n を, 「重心がずれないように」かつ「同じ面積になるように」削れれば公平なサイコロ.

正多面体や準正多面体のサイコロはこれでモデル化できる.

100面サイコロの一方が「公平でない」ことも説明できる.

球面ポロノイ図の応用と考えることができる.

公平なサイコロ(1): 球体モデル



2. 球体を元にしたモデル

各面 s_1, s_2, \dots, s_n を, 「重心がずれないように」かつ「同じ面積になるように」削れば公平なサイコロ.

100面サイコロの一方が「公平でない」ことも説明できる.

球面ボロノイ図の応用と考えることができる.

1と100だけ, 他より出やすい



一般の n に対して, ボロノイ領域が同じ面積になるよう, うまく母点を配置する効率の良いアルゴリズムは知られていない

丸い部分は残っているが, わりとがんばっている

特定の n に対してこれを求めて, それに基づいて設計したサイコロを最近見つけた(未入手...)



(白川俊博氏のパズル懇話会NEWSの記事より)

<http://mathartfun.com/DiceShop.html>



Welcome to the Dice Shop at MathArtFun.com, the online dice store specializing in polyhedral dice and featuring dice by The Dice Lab. We also carry a large selection of dice from other manufacturers, including unusual and hard-to-find dice.

Please select from the categories below. Note that dN refers to a die that presents N choices. This is usually the same as the number of faces ("sides"), but not always.

- Individual d4, d6, d8, d10, d12, and d20
- Individual d3, d5, d7, d9, d11, d13, and d15
- Individual d14, d16, d18, d22, d24, and d30
- Six-sided dice of all types
- Double dice, three-in-a-cube, and round dice
- Weighted, loaded, and s...
- Unique designs by The Dice Lab: d48, d120, etc.
- Dice Sets
- ...nsitive, Go First, and Sicherman dice

1
他

丸

一般の n に対して、ポロノイ領域が同じ面積になるよう、うまく母点を配置する効率の良いアルゴリズムは知られていない

特定の n に対してこれを求めて、それに基づいて設計したサイコロを最近見つけた(未入手...)

公平なサイコロ(1): 球体モデル

実用的なアルゴリズムは
存在する(今日は略)

2. 球体を元にしたモデル

各面 s_1, s_2, \dots, s_n を, 「重心がずれないように」かつ「同じ面積になるように」削れば公平なサイコロ.



潜在的な応用?

一般の n に対して, ボロノイ領域が同じ面積になるよう, うまく母点を配置する効率の良いアルゴリズムは知られていない



ゴルフボール



レドーム (Radome
=Radar+Dome)

公平なサイコロ(2): コインモデル

3. コインを元にしたモデル

- おそらく誰もが同意するモデル:



厚み0の一様なコインは, 公平な2面サイコロ

厚みは0じゃないので...

厚み h の一様なコインは, 確率が
表:裏:側面= $p:p:1-2p$ の不公平な3面サイコロ

h に対する p の単調性...

h の増加につれて, p は単調に小さくなる
任意の確率 $0 < p < 1/2$ に対して表裏が出る確率 $2p$ の円柱サイコロが作れる



側面を削れば, 任意の $n \geq 5$ に対して公正な $(n-2)$ 角柱サイコロが作れる



公平なサイコロ(2): コインモデル

3. コインを元にしたモデル

- おそらく誰もが同意するモデル:

厚み0の一様なコインは, 公平な2面サイコロ

厚みは0じゃないので...

側面を削れば, 任意の $n \geq 5$ に対して公正な $(n-2)$ 角柱サイコロが作れる

とってつけたような研究動機:
サイコロの面には冗長性がないようにしたい

- 同じ数字を2つ以上の面に使うのは嫌だ
- 決して出ない面を作るのは嫌だ

この2つの
テクニックで,
任意の n 面サイコロ
がわりと簡単に
作れる

もちろん
方法は
ヒミツ



公平なサイコロ(2): コインモデル

3. コインを元にしたモデル

- おそらく誰もが同意するモデル:

厚み0の一様なコインは, 公平な2面サイコロ

厚みは0じゃないので...

側面を削れば, 任意の $n \geq 5$ に対して公正な $(n-2)$ 角柱サイコロが作れる

もう一つの研究動機:

市販の n 角柱サイコロは, 実は公平ではない

- 実際に振って(もらって)みると, かなり....
- 公平になる「高さ」を算出したい



どっちが
公平じゃない
かはヒミツ

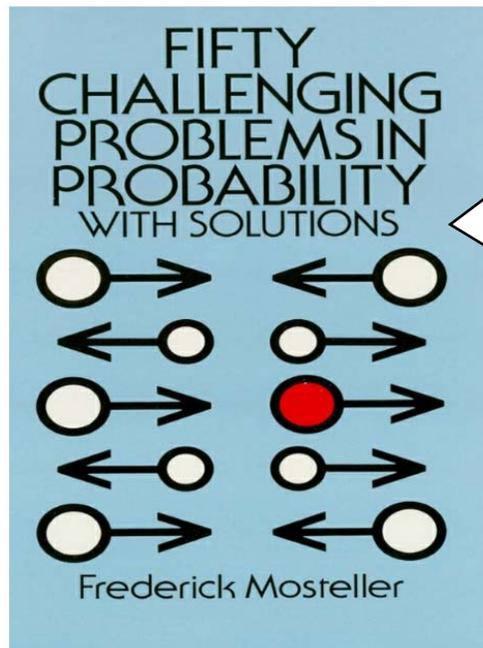
公平なサイコロ(2):コインモデル

3. コインを元にしたモデル

- 「厚みのあるコイン問題」: 先行研究があった



(Thanks to 岩沢宏和氏)



1965年の確率の本

38. The Thick Coin
How thick should a coin be to have a 1/3 chance of landing on edge?

よく読むと、杉原厚吉先生が独立に考案したモデルと本質的に同じモデル!!
「回転しないコインがランダムな角度でゆっくりと地面に着地したときの重心に対する傾きで...」



公平なサイコロ(2): コインモデル

3. コインを元にしたモデル

- 「厚みのあるコイン問題」: 最近の先行研究があった

(Thanks to 岩沢宏和氏)



Probability, geometry, and dynamics in the toss of a thick coin

Ee Hou Yong

Department of Physics, Harvard University, Cambridge, Massachusetts 02138

L. Mahadevan^{a)}

Department of Physics, School of Engineering and Applied Sciences, Harvard University, Cambridge, Massachusetts 02138

(Received 3 February 2011; accepted 2 August 2011)

When a thick cylindrical coin is tossed in the air and lands without bouncing on an inelastic substrate, it ends up on its face or its side. We account for the rigid body dynamics of spin and precession and calculate the probability distribution of heads, tails, and sides for a thick coin as a function of its dimensions and the distribution of its initial conditions. Our theory yields a simple expression for the aspect ratio of homogeneous coins with a prescribed frequency of heads or tails compared to sides, which we validate using data from the results of tossing coins of different aspect ratios. © 2011 American Association of Physics Teachers.

[DOI: 10.1119/1.3630934]

2011年の物理の論文
Am. J. Phys. 79(12), 2011.

公平なサイコロ(2): コインモデル

3. コインを元にしたモデル

- 「厚みのあるコイン問題」: 最近の先行研究があった

(Thanks to 岩沢宏和氏)



同論文より

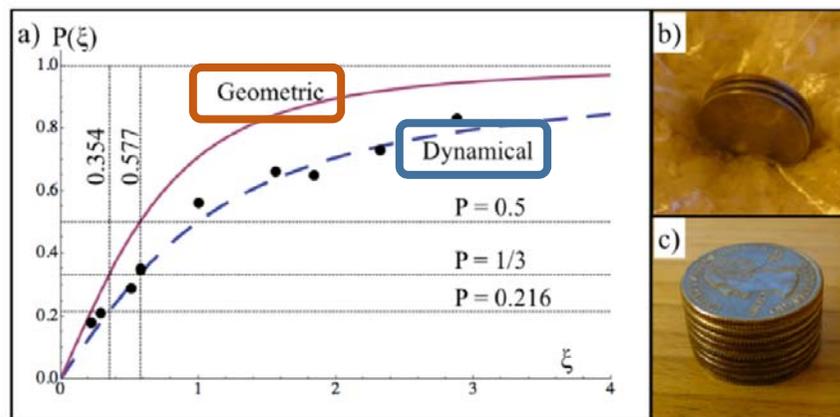


Fig. 5. (a) Probability of sides for a vigorously spun coin ($u\omega/g \geq 20$) as a function of the aspect ratio ξ . The dots correspond to our experiments and denote the frequency of sides for 100 flips. The solid and dashed lines correspond to the geometrical and dynamical definitions in the text. (b) The probability of a three-coin landing on sides on a highly inelastic surface made of rice grains. (c) A dynamically fair three-sided coin composed of stacking eight U.S. quarters, with an aspect ratio $\xi \approx 0.58$.

古典的な幾何モデル
はうまくいかない

我々が提案するダイ
ナミックモデルなら実
験結果にも合う!

公平なサイコロ(2):コインモデル

3. コインを元にしたモデル ならば...

- ダイナミックモデルで13面サイコロを作ろう!



www.gathering4gardner.org/g4g13-information/

Gathering 4 Gardner. ABOUT EVENTS ARCHIVE

G4G13 INFORMATION

GATHERING 4 GARDNER 13

Biennial Gathering 4 Gardner Conference (2018)

15th, 2018, G4G participants will assemble, in Martin Gardner's name, to celebrate recreational mathematics, magic, puzzles, skepticism, science, art, literature, and the intersections of these subjects. Participants will give presentations, performances, original papers, and exhibits. Countless exchanges of ideas and examples of trickery and delight.

Unlike many other conferences, G4G is participatory in nature; all attendees are encouraged to contribute to the community, whether that be a 5-minute presentation or performance, an original paper, a unique exhibit or a novelty item for the gift exchange.

Please bookmark this page and check regularly for updates!



全然うまく
いきません....

公平なサイコロ(2): コインモデル

3. コインを元にしたモデル

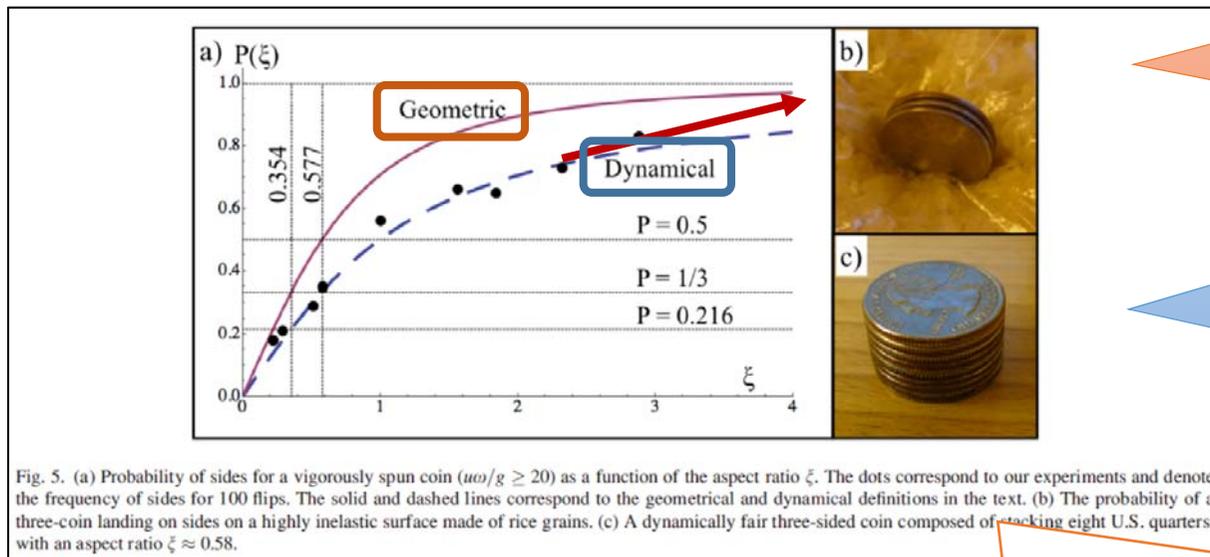


Fig. 5. (a) Probability of sides for a vigorously spun coin ($u\omega/g \geq 20$) as a function of the aspect ratio ξ . The dots correspond to our experiments and denote the frequency of sides for 100 flips. The solid and dashed lines correspond to the geometrical and dynamical definitions in the text. (b) The probability of a three-coin landing on sides on a highly inelastic surface made of rice grains. (c) A dynamically fair three-sided coin composed of stacking eight U.S. quarters, with an aspect ratio $\xi \approx 0.58$.

古典的な幾何モデル
はうまくいかない

我々が提案するダイ
ナミックモデルなら実
験結果にも合う!

上記のグラフの範囲外では、かなり実験結果からずれる
(今回の場合は $P=11/13$)

公平なサイコロ(2):コインモデル

3. コインを元にしたモデル

- 現段階でわかったこと(あまりない)
 - 古典的な幾何モデル(杉原先生のモデルや確率の本のモデル)は「ほぼ無重力」「静かに回転せず真下に落下」などの非現実的な仮定が必要
 - 近年のダイナミックモデルは回転や弾む動作なども考えているが、細長い円柱にまでなると、うまくいかない
 - 上原の観察:円柱の軸方向の回転を考慮してないため、円柱が少しでも回転して転がりだすと、二度と立ち上がれない
 - ✓ n 角柱のサイコロは、外接円の円柱と内接円の円柱の間と見なすと、実験結果には合致する.
 - ✓ 円柱に関する実験データを集めれば、設計できる.



公平なサイコロ(2):コインモデル

3. コインを元にしたモデル

- 現段階でわかったこと(あまりない)

◆実験に基づく13面サイコロ(11角柱)の設計

- ✓ 直径20mmの円柱に基づく実験データでは高さ20.2mmと21.0mmの間
- ✓ 実物をたくさん作って数百回投げ(てもらっ)た結果は20.3mm
- ✓ G4G13用に作ったお土産を先行配布!

JAISTの
• 3次元プリンタと
• UVプリンタと
• 谷口さん
に感謝してあげてください





公平なサイコロの作り方：まとめ

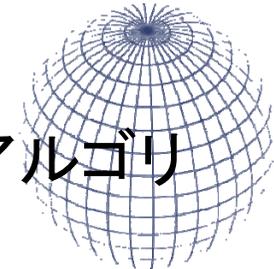
1. 単純な方法

- 「冗長な面」を許せば、かなり自由度は高い。



2. 球体を元にしたモデル

- n 点に対して球面ボロノイ図を求める実用的なアルゴリズムがあるので、これに基づいて作れる。



3. コインを元にしたモデル

- 今は実際に投げて実験データを集める必要がある。



公平なサイコロの作り方:まとめ

未解決問題＋未開拓問題:

- コインの「目」の配置問題: 重心のずれと関係がある
 - R. Bosch, R. Fathauer, and H. Segerman, “Numerically Balanced Dice,” in *The Mathematics of Various Entertaining Subjects*, Vol. 2, 2017.
(多面体上の魔方陣的な番号の配置を考えている論文)
- 直方体サイコロで「狙った確率」を出す



- 与えられた3辺の長さ a, b, c から各面の確率を計算
- 与えられた確率を出すサイコロの設計