

Simple-Kalahにおける 勝敗確定の十分条件

前井 康秀*, 木谷 裕紀, 土中 哲秀(九州大学)
小野 廣隆 (名古屋大学)

Kalahとは

- ◆ アフリカ, アジアなどで古くから遊ばれているゲーム「Mankala」のうちのひとつ
 - ◆ 「Mankala」は下図の盤を使うゲームの総称
 - ◆ 他にも100種以上のルールが存在



<https://ja.wikipedia.org/>より引用

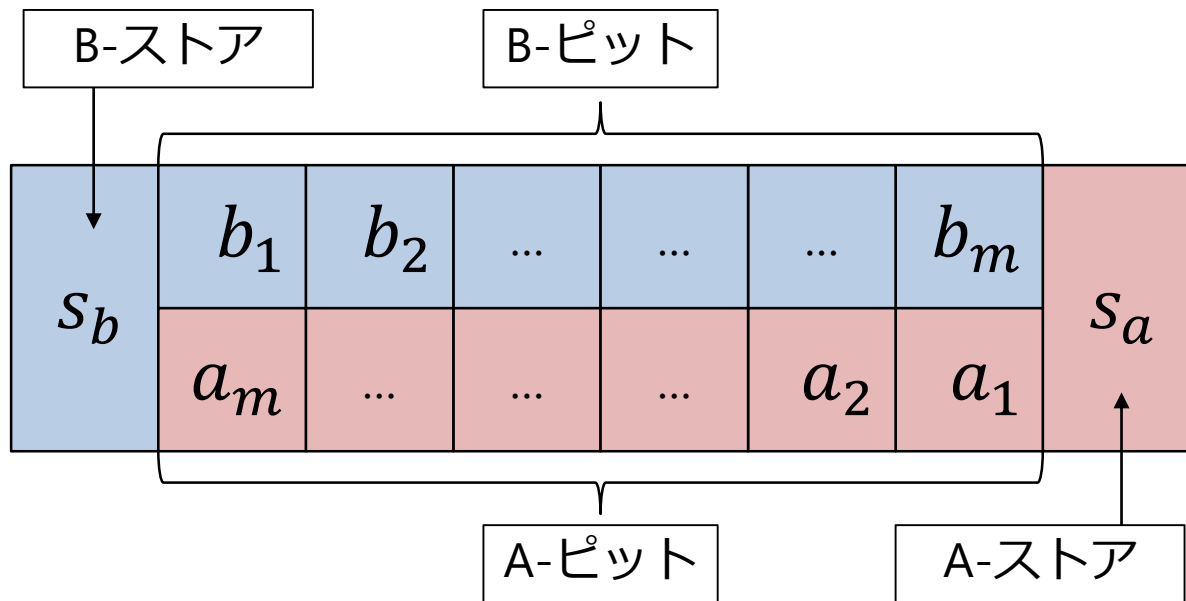
本研究の目的

- ◆ Kalah → 「二人ゼロ和有限確定完全情報ゲーム」のひとつ
 - ◆ 理論上は完全な先読みが可能
 - 任意の盤面は必ず「どちらかのプレイヤーが必勝戦略を持つ」 or 「引き分け」のいずれかに判定できる
 - ◆ しかし、一般に必勝戦略を見つけることは難しい
- ◆ Kalahを単純化したSimple-Kalahを定義して考察を行う
 - ◆ Kalahの解析につながると期待



<https://ja.wikipedia.org/>より引用

Kalahの用語

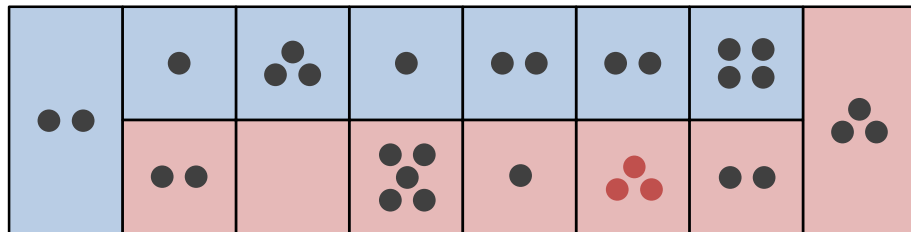


$w(x_i)$: x_i に入っている石の数

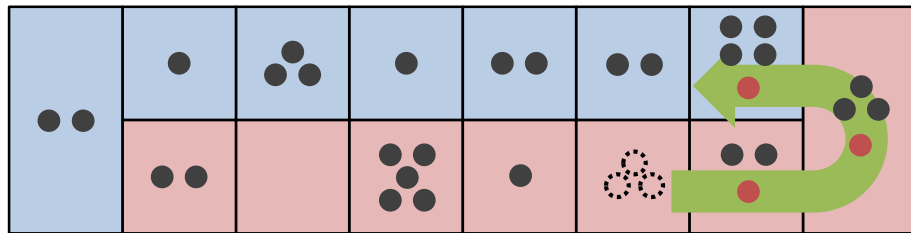
Kalahのルール

①石の動かし方

自身のピットのうち1つを選択して, そのピット内の石を全て取り, 下図の緑矢印の方向に移動させる.



A(赤)が右から2番目のピットを選択

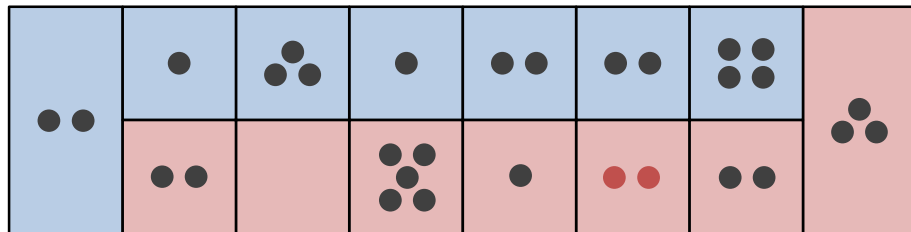


矢印の方向に
石を移動させる

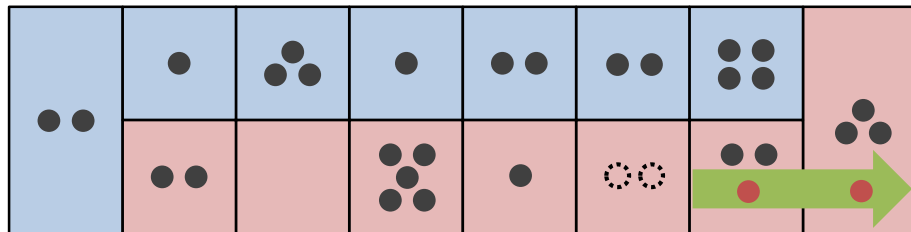
Kalahのルール

②

手番が自身のストアで終了した場合、そのプレイヤーはもう一度手番を行う。



A(赤)が右から2番目のピットを選択

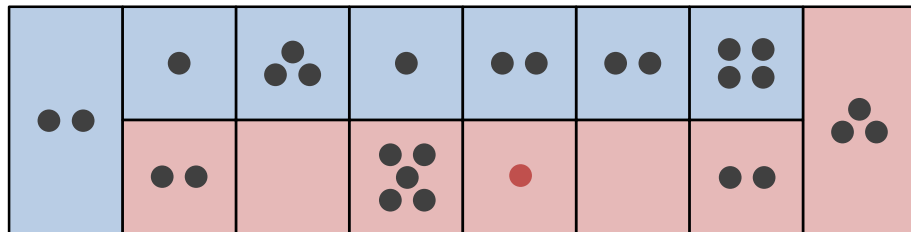


A(赤) はもう一度手番を行う

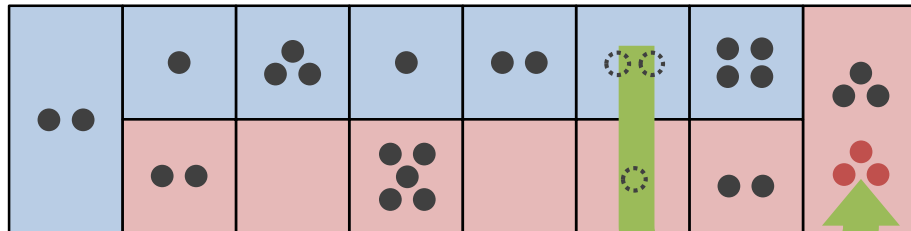
Kalahのルール

③

手番が自身の空のピットで終了した場合、その石と対面する相手のピットの石を全てストアに入れる。



A(赤)が右から3番目のピットを選択

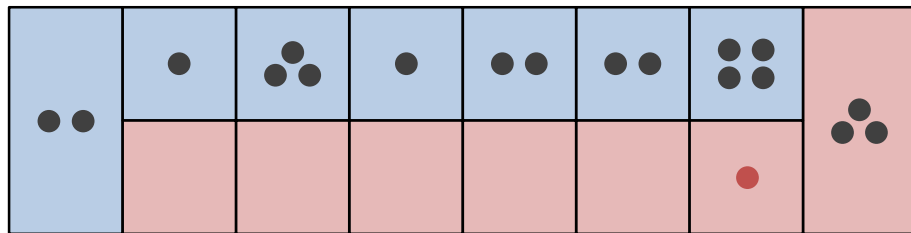


対応する石を自身のストアに入れる

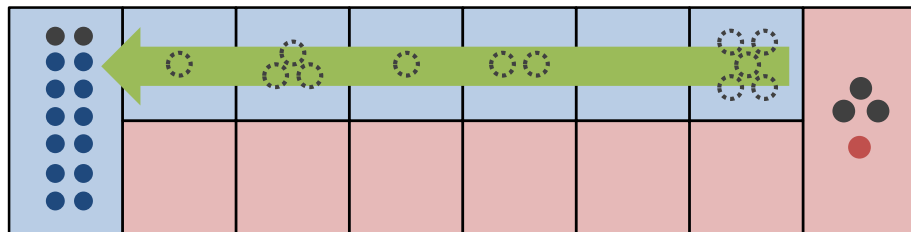
Kalahのルール

④終了条件

片方のプレイヤーのすべてのピットから石がなくなった場合、もう片方のプレイヤーは自身のピットにある石を全てストアに移し、ゲームを終了する。



A(赤)が右から1番目のピットを選択



対応する石を自身のストアに入れる

Kalahのルール

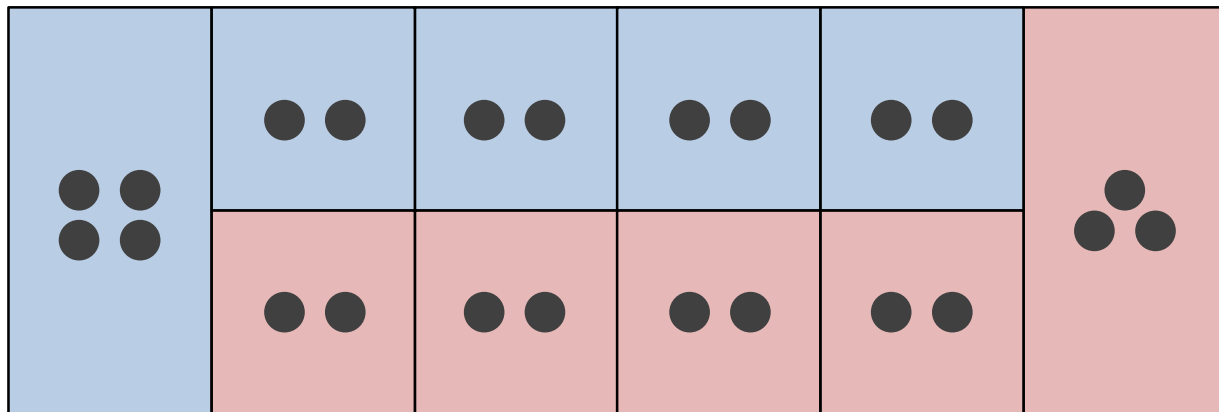
Kalahのルールまとめ

- ① 自身のピットのうち1つを選択して、そのピット内の石を全て取り、下図の緑矢印の方向に移動させる。
- ② 手番が自身のストアで終了した場合、そのプレイヤーはもう一度手番を行う。
- ③ 手番が自身の空のピットで終了した場合、その石と対面する相手のピットの石を全てストアに入れる。
- ④ 片方のプレイヤーのすべてのピットから石がなくなった場合、もう片方のプレイヤーは自身のピットにある石を全てストアに移し、ゲームを終了する。

①のみを考えるゲーム→「**Simple-Kalah**」と新たに定義

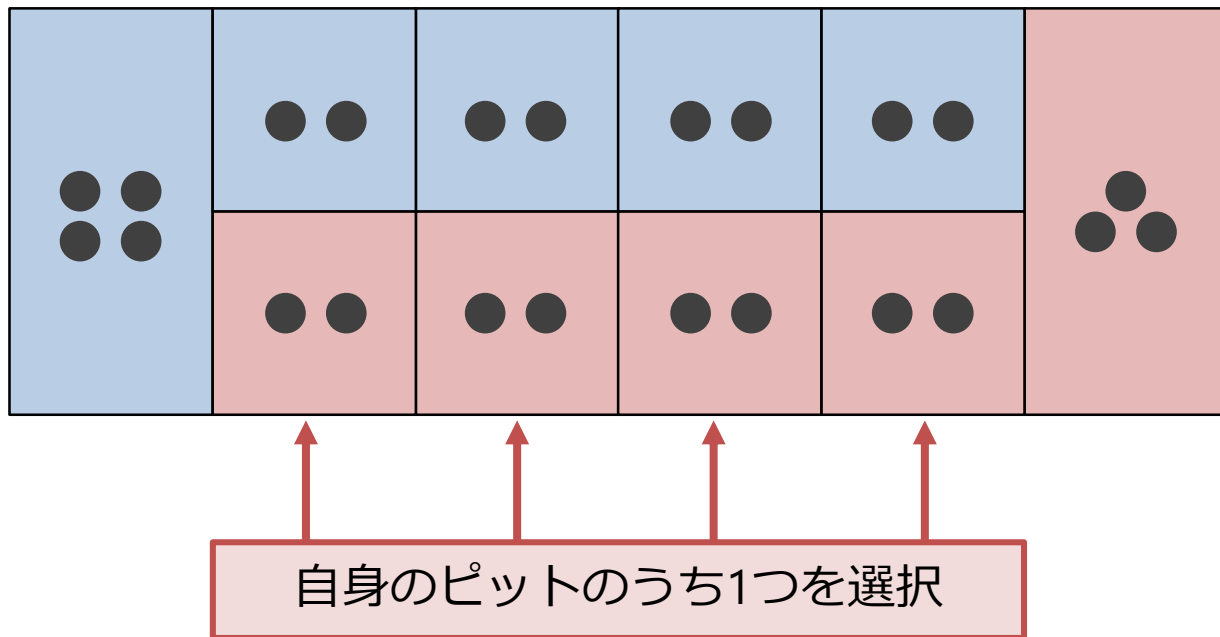
Simple-Kalahのルール

プレイヤーAの手番



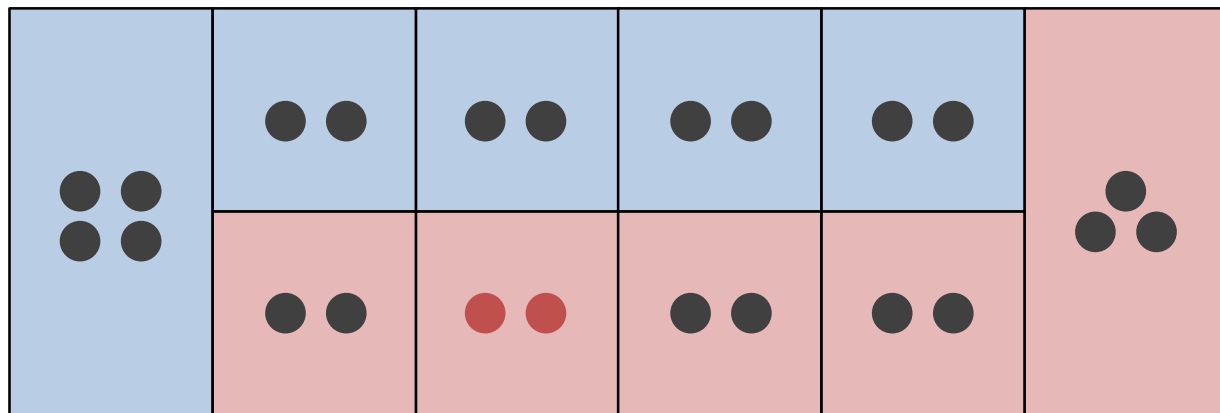
Simple-Kalahのルール

プレイヤーAの手番



Simple-Kalahのルール

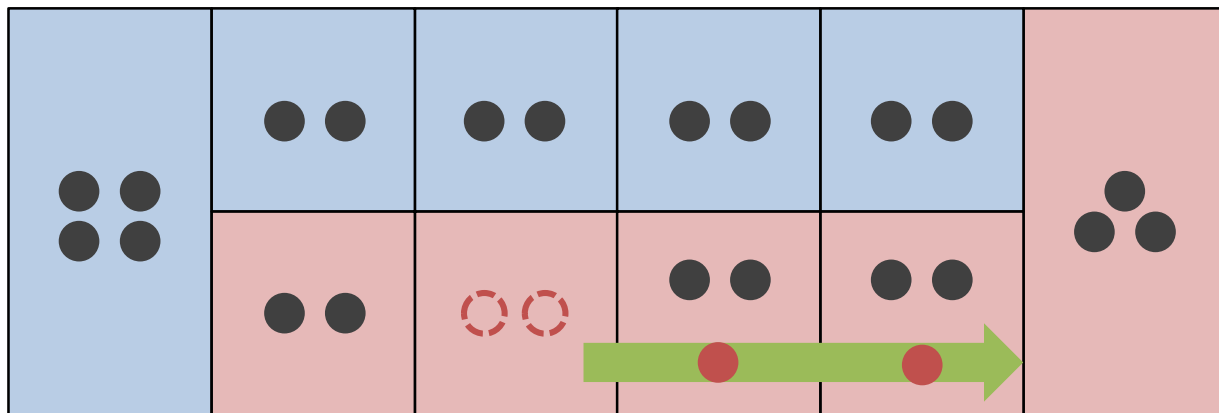
プレイヤーAの手番



自身のピットのうち1つを選択

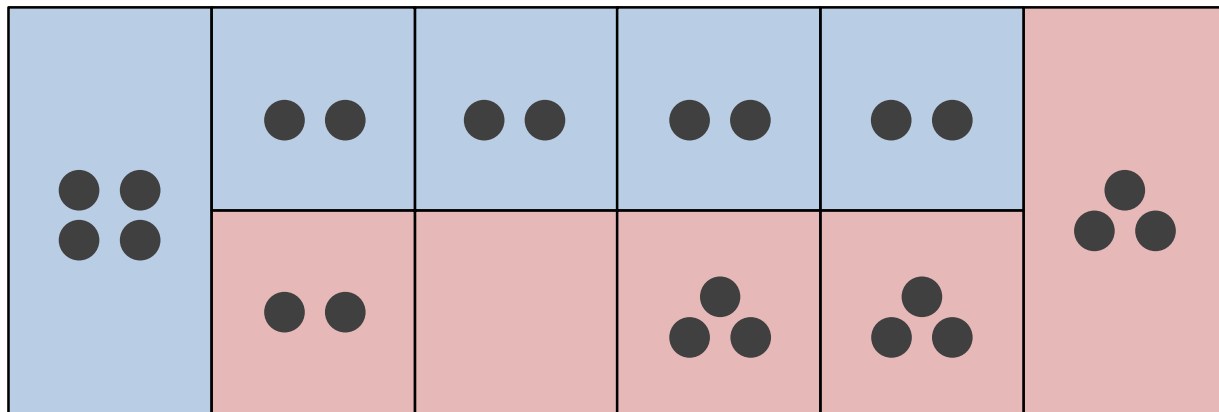
Simple-Kalahのルール

プレイヤーAの手番



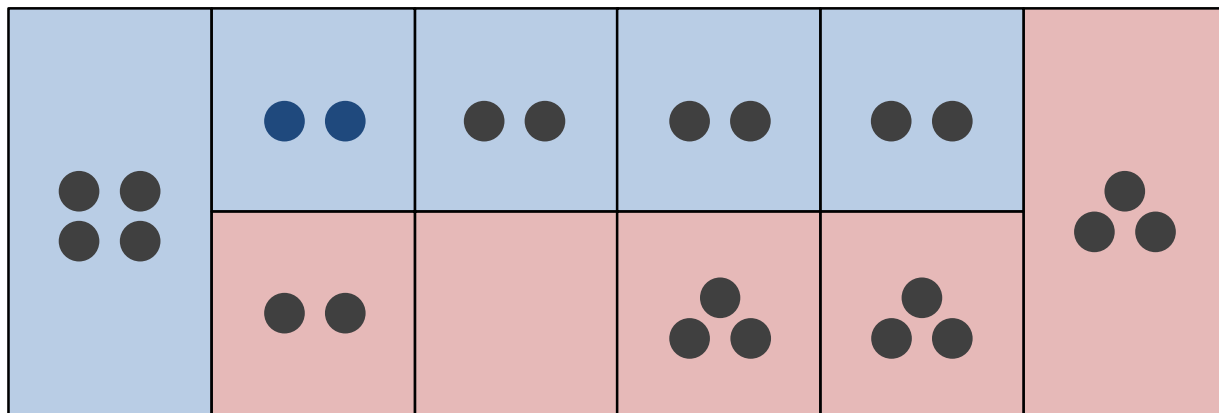
Simple-Kalahのルール

プレイヤーBの手番



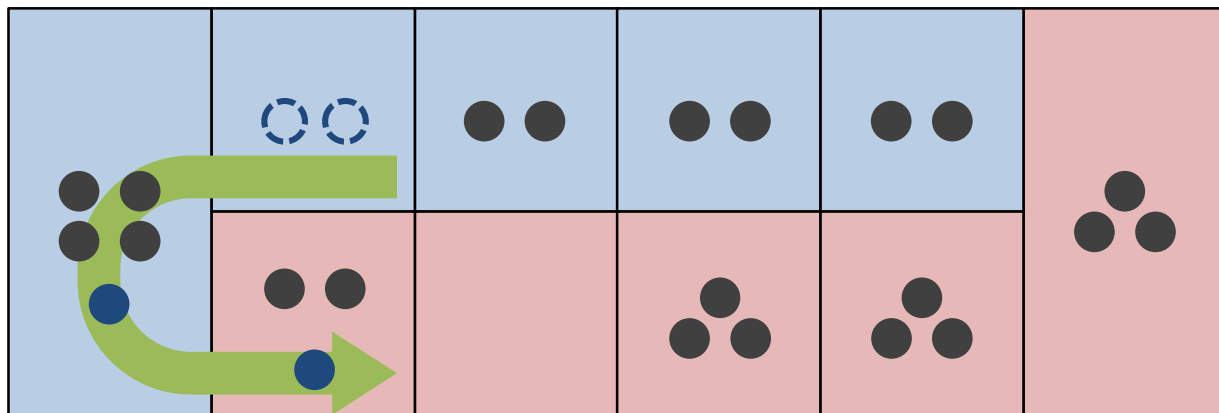
Simple-Kalahのルール

プレイヤーBの手番



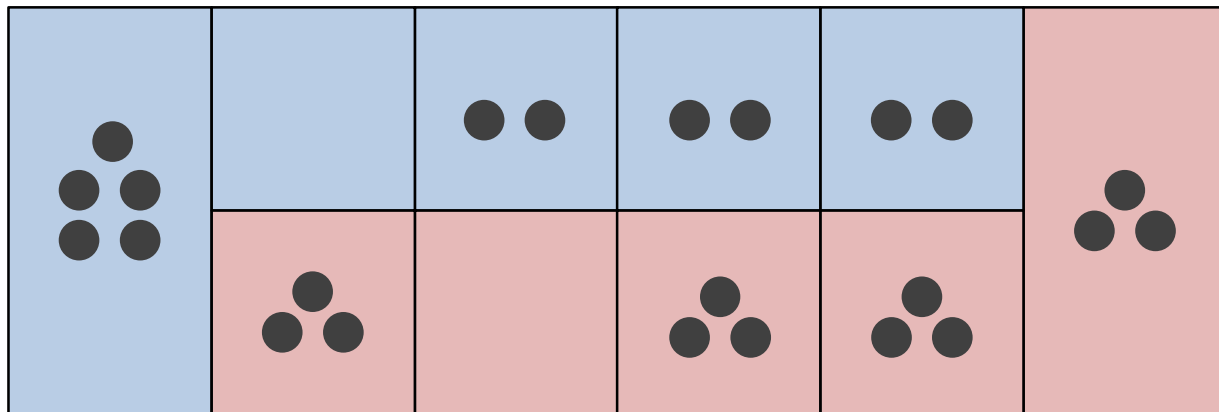
Simple-Kalahのルール

プレイヤーBの手番



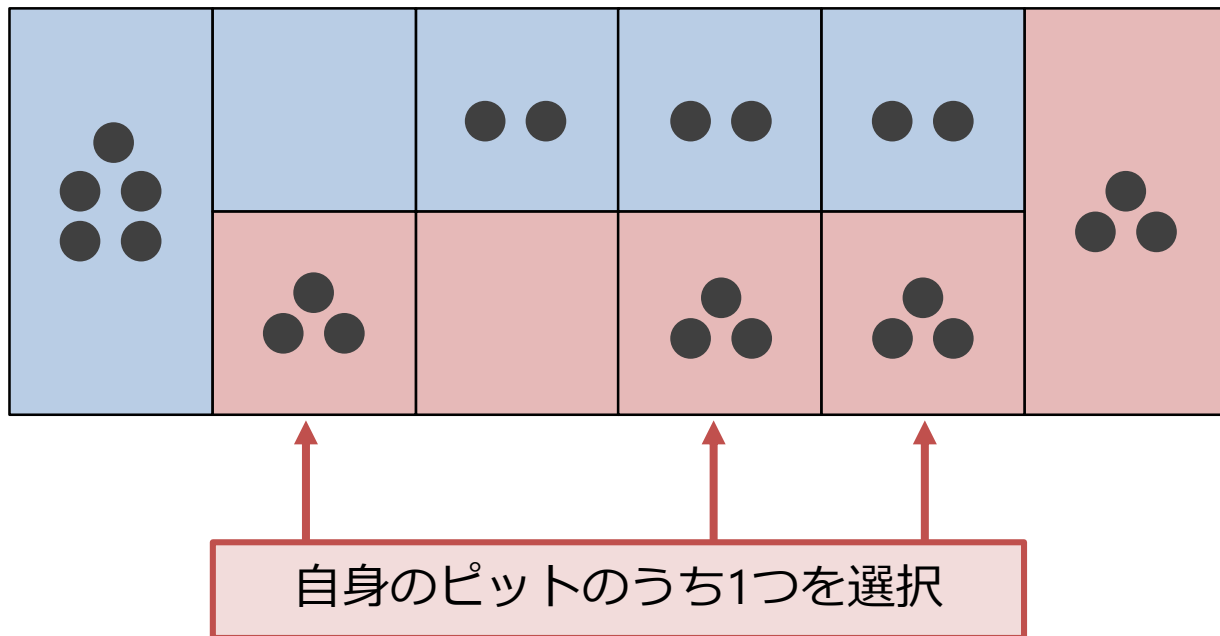
Simple-Kalahのルール

プレイヤーAの手番



Simple-Kalahのルール

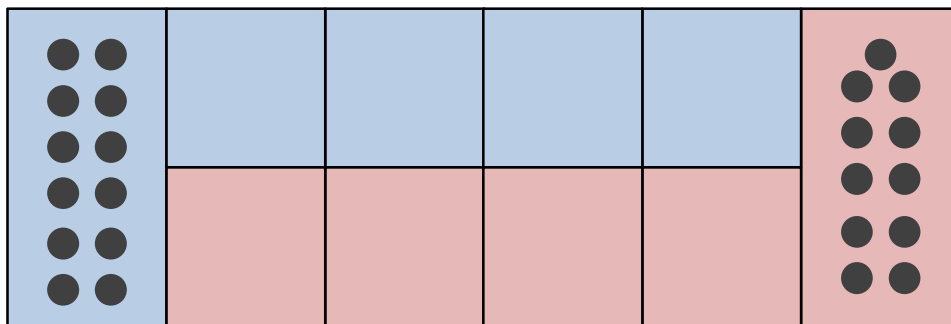
プレイヤーAの手番



Simple-Kalahのルール

勝利条件

どちらのプレイヤーも石を動かせなくなった時に自身のストアに多くの石を入れていた者が勝者である.



→両プレイヤーに動かせる石がないのでゲーム終了

得点： **12-11** B(青)の勝利

先行研究

m:各プレイヤーのピットの数
n:各ピットに最初に入っている石の数

- ◆ 先行研究において, 完全ゲーム木を用いることで
小さな局面ではKalahの勝敗の判定が出来ている

G. Irving, H.H.L.M. Donkers, J.W.H.M. Uiterwijk, Solving
Kalah, ICGA J. 23(3) (2000) pp.139-147.

$m \setminus n$	1	2	3	4	5	6
1	D	L	W	L	W	D
2	W	L	L	L	W	W
3	D	W	W	W	W	L
4	W	W	W	W	W	D
5	D	D	W	W	W	W
6	W	W	W	W	W	?

W	先手必勝
L	後手必勝
D	引き分け

← 35s

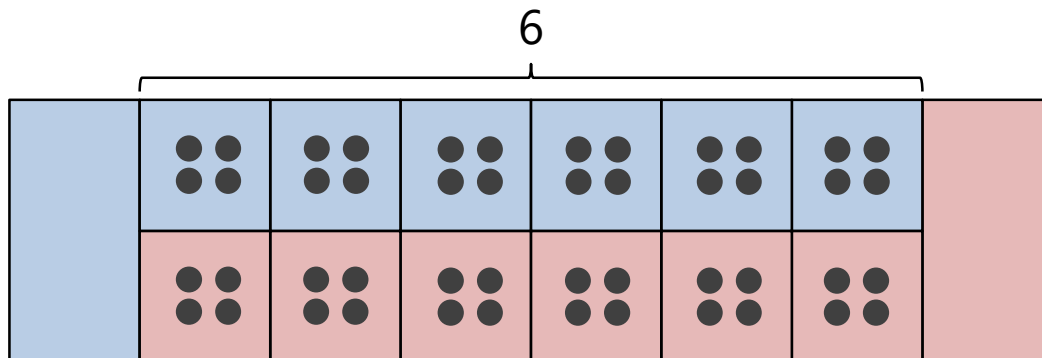
← 4.7h

← 4.2d~

先行研究

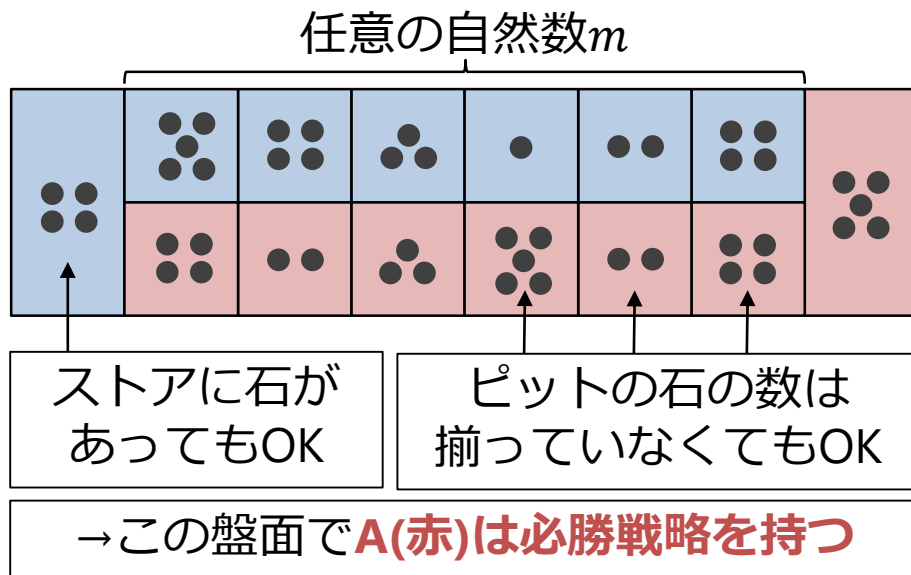
- ◆ 先行研究において, 標準的な以下の初期盤面のKalahでは
完全ゲーム木を用いることで先手番が勝利することが証明

G. Irving, H.H.L.M. Donkers, J.W.H.M. Uiterwijk, Solving Kalah, ICGA J. 23(3) (2000) pp.139-147.



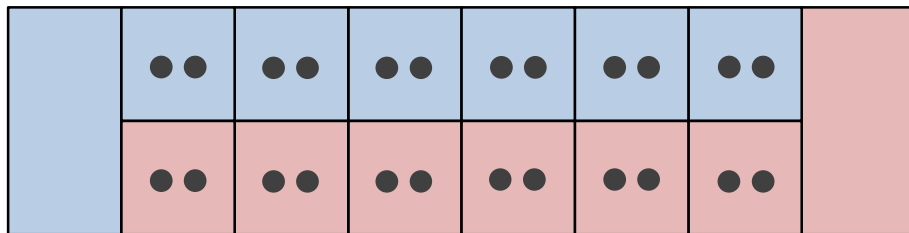
本研究の概要

- ◆ 本研究ではSimple-Kalahにおいて, ピットの数 m を一般化した任意の盤面が与えられた場合に必勝プレイヤーが確定する十分条件を与える

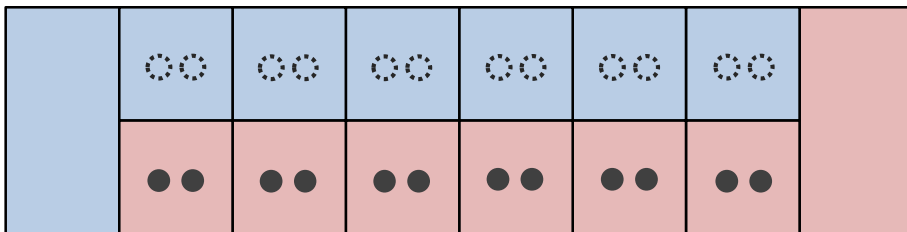


勝敗判定の条件式 (自分の石のみを考えた場合)

A(赤)がいくつの石を取ることができるか



まずは自身のピットのみで考えてみる

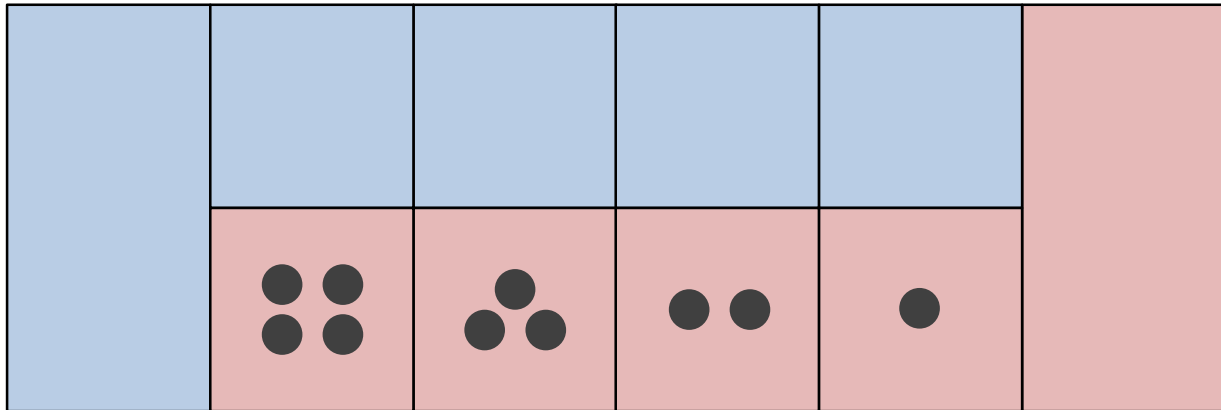


勝敗判定の条件式

(自分の石のみを考えた場合)

X が選択可能なピット $x_i (i = 1, 2, \dots, m)$ を持つとき,
 i が最小のピットを選択する戦略→**右戦略**

右戦略→初期状態で自身のピット内の石のみを考えたとき, 自身のストアに入れる石を最大化する戦略
(のひとつ)

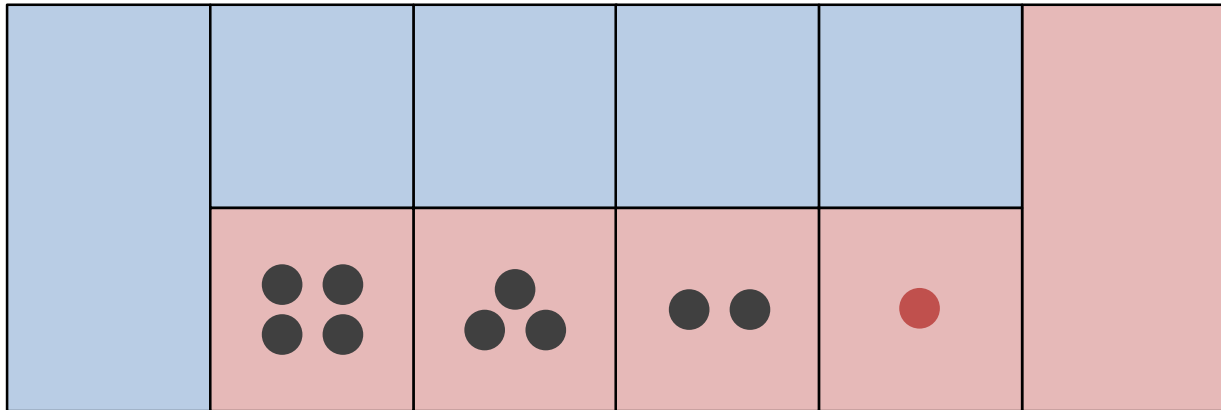


勝敗判定の条件式

(自分の石のみを考えた場合)

X が選択可能なピット $x_i (i = 1, 2, \dots, m)$ を持つとき,
 i が最小のピットを選択する戦略→**右戦略**

右戦略→初期状態で自身のピット内の石のみを考えたとき, 自身のストアに入れる石を最大化する戦略
(のひとつ)

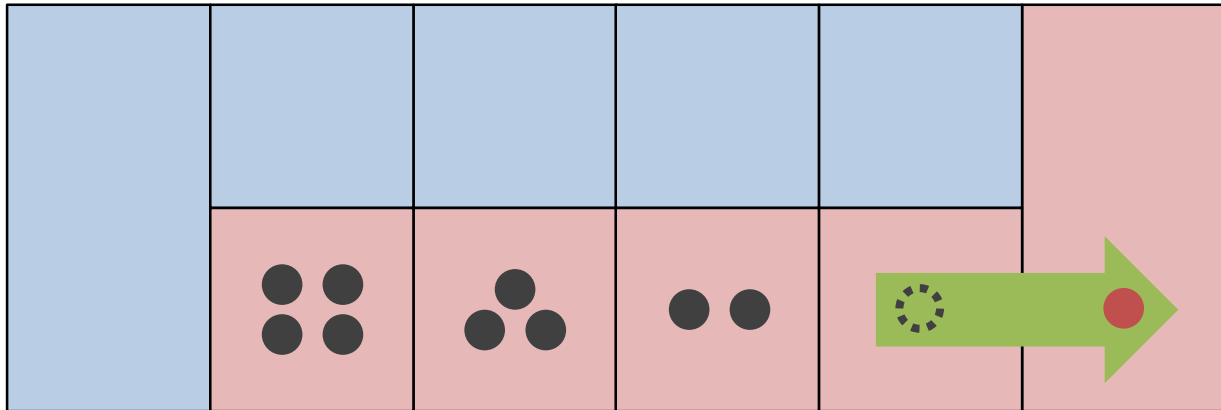


勝敗判定の条件式

(自分の石のみを考えた場合)

X が選択可能なピット $x_i (i = 1, 2, \dots, m)$ を持つとき,
 i が最小のピットを選択する戦略→**右戦略**

右戦略→初期状態で自身のピット内の石のみを考えたとき, 自身のストアに入れる石を最大化する戦略
(のひとつ)

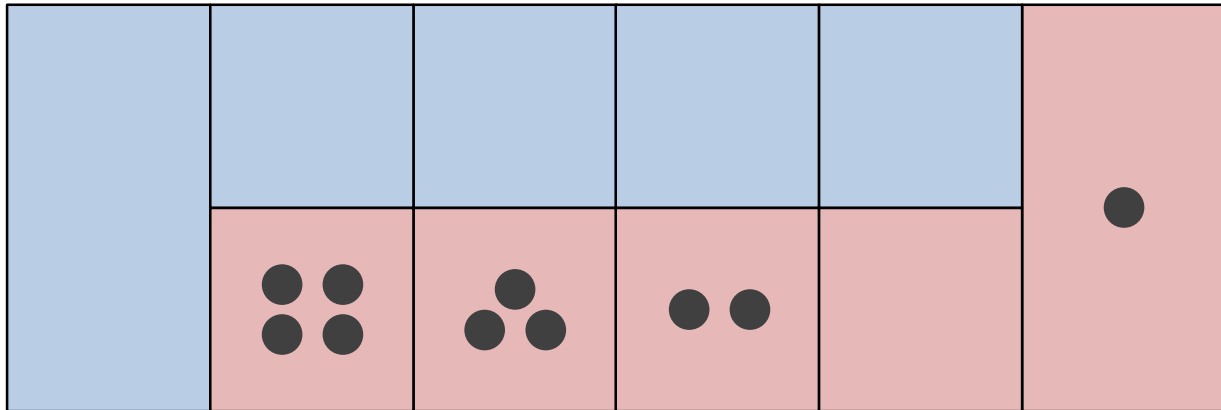


勝敗判定の条件式

(自分の石のみを考えた場合)

X が選択可能なピット $x_i (i = 1, 2, \dots, m)$ を持つとき,
 i が最小のピットを選択する戦略→**右戦略**

右戦略→初期状態で自身のピット内の石のみを考えたとき, 自身のストアに入れる石を最大化する戦略
(のひとつ)

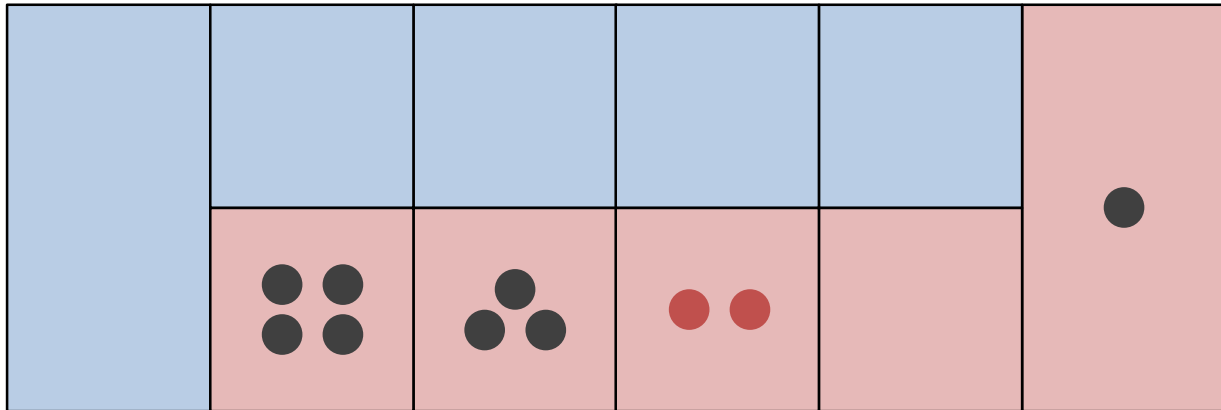


勝敗判定の条件式

(自分の石のみを考えた場合)

X が選択可能なピット $x_i (i = 1, 2, \dots, m)$ を持つとき,
 i が最小のピットを選択する戦略→**右戦略**

右戦略→初期状態で自身のピット内の石のみを考えたとき, 自身のストアに入れる石を最大化する戦略
(のひとつ)

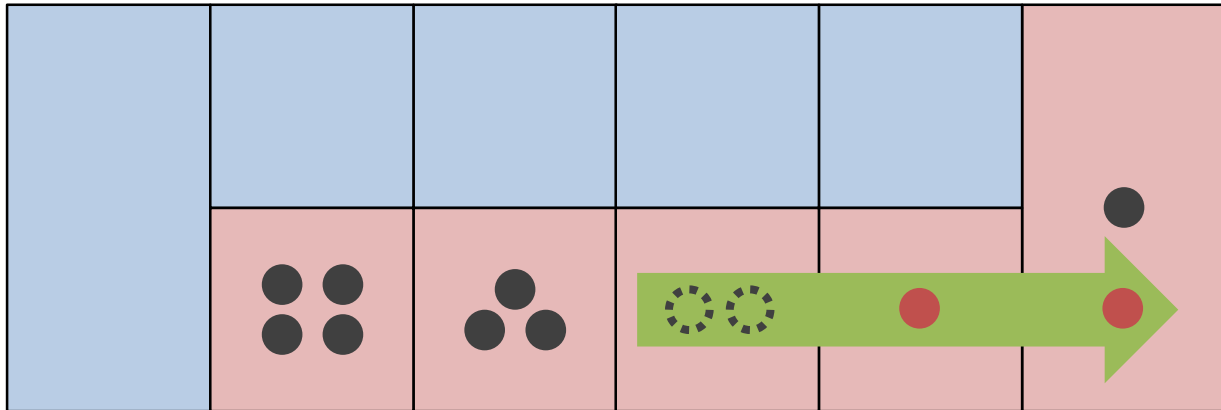


勝敗判定の条件式

(自分の石のみを考えた場合)

X が選択可能なピット $x_i (i = 1, 2, \dots, m)$ を持つとき,
 i が最小のピットを選択する戦略→**右戦略**

右戦略→初期状態で自身のピット内の石のみを考えたとき, 自身のストアに入れる石を最大化する戦略
(のひとつ)

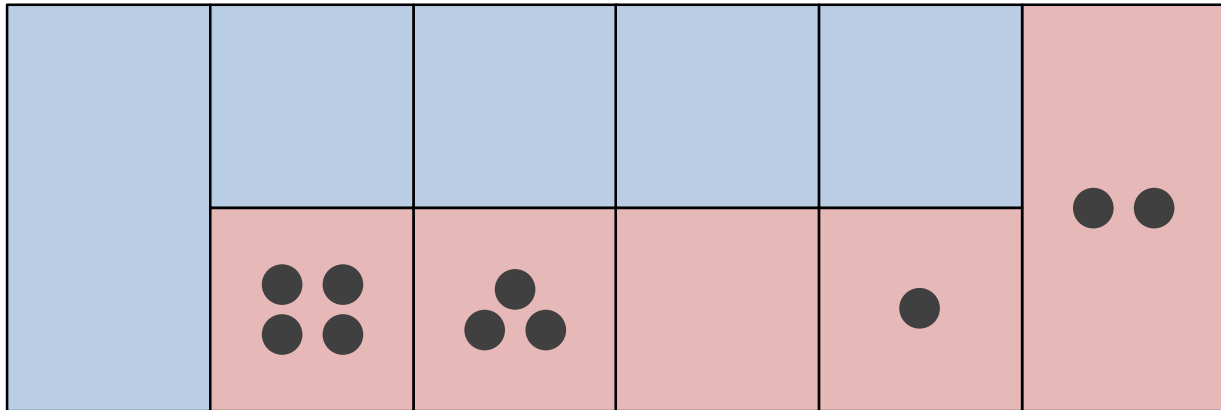


勝敗判定の条件式

(自分の石のみを考えた場合)

X が選択可能なピット $x_i (i = 1, 2, \dots, m)$ を持つとき,
 i が最小のピットを選択する戦略→**右戦略**

右戦略→初期状態で自身のピット内の石のみを考えたとき, 自身のストアに入れる石を最大化する戦略
(のひとつ)

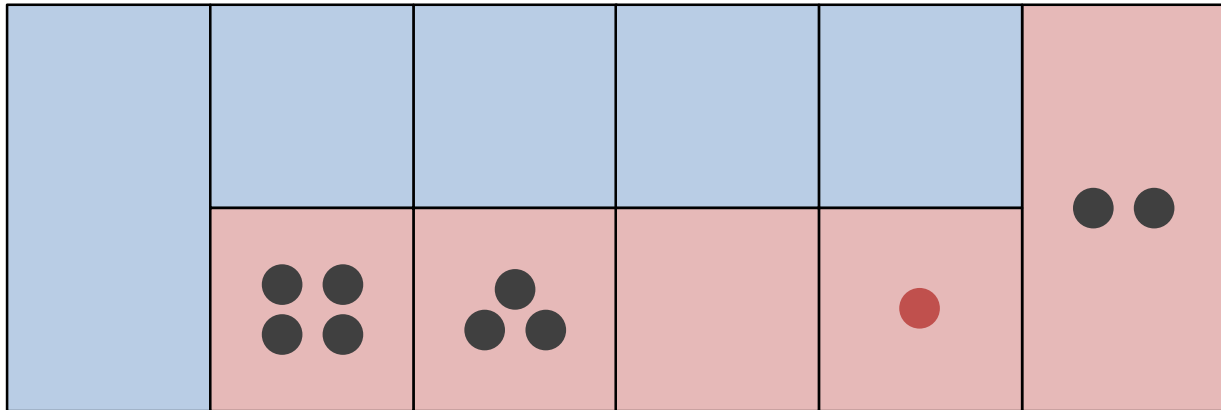


勝敗判定の条件式

(自分の石のみを考えた場合)

X が選択可能なピット $x_i (i = 1, 2, \dots, m)$ を持つとき,
 i が最小のピットを選択する戦略→**右戦略**

右戦略→初期状態で自身のピット内の石のみを考えたとき, 自身のストアに入れる石を最大化する戦略
(のひとつ)

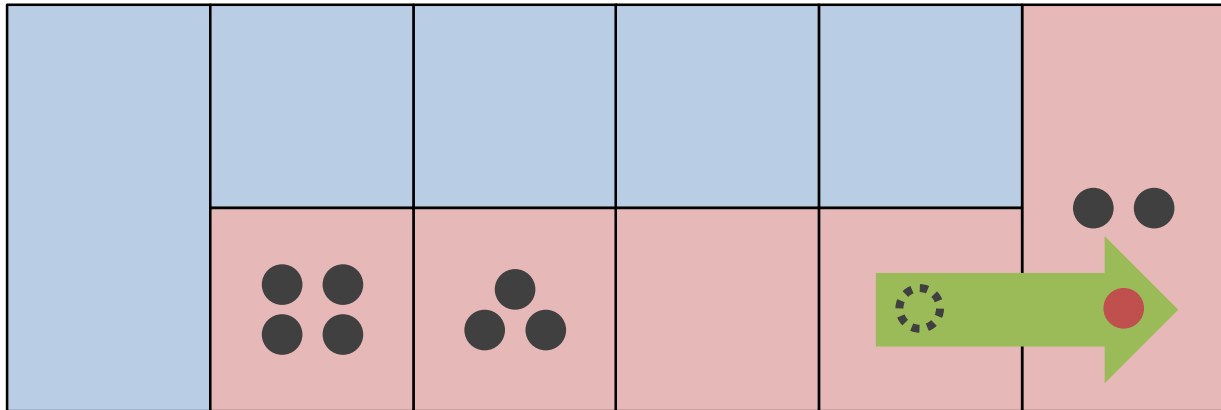


勝敗判定の条件式

(自分の石のみを考えた場合)

X が選択可能なピット $x_i (i = 1, 2, \dots, m)$ を持つとき,
 i が最小のピットを選択する戦略→**右戦略**

右戦略→初期状態で自身のピット内の石のみを考えたとき, 自身のストアに入れる石を最大化する戦略
(のひとつ)

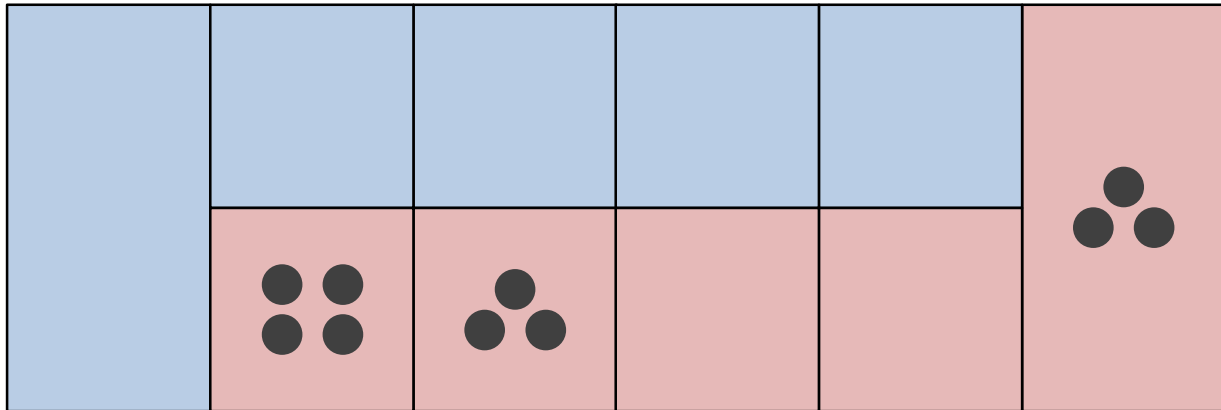


勝敗判定の条件式

(自分の石のみを考えた場合)

X が選択可能なピット $x_i (i = 1, 2, \dots, m)$ を持つとき,
 i が最小のピットを選択する戦略→**右戦略**

右戦略→初期状態で自身のピット内の石のみを考えたとき, 自身のストアに入れる石を最大化する戦略
(のひとつ)

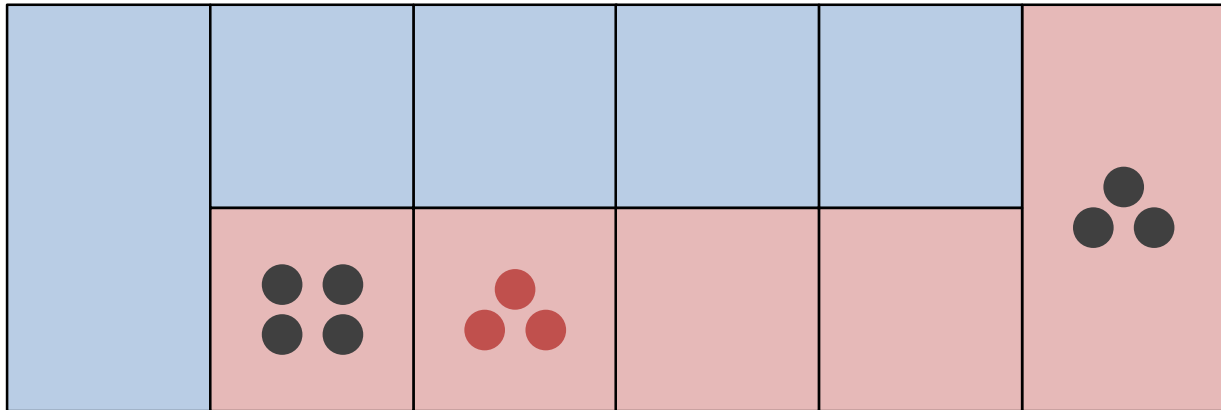


勝敗判定の条件式

(自分の石のみを考えた場合)

X が選択可能なピット $x_i (i = 1, 2, \dots, m)$ を持つとき,
 i が最小のピットを選択する戦略→**右戦略**

右戦略→初期状態で自身のピット内の石のみを考えたとき, 自身のストアに入れる石を最大化する戦略
(のひとつ)

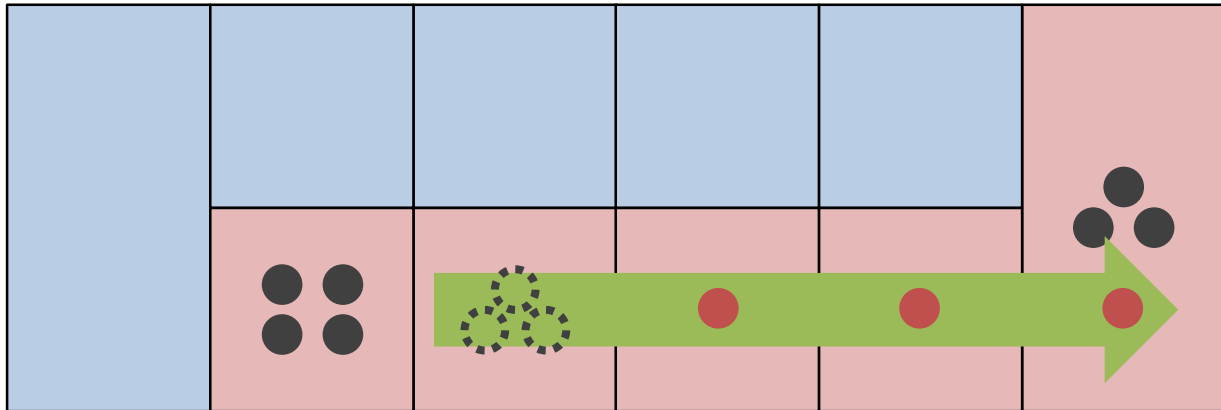


勝敗判定の条件式

(自分の石のみを考えた場合)

X が選択可能なピット $x_i (i = 1, 2, \dots, m)$ を持つとき,
 i が最小のピットを選択する戦略→**右戦略**

右戦略→初期状態で自身のピット内の石のみを考えたとき, 自身のストアに入れる石を最大化する戦略
(のひとつ)

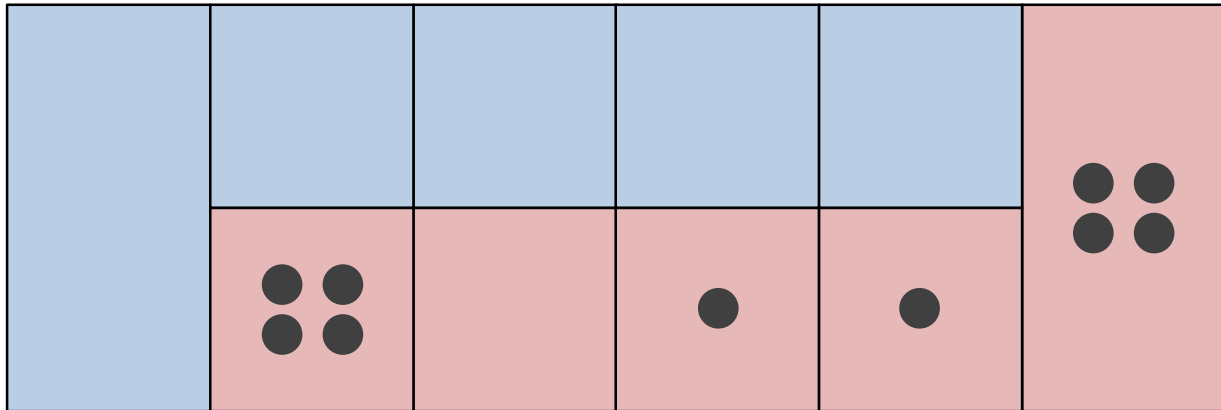


勝敗判定の条件式

(自分の石のみを考えた場合)

X が選択可能なピット $x_i (i = 1, 2, \dots, m)$ を持つとき,
 i が最小のピットを選択する戦略→**右戦略**

右戦略→初期状態で自身のピット内の石のみを考えたとき, 自身のストアに入れる石を最大化する戦略
(のひとつ)

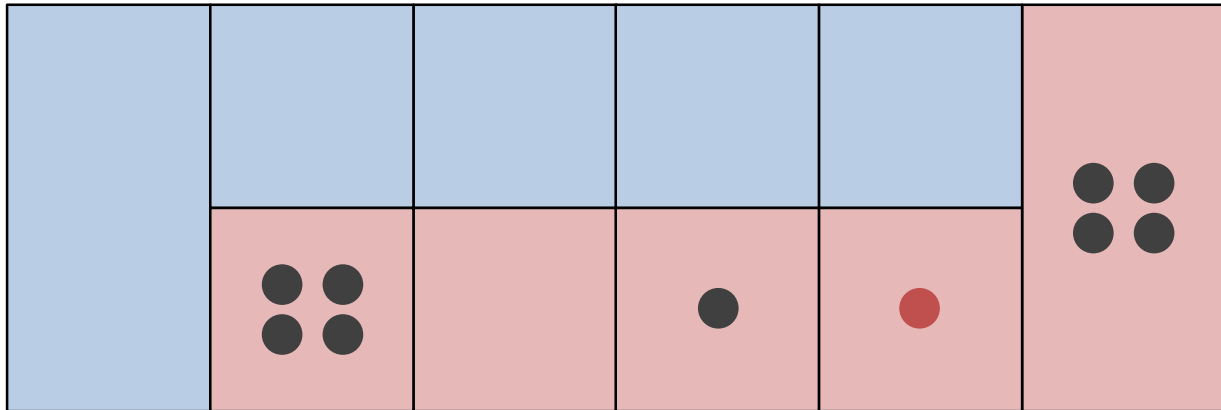


勝敗判定の条件式

(自分の石のみを考えた場合)

X が選択可能なピット $x_i (i = 1, 2, \dots, m)$ を持つとき,
 i が最小のピットを選択する戦略→**右戦略**

右戦略→初期状態で自身のピット内の石のみを考えたとき, 自身のストアに入れる石を最大化する戦略
(のひとつ)

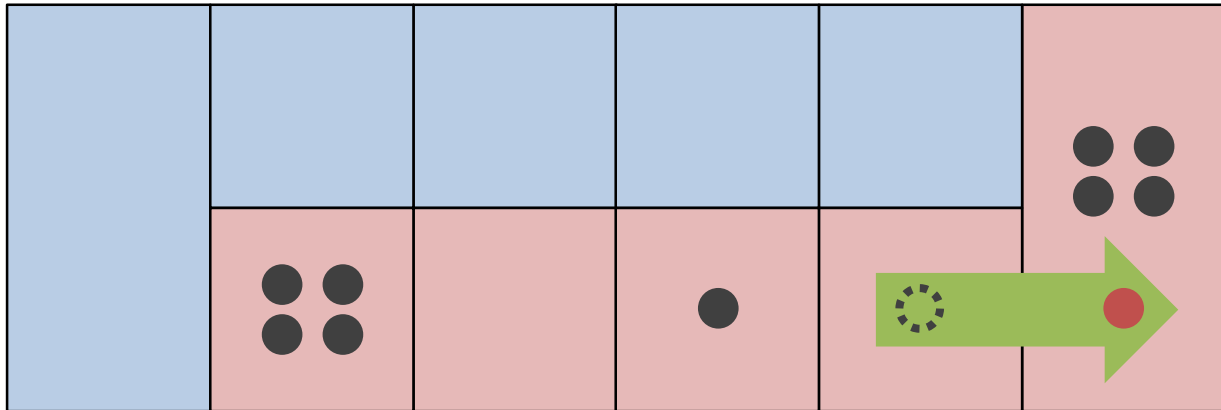


勝敗判定の条件式

(自分の石のみを考えた場合)

X が選択可能なピット $x_i (i = 1, 2, \dots, m)$ を持つとき,
 i が最小のピットを選択する戦略→**右戦略**

右戦略→初期状態で自身のピット内の石のみを考えたとき, 自身のストアに入れる石を最大化する戦略
(のひとつ)

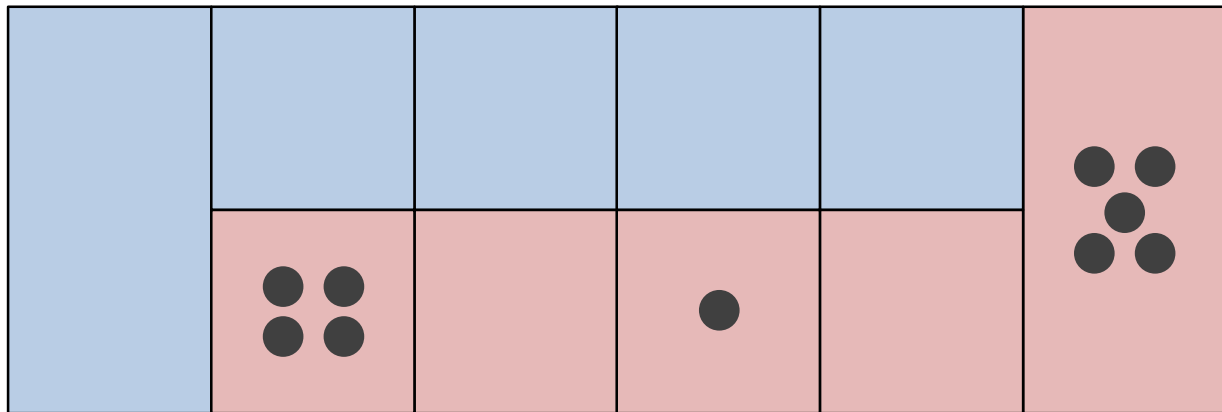


勝敗判定の条件式

(自分の石のみを考えた場合)

X が選択可能なピット $x_i (i = 1, 2, \dots, m)$ を持つとき,
 i が最小のピットを選択する戦略→**右戦略**

右戦略→初期状態で自身のピット内の石のみを考えたとき, 自身のストアに入れる石を最大化する戦略
(のひとつ)

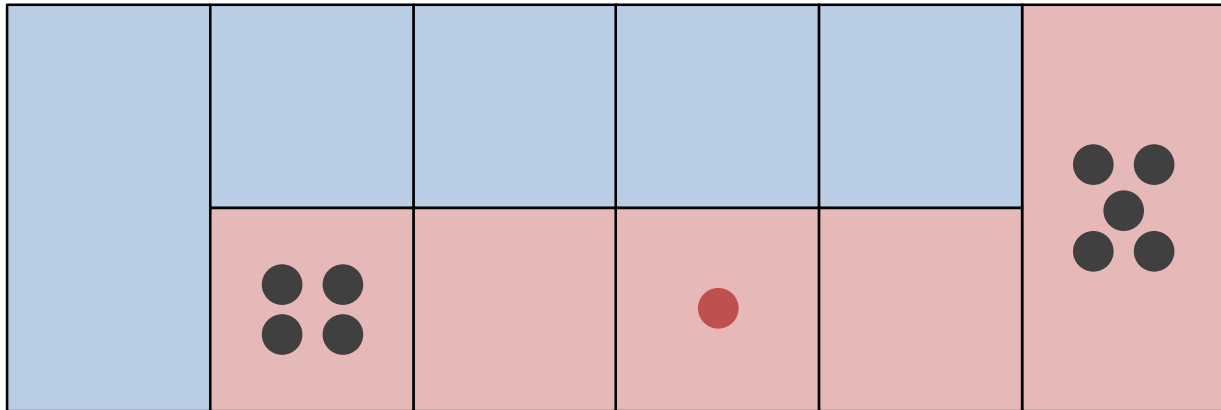


勝敗判定の条件式

(自分の石のみを考えた場合)

X が選択可能なピット $x_i (i = 1, 2, \dots, m)$ を持つとき,
 i が最小のピットを選択する戦略→**右戦略**

右戦略→初期状態で自身のピット内の石のみを考えたとき, 自身のストアに入れる石を最大化する戦略
(のひとつ)

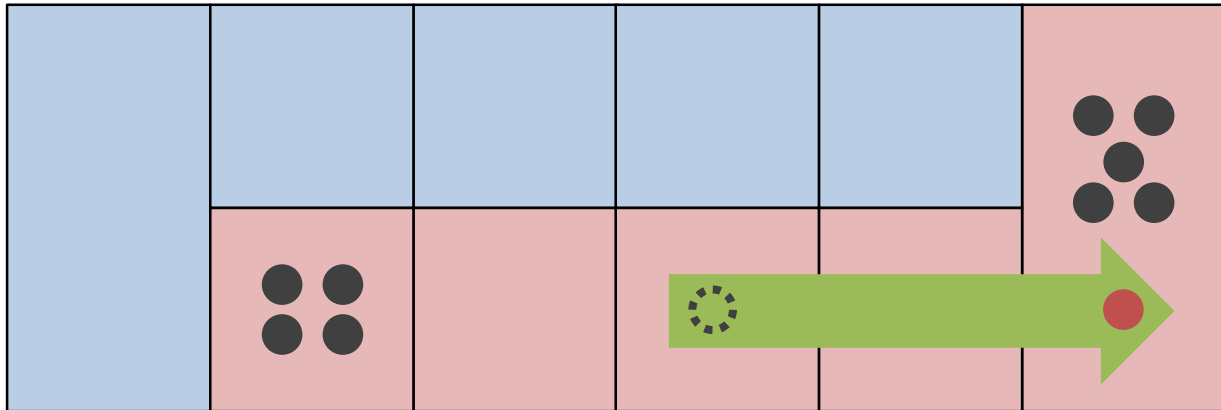


勝敗判定の条件式

(自分の石のみを考えた場合)

X が選択可能なピット $x_i (i = 1, 2, \dots, m)$ を持つとき,
 i が最小のピットを選択する戦略→**右戦略**

右戦略→初期状態で自身のピット内の石のみを考えたとき, 自身のストアに入れる石を最大化する戦略
(のひとつ)

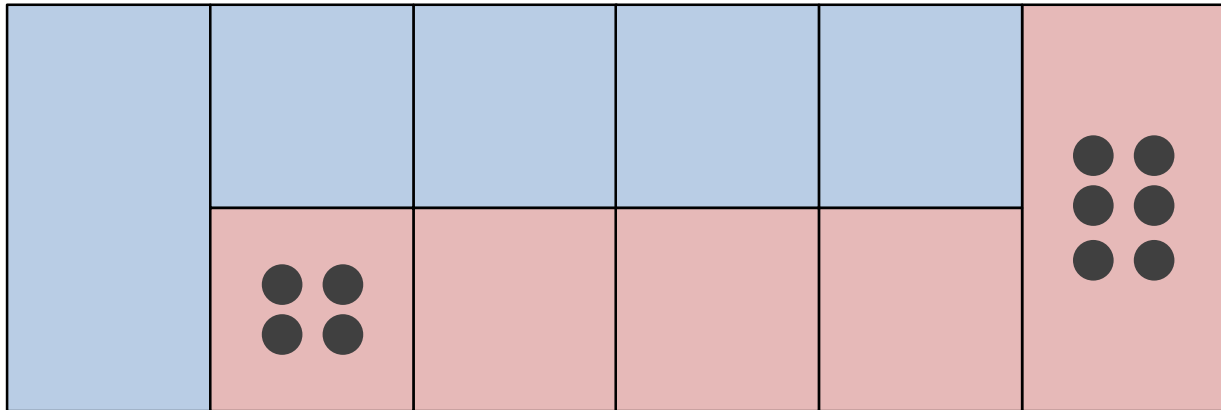


勝敗判定の条件式

(自分の石のみを考えた場合)

X が選択可能なピット $x_i (i = 1, 2, \dots, m)$ を持つとき,
 i が最小のピットを選択する戦略→**右戦略**

右戦略→初期状態で自身のピット内の石のみを考えたとき, 自身のストアに入れる石を最大化する戦略
(のひとつ)

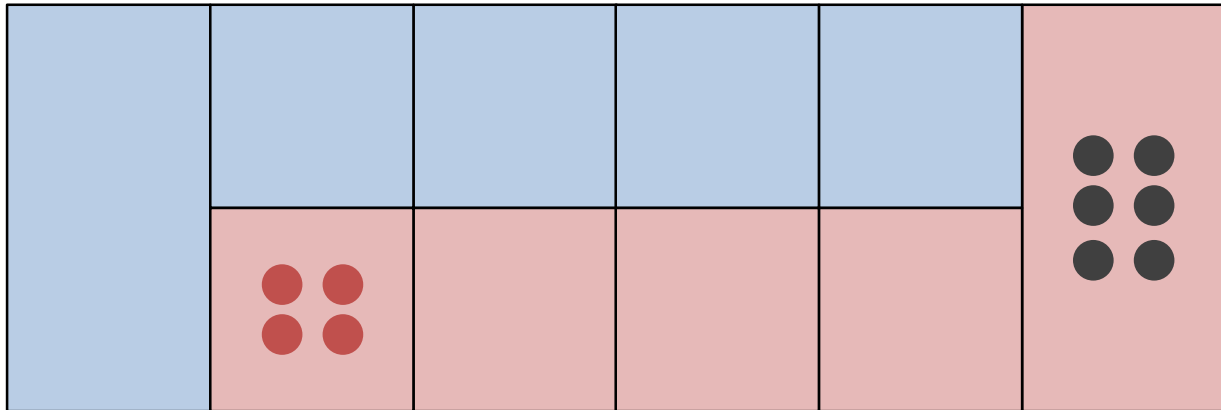


勝敗判定の条件式

(自分の石のみを考えた場合)

X が選択可能なピット $x_i (i = 1, 2, \dots, m)$ を持つとき,
 i が最小のピットを選択する戦略→**右戦略**

右戦略→初期状態で自身のピット内の石のみを考えたとき, 自身のストアに入れる石を最大化する戦略
(のひとつ)

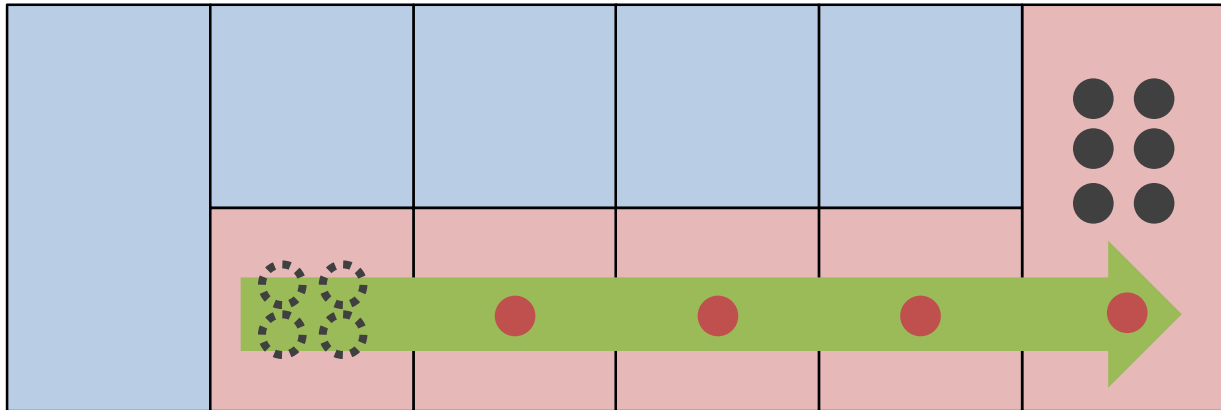


勝敗判定の条件式

(自分の石のみを考えた場合)

X が選択可能なピット $x_i (i = 1, 2, \dots, m)$ を持つとき,
 i が最小のピットを選択する戦略→**右戦略**

右戦略→初期状態で自身のピット内の石のみを考えたとき, 自身のストアに入れる石を最大化する戦略
(のひとつ)

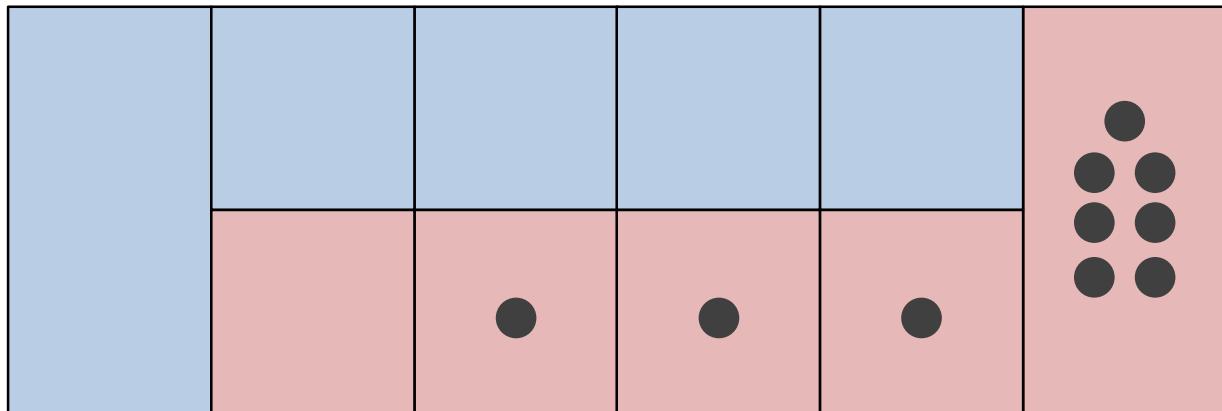


勝敗判定の条件式

(自分の石のみを考えた場合)

X が選択可能なピット $x_i (i = 1, 2, \dots, m)$ を持つとき,
 i が最小のピットを選択する戦略→**右戦略**

右戦略→初期状態で自身のピット内の石のみを考えたとき, 自身のストアに入れる石を最大化する戦略
(のひとつ)

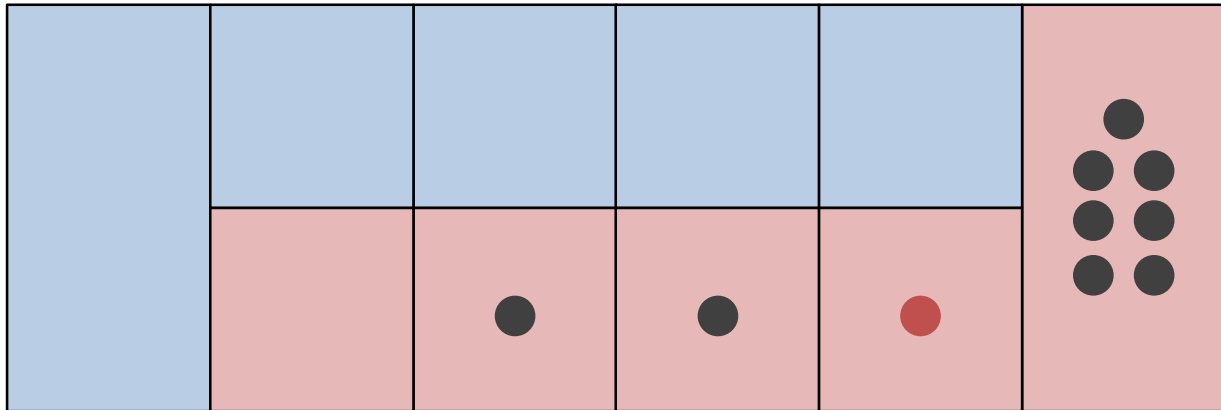


勝敗判定の条件式

(自分の石のみを考えた場合)

X が選択可能なピット $x_i (i = 1, 2, \dots, m)$ を持つとき,
 i が最小のピットを選択する戦略→**右戦略**

右戦略→初期状態で自身のピット内の石のみを考えたとき, 自身のストアに入れる石を最大化する戦略
(のひとつ)

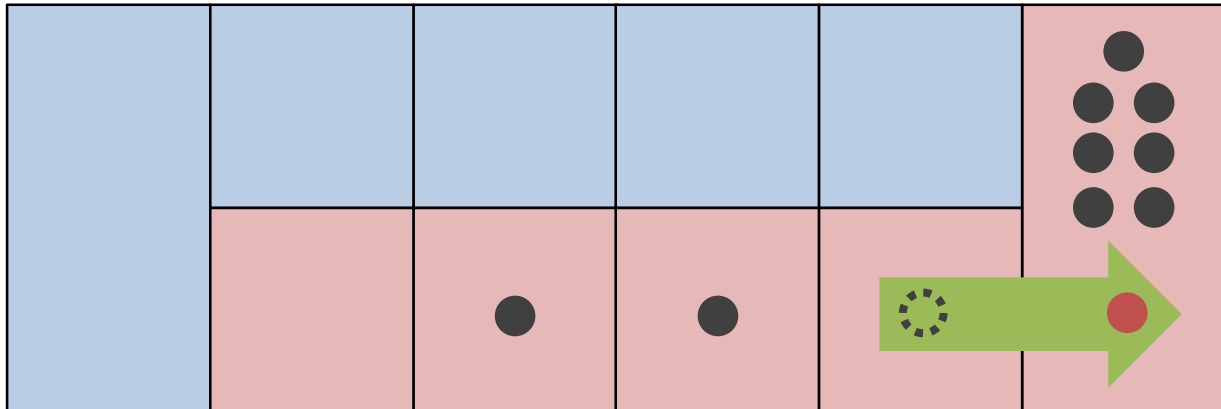


勝敗判定の条件式

(自分の石のみを考えた場合)

X が選択可能なピット $x_i (i = 1, 2, \dots, m)$ を持つとき,
 i が最小のピットを選択する戦略→**右戦略**

右戦略→初期状態で自身のピット内の石のみを考えたとき, 自身のストアに入れる石を最大化する戦略
(のひとつ)

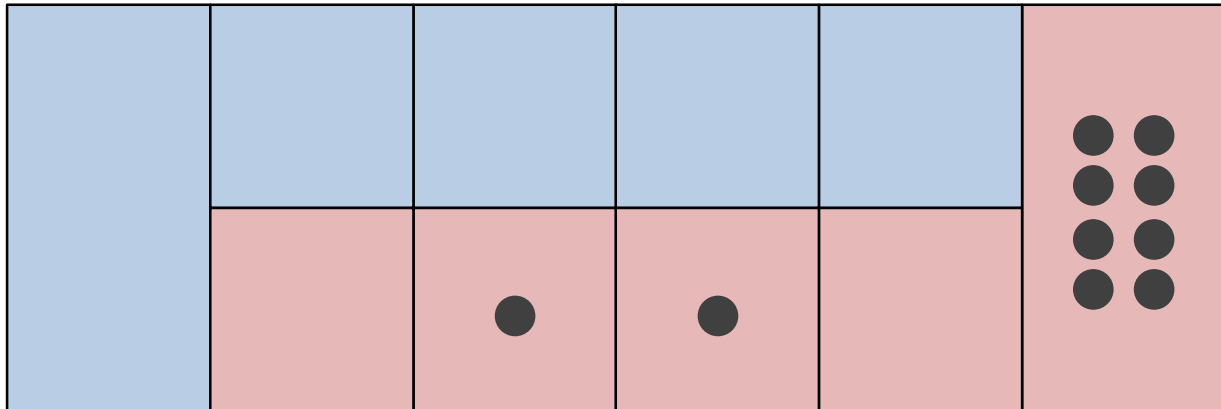


勝敗判定の条件式

(自分の石のみを考えた場合)

X が選択可能なピット $x_i (i = 1, 2, \dots, m)$ を持つとき,
 i が最小のピットを選択する戦略→**右戦略**

右戦略→初期状態で自身のピット内の石のみを考えたとき, 自身のストアに入れる石を最大化する戦略
(のひとつ)

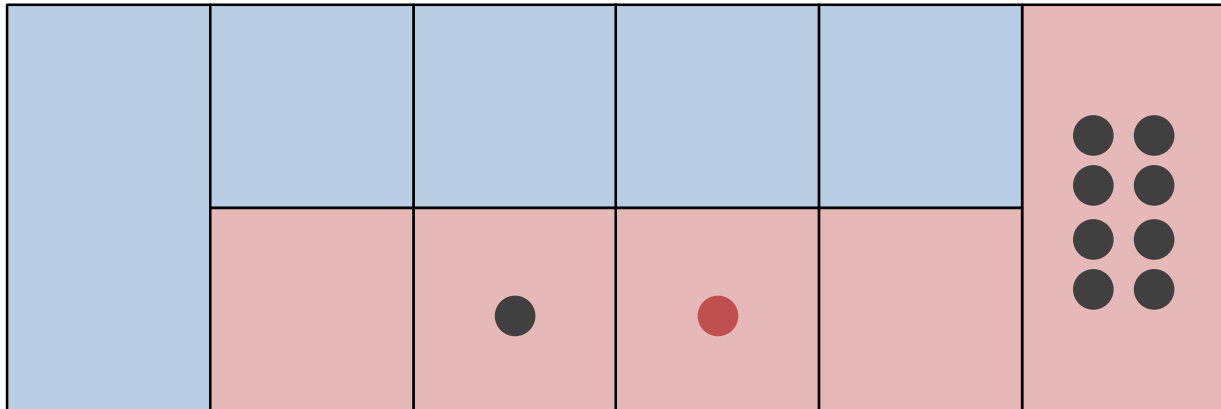


勝敗判定の条件式

(自分の石のみを考えた場合)

X が選択可能なピット $x_i (i = 1, 2, \dots, m)$ を持つとき,
 i が最小のピットを選択する戦略→**右戦略**

右戦略→初期状態で自身のピット内の石のみを考えたとき, 自身のストアに入れる石を最大化する戦略
(のひとつ)

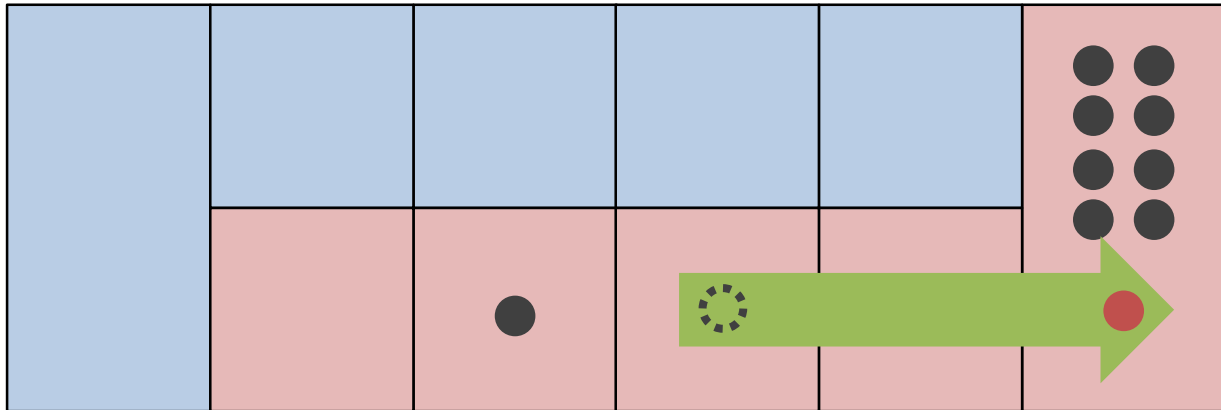


勝敗判定の条件式

(自分の石のみを考えた場合)

X が選択可能なピット $x_i (i = 1, 2, \dots, m)$ を持つとき,
 i が最小のピットを選択する戦略→**右戦略**

右戦略→初期状態で自身のピット内の石のみを考えたとき, 自身のストアに入れる石を最大化する戦略
(のひとつ)

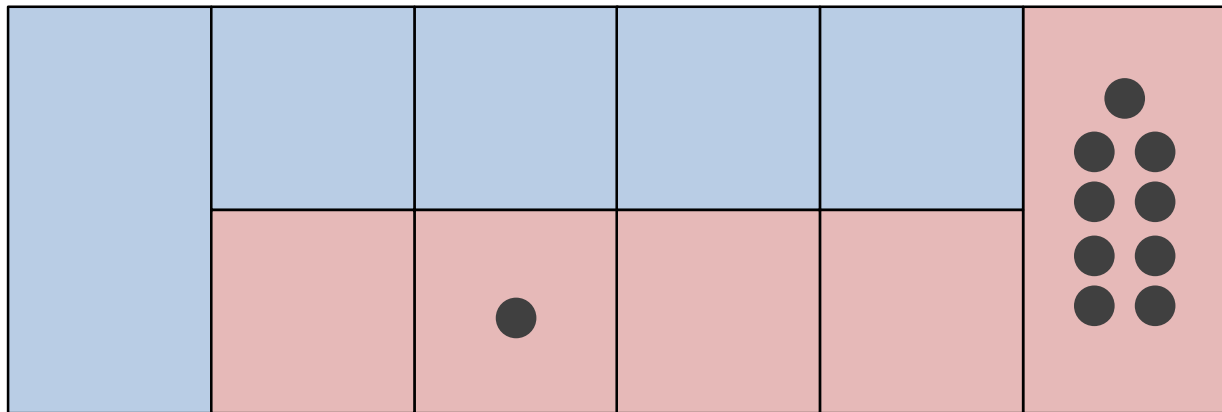


勝敗判定の条件式

(自分の石のみを考えた場合)

X が選択可能なピット $x_i (i = 1, 2, \dots, m)$ を持つとき,
 i が最小のピットを選択する戦略→**右戦略**

右戦略→初期状態で自身のピット内の石のみを考えたとき, 自身のストアに入れる石を最大化する戦略
(のひとつ)

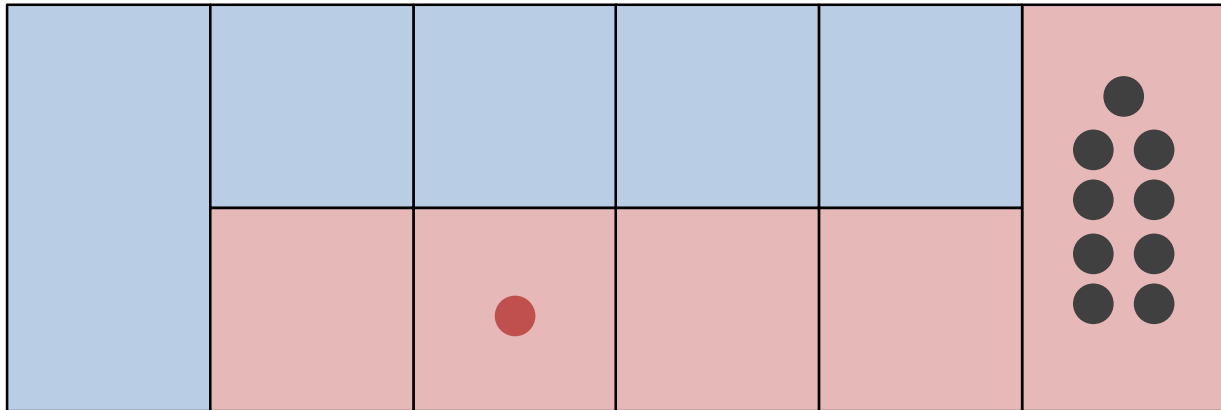


勝敗判定の条件式

(自分の石のみを考えた場合)

X が選択可能なピット $x_i (i = 1, 2, \dots, m)$ を持つとき,
 i が最小のピットを選択する戦略→**右戦略**

右戦略→初期状態で自身のピット内の石のみを考えたとき, 自身のストアに入れる石を最大化する戦略
(のひとつ)

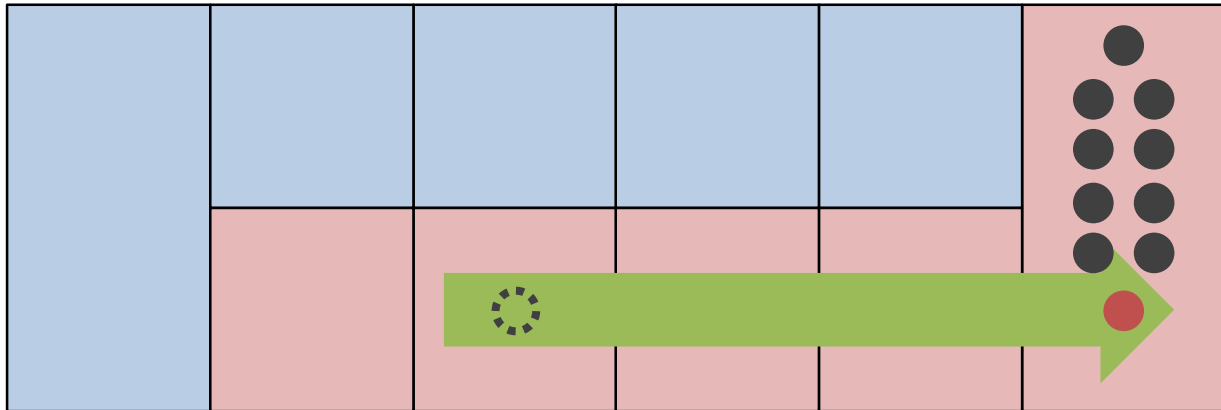


勝敗判定の条件式

(自分の石のみを考えた場合)

X が選択可能なピット $x_i (i = 1, 2, \dots, m)$ を持つとき,
 i が最小のピットを選択する戦略→**右戦略**

右戦略→初期状態で自身のピット内の石のみを考えたとき, 自身のストアに入れる石を最大化する戦略
(のひとつ)

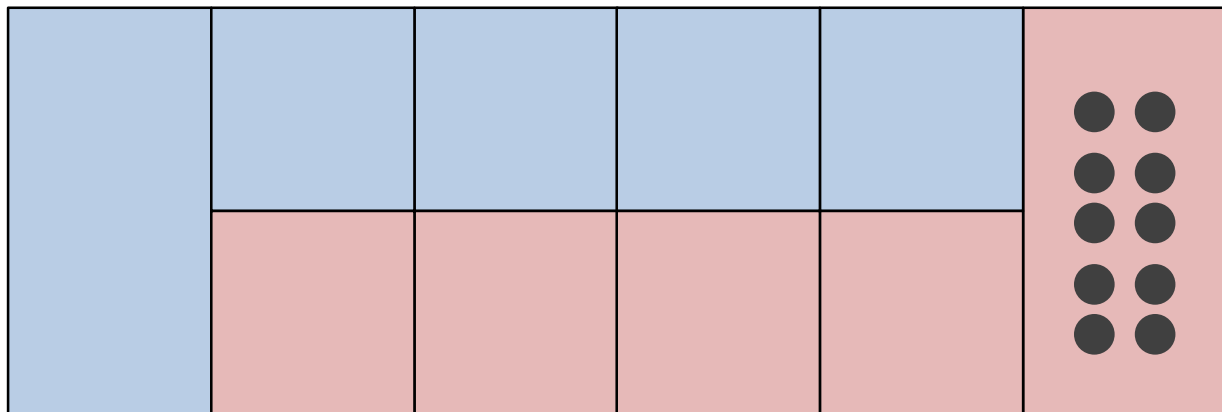


勝敗判定の条件式

(自分の石のみを考えた場合)

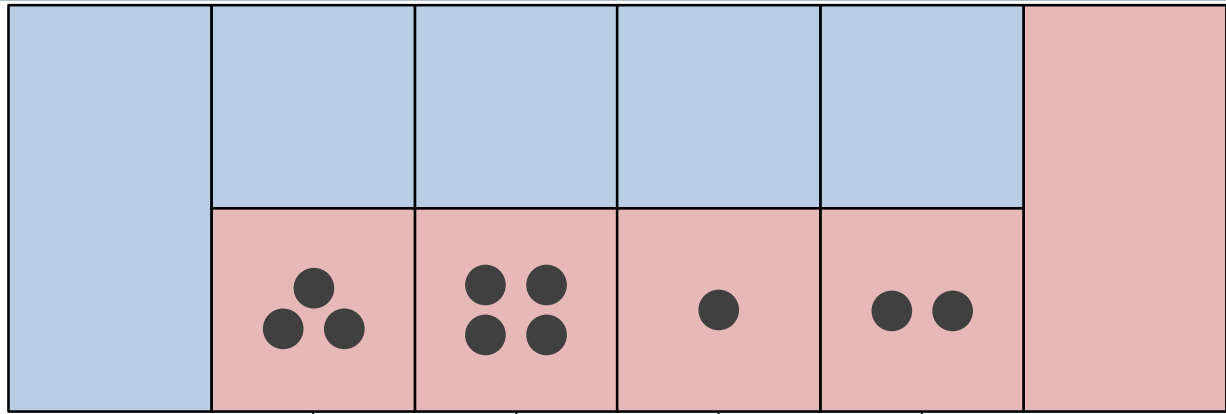
X が選択可能なピット $x_i (i = 1, 2, \dots, m)$ を持つとき,
 i が最小のピットを選択する戦略→**右戦略**

右戦略→初期状態で自身のピット内の石のみを考えたとき, 自身のストアに入れる石を最大化する戦略
(のひとつ)



勝敗判定の条件式

(自分の石のみを考えた場合)



$$\min(w(x_3), 3) = 3$$

$$\min(w(x_1), 1) = 1$$

$$\min(w(x_4), 4) = 3$$

$$\min(w(x_2), 2) = 1$$

→全てのピットの合計

$$\sum_{i=1}^m \min(w(x_i), i)$$

勝敗判定の条件式

(自分の石のみを考えた場合)

補題 1

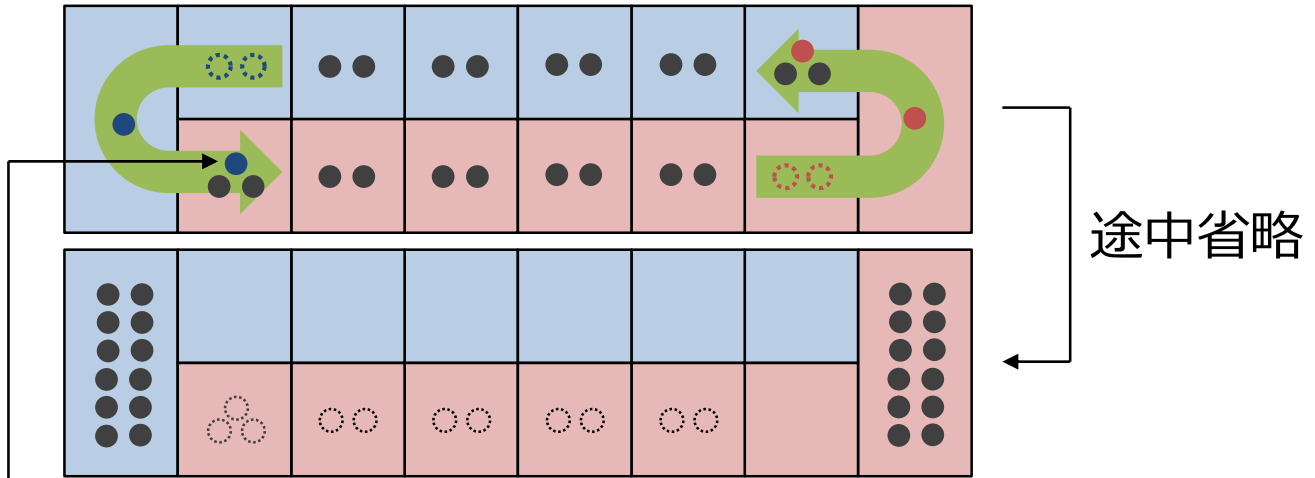
Simple-Kalah のある盤面からプレイヤー $X \in \{A, B\}$ が右戦略をゲーム終了まで続けた場合, X が自身のピットのみを考えると, “自身のストアに入れられる石の個数” は

$$w(s_x) + \sum_{i=1}^m \min(w(x_i), i)$$

以上である.

勝敗判定の条件式

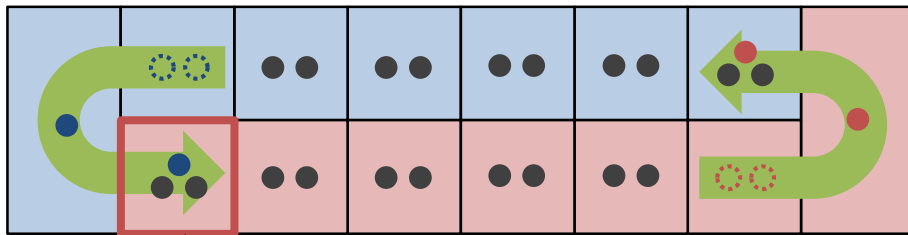
(相手の石のみを考えた場合)



相手ピットから自身のピットに移動してくる石が存在
この石は自身の得点にすることが可能

勝敗判定の条件式

(相手の石のみを考えた場合)



このピット(a_6)についてのみ考えてみると…
右戦略より, $i - w(a_i) > 0$ である場合は
新たにそのピットに石が入ってきても獲得可能

よって, あるピット a_i において
“ a_i に相手から必ず入ってくる石の数”と“ $i - w(a_i)$ ”を
比較し, 小さいほうを得られる得点

勝敗判定の条件式

(相手の石のみを考えた場合)

補題2

Simple-Kalah のある盤面からプレイヤー $X \in \{A, B\}$ が右戦略をゲーム終了まで続けた場合, X が“相手のピットにある石のうち, 自身のストアに入れられる石の個数”は

$$\sum_{i=2}^m \max \left\{ 0, \min \left(i - w(x_i), \sum_{j=1}^m f(i, j) \right) \right\}$$

以上である.

$$\text{ただし, } f(i, j) = \begin{cases} 1 & ((y_j - j) - (m - i) > 0) \\ 0 & ((y_j - j) - (m - i) \leq 0) \end{cases}$$

勝敗判定の条件式

定理1

任意の盤面において, 以下の条件式を満たすプレイヤー $X \in \{A, B\}$ が存在すれば, 右戦略を用いて先手後手に関わらず X は勝利することができる.

$$\underbrace{w(s_x) + \sum_{i=1}^m \min(w(x_i), i)}_{\text{補題1}} + \underbrace{\sum_{i=2}^m \max \left\{ 0, \min \left(i - w(x_i), \underbrace{\sum_{j=1}^m f(i, j)}_{\text{補題2}} \right) \right\}}_{\text{(ただし, } T \text{ は石の総数)}} > \frac{T}{2}$$

Simple-Kalahの盤面数

命題1

Simple-Kalahの任意の初期盤面が与えられたとき、そのゲームの勝敗の判定は有限時間で行うことができる。

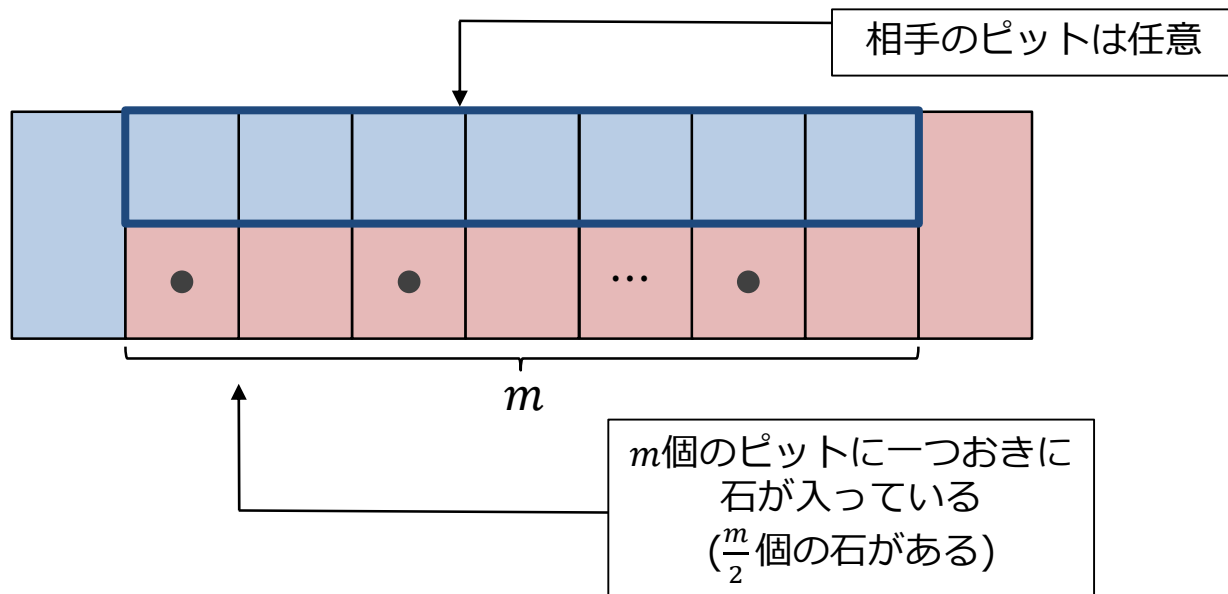
命題1はほぼ自明（証明略）→多項式時間で判定できるか？

- ◆ ゲーム中に出現する可能性のある盤面の数が
 - ◆ ゲームのサイズに関する**多項式関数**で表される
→多項式時間アルゴリズムが存在する
 - ◆ ゲームのサイズに関する**指数関数**で表される
→全てを探索することは難しい

以降では盤面の数がピット数 m の指数サイズで表される初期盤面について示す

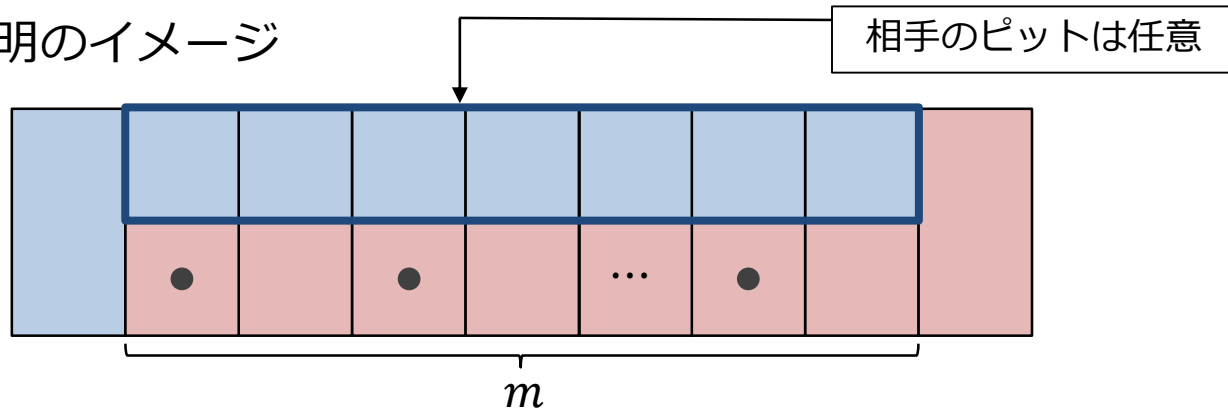
Simple-Kalahの盤面数

◆ 証明のイメージ



Simple-Kalahの盤面数

◆ 証明のイメージ



Aが同じ石を選択しないと仮定した場合, $\frac{m}{4}$ ステップ後の盤面は

$$\binom{\frac{m}{2}}{\frac{m}{4}} = \frac{\left(\frac{m}{2}\right)!}{\left(\frac{m}{4}\right)!\left(\frac{m}{4}\right)!} \cong \frac{\sqrt{\pi m} \left(\frac{m}{2e}\right)^{\frac{m}{2}}}{\frac{\pi m}{2} \left(\frac{m}{4e}\right)^{\frac{m}{4}}} = \frac{2 \left(\frac{m}{2e}\right)^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{\pi m} \left(\frac{m}{4e}\right)^{\frac{m}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{\pi m}} \frac{\left(\frac{m}{2e}\right)^{\frac{m}{2}}}{\left(\frac{m}{4e}\right)^{\frac{m}{4}}} \text{通り以上存在}$$

→ m の指数サイズ以上の盤面が発生する可能性がある

おわりに

- ◆ Simple-Kalahにおいて, ある条件を満たしたときの必勝戦略を与えた
 - ◆ Kalahでもある程度の有効性を期待
- ◆ ゲームの状態数が, ピット数に関する指数サイズで表される初期盤面が存在することを証明した
 - ◆ 一定以上の大きさの盤面においてはゲーム木を用いた必勝判定は難しいことがわかる
 - ◆ Kalahにおいても必勝戦略の発見が容易でないことを示唆する

(/・ω・)/

これより後は
補足資料です。

初期盤面について

◆ 標準的なゲーム #とは

- 先行研究の論文内における「標準的なゲーム」

- Wikipediaの“Kalah”の定義する「標準的なゲーム」

先行研究との比較

	先行研究	本研究
ゲーム	Kalah	Simple-Kalah
対象盤面	以下条件内の初期盤面 Kalah(6, 4)など ピット : 1~6 stone/ピット : 1~6	任意の盤面 (初期盤面でなくても可) ピット: 任意の定数 stone/ピット: 1~4程度
解析手法	ゲーム木全列挙	数学的
結果	完全解析	勝利可能な 十分条件を証明

素材

