一般化パイプパズルの計算量について

○白山 卓夢 (JAIST)
大舘 陽太 (熊本大)
上原 隆平 (JAIST)

今年で開山1301年

序論1

タイリングパズルはポピュラーなパズル.

ジグソーパズルや**エッジマッチングパズル**には先行研究が存在する.

- エッジマッチングパズルとは，絵柄(色)を合わせてタイルを配置するパズル.

インスタンスとゴールの例

約2億円の懸賞金がついた
エッジマッチングパズル
“ETERNITY2”
（期限は切れている）

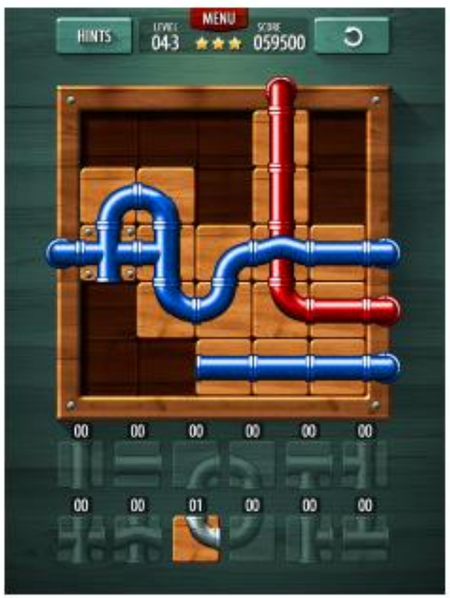
序論2

パイプパズルについて研究する.
- エッジマッチングパズルの新たな種類.

パイプパズルの入力は「パイプのカード」と，複数の「端点」.

目的は，端点の間をすべてのパイプでつなぐこと.
- 局所的な整合性だけでなく，全体の連結性の考慮も必要である.

パイプパズルには先行研究が存在しない

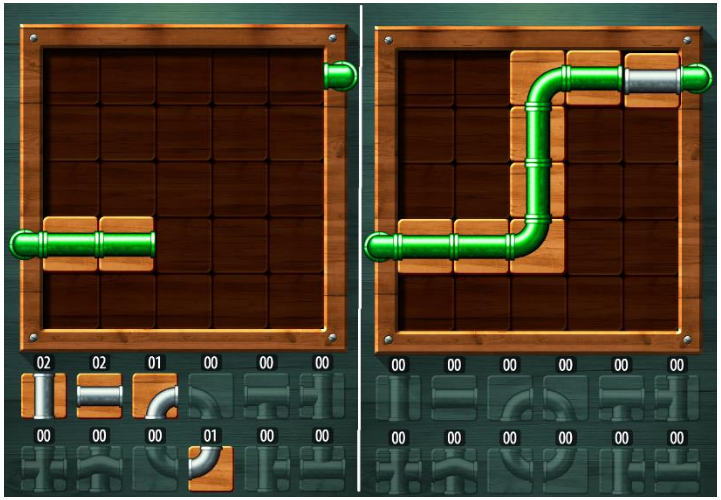


パイプパズルの入力と出力

INPUT：
- 高さh幅wの長方形の盤
- 正方形の**カード**の集合P
- 端点の位置

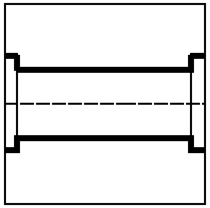
OUTPUT：

端点の間に，すべてのパイプを使った経路ができるか．

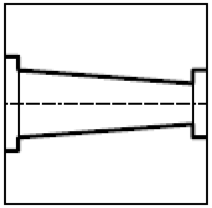


パイプのモデル

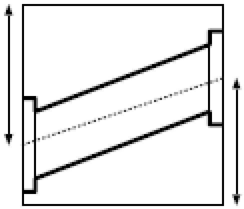
同型モデル：　すべてのパイプが同じ太さ，位置である．



太さモデル：　それぞれのパイプに複数の太さがあり，同じ太さ同士を連結できる．

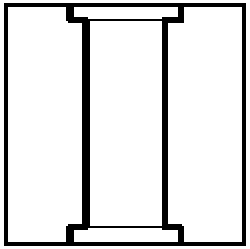


位置モデル：　パイプに複数の位置があり，同じ位置同士を連結できる．

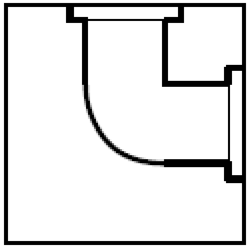


パイプのタイプ

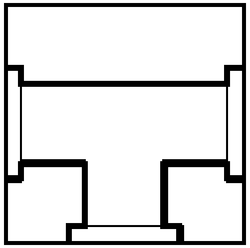
タイプI



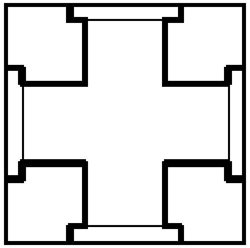
タイプL



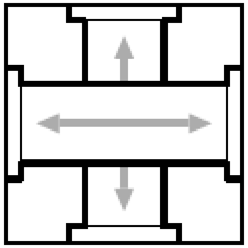
タイプT

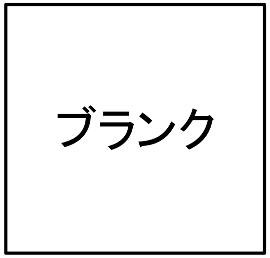


タイプ+



タイプX





一般化パイプパズルの困難さ

本研究では，端点2つのパイプパズルを扱う.

- $1 \times n$パイプパズルなら線形時間.
  - ➢ オイラー路のチェックへ置き換えられる.
- $2 \times n/2$パイプパズルはNP完全.
- $3 \times n/3$パイプパズルはNP完全.
  - ➢ 3-partition問題からの還元で示せる.

- (同型モデル)盤の高さが定数のパイプパズル.
  - ➢ DPに基づくアルゴリズムで多項式時間で解ける.
- (同型モデル)盤の高さが無限のパイプパズル.
  - ➢ 解がある入力を場合分けできる.

$1 \times n$パイプパズル

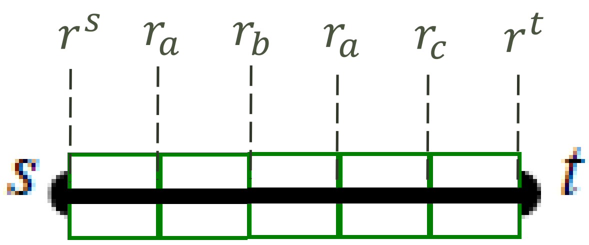
（太さモデル）
（位置モデル）

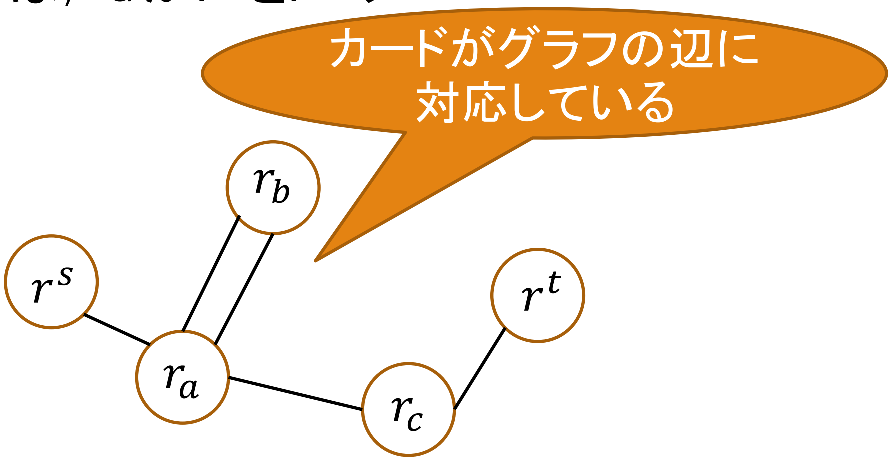
$1 \times n$パイプパズル

- 太さモデル，位置モデルのパイプパズルが線形時間で解ける．

- $R = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$をパイプの太さ（位置）の集合とする．
- Cを入力されたカードの集合とする．
  - ➢ カードのパイプはそれぞれ2つの太さ(位置)をもつ．例．$\{r_i, r_j\}$
- グラフ$G = (R, C)$を構成する．

- パイプパズルが解を持つ必要十分条件は，Gがr^sとr^tの間にオイラー路を持つこと．





$2\times n/2$ ・ $3\times n/3$パイプパズル （太さモデル） （位置モデル）

$2 \times n/2$ ・ $3 \times n/3$パイプパズル

NPに属するので，NP困難性を示し，NP完全性の証明とする．

NP困難性を示すため，**3-partition問題**からの還元を示す．

3-partition問題：

入力：$3m$個の正整数集合$A = \{a_1, a_2, \dots, a_{3m}\}$.

- （ただし$B = \Sigma_{i=1}^{3m} a_i/m$は正整数で，かつ$\frac{B}{4} < a_i < \frac{B}{2}$とする）

出力：3つ組の集合をm個作り，組ごとの3つの要素の合計を同じ値(つまりB)にできるかどうか．

例． $A = \{4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 7\}$ ⇒ $\{4,5,6\}, \{7,4,4\}, \{4,5,6\}, \{5,5,5\}$ $B = 15$

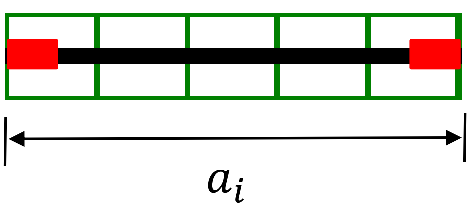
Michael R. Garey and David S. Johnson, *COMPUTERS AND INTRACTABILITY : A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. FREEMAN AND COMPANY New York, p.96, 1979.

還元

- フレームを構成する.
  - 赤い部分は汎用の太さ(位置).
  - それ以外は一意的なパイプの太さ(位置)で連結している.

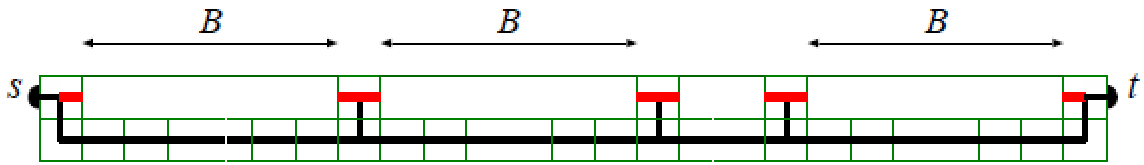
- フレームの中へ，整数から作成したカードを敷き詰める.
  - 整数a_iから作成したカードは$1 \times a_i$のピースとなるように一意的に連結する.
  - ピースの両端に現れるパイプは汎用の太さ(位置).

◆ 整数からなるピース

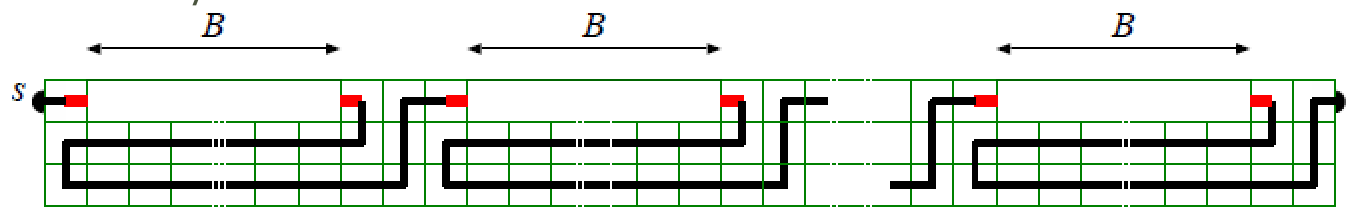


$\times 3m$

◆ $2 \times n/2$の場合のフレーム

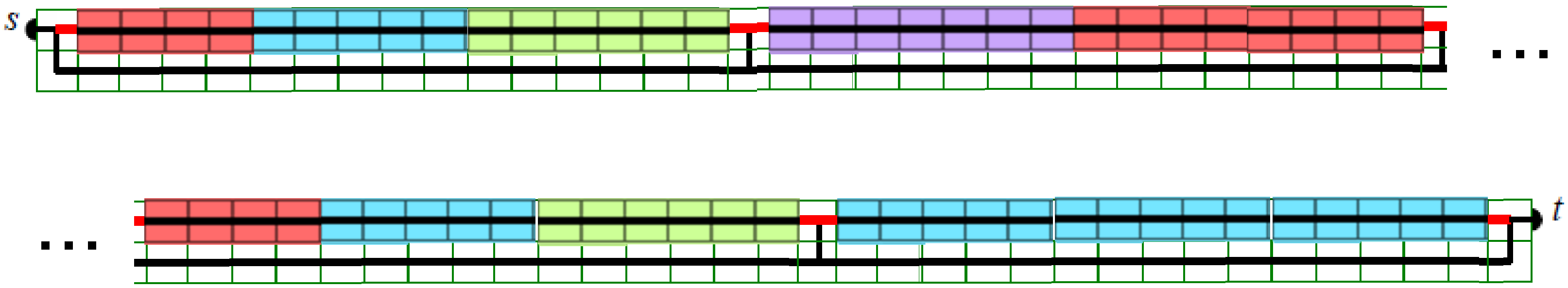


◆ $3 \times n/3$の場合のフレーム



例.

$A = \{4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 7\}$ → $\{4,5,6\}, \{7,4,4\},$
$\{4,5,6\}, \{5,5,5\}$



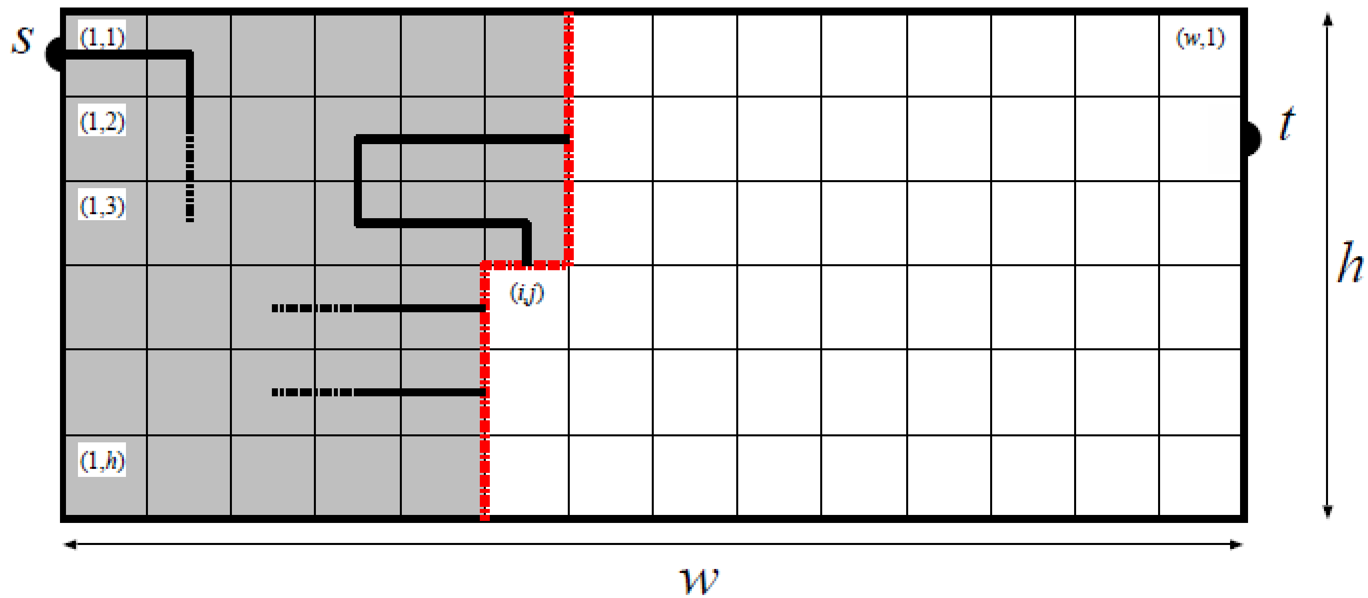
高さが定数のパイプパズル （同型モデル）

高さが定数のパイプパズル

- 同型モデルについて，DPに基づくアルゴリズムを示す．
- このアルゴルズムは多項式時間・多項式領域で実行できる．

- すべての情報を覚えると指数時間かかるため，解をもちうる盤面を最低限の情報だけで管理するアルゴリズムを示す．
  - 既に使ったカードの種類・枚数と，境界のつながりを管理．

配置状態：$S[u_B, u_I, u_L, u_T, u_+, u_X, c_1, c_2 \ldots, c_{h+1}]$



アルゴリズム

配置状態: $S[\boldsymbol{u_B}, \boldsymbol{u_I}, \boldsymbol{u_L}, \boldsymbol{u_T}, \boldsymbol{u_+}, \boldsymbol{u_X}, \boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2} \ldots, \boldsymbol{c_{h+1}}]$

すべてのS[]を0で初期化する.
初期盤面$S[0, 0, \ldots, 0, c_{0,1}, \ldots, c_{0,h+1}] = 1$とする.
For $k = 0$ to $n(= wh)$ **do**

for $u = k$ (uは使用カード枚数)となる配置状態$S[\boldsymbol{u_B}, \ldots, \boldsymbol{c_{h+1}}] = \boldsymbol{1}$について **do**
カードの配置をすべて試す.
次をすべて満たすとき，更新した配置状態$S[\boldsymbol{u'_B}, \ldots, \boldsymbol{c'_{h+1}}] = \boldsymbol{1}$とする.
1. 矛盾なく配置できる.
2. 配置したカード枚数が入力を超えない.
3. 閉路を作らない.

end for

if $u = k$となるすべてのS[]が0 **then**
このパイプパズルに解がない.
end for
このパイプパズルに解がある.

アルゴリズム

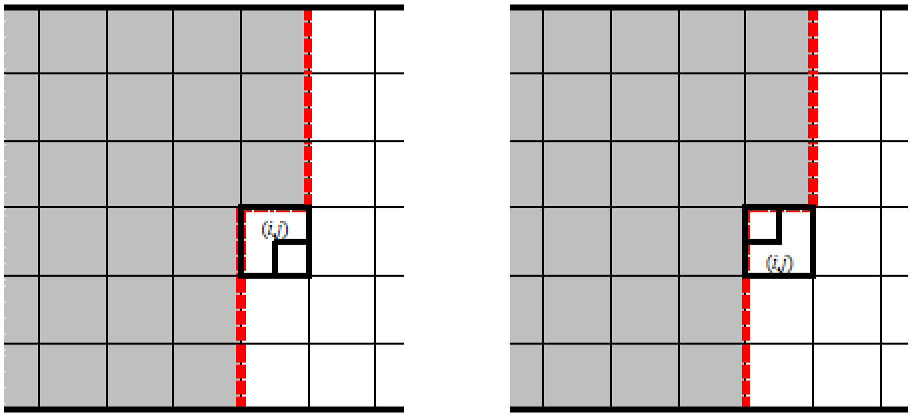
配置状態 : $\mathrm{S}[\boldsymbol{u_B}, \boldsymbol{u_I}, \boldsymbol{u_L}, \boldsymbol{u_T}, \boldsymbol{u_+}, \boldsymbol{u_X}, \boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2} \ldots, \boldsymbol{c_{h+1}}]$

すべてのS[]を0で初期化する.
初期盤面$\mathrm{S}[0, 0, \ldots, 0, c_{0,1}, \ldots, c_{0,h+1}] = 1$とする.
For $k = 0$ to $n(= wh)$ **do**

for $u = k$ (uは使用カード枚数)となる配置状態**S**$[\boldsymbol{u_B}, \ldots, \boldsymbol{c_{h+1}}] = \boldsymbol{1}$について **do**
カードの配置をすべて試す.
次をすべて満たすとき，更新した配置状態S$[\boldsymbol{u'_B}, \ldots, \boldsymbol{c'_{h+1}}] = \boldsymbol{1}$とする.
1. 矛盾なく配置できる.
2. 配置したカード枚数が入力を超えない.
3. 閉路を作らない.

end for

if $u = k$となるすべてのS[]が0 **then**
このパイプパズルに解がない.
end for
このパイプパズルに解がある.



実行時間

実行時間は$O\left(h\left(3+\frac{h}{2}\right)^{h+1} n^5\right)$. これは多項式時間である.

配置状態の数とそれぞれにカードを追加する時間で決まる.

配置状態がもちうる状態数は$O\left(\left(3+\frac{h}{2}\right)^{h+1} n^5\right)$.

$$\mathbf{S}[\underbrace{\boldsymbol{u_B}, \boldsymbol{u_I}, \boldsymbol{u_L}, \boldsymbol{u_T}, \boldsymbol{u_+}, \boldsymbol{u_X}}_{0\sim n}, \underbrace{\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2} \dots, \boldsymbol{c_{h+1}}}_{\text{管理に必要なラベルは } \frac{h}{2}+3}]$$

- ひとつなぎである継ぎ目を管理するラベルを付け替えることは$O(h)$時間でできる.

高さが無限のパイプパズル

（同型モデル）
（タイプI，タイプLのみ）

高さが無限のパイプパズル

- 上下が無限であるため，盤内への敷き詰めを考えなくてよい.
- 解がある入力と解がない入力を場合分けする.

- 入力されたカードのそれぞれの枚数によって解があることを判定できるため，線形時間で解ける.

◆ このパイプパズルに解があるのは，$n \geq w + h_t$のときのみ.
（n:カードの枚数，w:盤の幅，h_t:端点tのsに対する相対高さ）

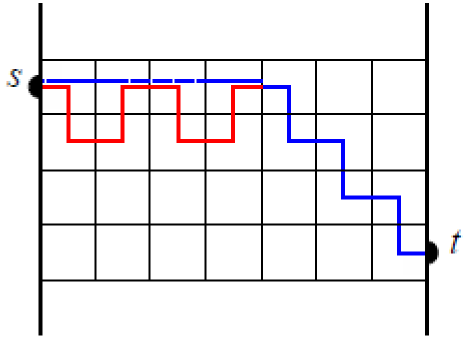
➢ 幅$w = 1$の場合

➢ 幅$w = 2$の場合
  - ☐ $h_t = 0$の場合
  - ☐ $h_t > 0$の場合

➢ 幅$w = 3$の場合
  - ☐ $h_t = 0$の場合
  - ☐ $h_t > 0$の場合

➢ 幅$w > 3$の場合
  - ☐ $h_t = 0$の場合
  - ☐ $w > h_t > 1$の場合

  （$w < h_t$は相当難しい）



まとめ

- $1 \times n$パイプパズルなら線形時間.
  - オイラー路のチェックへ置き換えられる.

- $2 \times n/2$パイプパズルはNP完全.
- $3 \times n/3$パイプパズルはNP完全.
  - 3-partition問題からの還元で示せる.

- （同型モデル）盤の高さが定数のパイプパズル.
  - DPに基づくアルゴリズムで多項式時間で解ける.

- （同型モデル）盤の高さが無限のパイプパズル.
  - 解がある入力を場合分けできる.

今後の課題

・他モデル　・2人ゲーム　・一部のカードが初めから置かれている場合
・カードの回転を許さない場合　・正方形以外のカードがある場合
・タイリングパズルとの関係性