

最小全員当選モデル

名古屋大学情報文化学部3年

関本健悟*

九州大学経済学府

木谷裕紀

名古屋大学大学院情報学研究科

小野廣隆

投票とは何か

- **集団としての意思決定をする手段の一つに投票がある**
- 複数の選択肢が存在
例) どの牛丼屋に行くか？：
吉野家、すき家、松屋
- 集団を構成する個人は選択肢に対してそれぞれの選好順序を持つ

具体例

A~Cさんの3人からなる集団

Aさん: 吉野家 > 松屋 > すき家

Bさん: 吉野家 > すき家 > 松屋

Cさん: 松屋 > 吉野家 > すき家

この集団においてどこの牛丼屋に行くか決定したい

⇒投票を用いる

知られていること

- **アローの不可能性定理**

 - …民意を完全に反映する投票方法は存在しない

 - ⇒現実社会では完璧ではないが、ある程度妥当な投票方法が用いられている

- **よく使われる投票方法**

1. 「**単記投票方式**」
2. 「**上位2者決戦方式**」
3. 「**勝ち抜き決戦方式**」
4. 「**順位評点方式（ボルダ法）**」
5. 「**総当たり方式**」

全てがある種の多数決ベース



どの投票方法を用いても
直感的には結果は似たような
選択肢が選出される気がする。

簡単な例

吉野家 > 松屋 > すき家	4 人
すき家 > 吉野家 > 松屋	3 人
松屋 > 吉野家 > すき家	2 人

- 単記投票方式
- 上位 2 者決戦方式
- 勝ち抜き決戦方式
- 順位評点方式 (ボルダ法)
- 総当たり決戦方式

簡単な例

吉野家 > 松屋 > すき家	4 人
すき家 > 吉野家 > 松屋	3 人
松屋 > 吉野家 > すき家	2 人

- 単記投票方式
- 上位 2 者決戦方式
- 勝ち抜き決戦方式
- 順位評点方式 (ボルダ法)
- 総当たり決戦方式

簡単な例

吉野家 > 松屋 > すき家	4 人
すき家 > 吉野家 > 松屋	3 人
松屋 > 吉野家 > すき家	2 人

- 単記投票方式

1 位票が最も多い選択肢が勝利
⇒ **吉野家**が当選

簡単な例

吉野家 > 松屋 > すき家	4 人
すき家 > 吉野家 > 松屋	3 人
松屋 > 吉野家 > すき家	2 人

- 単記投票方式 ⇒ **吉野家** が当選
- 上位 2 者決戦方式
- 勝ち抜き決戦方式
- 順位評点方式 (ボルダ法)
- 総当たり決戦方式

簡単な例

吉野家 > 松屋 > すき家	4 人
すき家 > 吉野家 > 松屋	3 人
松屋 > 吉野家 > すき家	2 人

- 単記投票方式 ⇒ **吉野家**が当選
- 上位 2 者決戦方式
- 勝ち抜き決戦方式
- 順位評点方式 (ボルダ法)
- 総当たり決戦方式

簡単な例

吉野家 > 松屋 > すき家	4 人
すき家 > 吉野家 > 松屋	3 人
松屋 > 吉野家 > すき家	2 人

- 上位 2 者決戦方式

単記投票において全体の過半数を超える票数を持つ候補がない時上位 2 者で決選投票を行う。

簡単な例

吉野家 > 松屋 > すき家	4 人
すき家 > 吉野家 > 松屋	3 人
松屋 > 吉野家 > すき家	2 人

• 上位 2 者決戦方式

吉野家：4 票 → 上位 2 者

松屋：2 票

すき家：3 票 → 上位 2 者

簡単な例

吉野家 > 松屋 > すき家	4 人
すき家 > 吉野家 > 松屋	3 人
松屋 > 吉野家 > すき家	2 人

• 上位 2 者決戦方式

吉野家：4 票 → 上位 2 者

松屋：2 票 → 再投票

すき家：3 票 → 上位 2 者

簡単な例

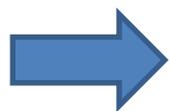
吉野家 > 松屋 > すき家	4 人
すき家 > 吉野家 > 松屋	3 人
松屋 > 吉野家 > すき家	2 人

• 上位 2 者決戦方式

吉野家 : 4 票

吉野家 : 2 票

すき家 : 3 票



吉野家 : 6 票

⇒ 吉野家が当選

簡単な例

吉野家 > 松屋 > すき家	4 人
すき家 > 吉野家 > 松屋	3 人
松屋 > 吉野家 > すき家	2 人

- 単記投票方式 ⇒ 吉野家が当選
- 上位 2 者決戦方式 ⇒ 吉野家が当選
- 勝ち抜き決戦方式
- 順位評点方式 (ボルダ法)
- 総当たり決戦方式

簡単な例

吉野家 > 松屋 > すき家	4 人
すき家 > 吉野家 > 松屋	3 人
松屋 > 吉野家 > すき家	2 人

- 単記投票方式 ⇒ 吉野家が当選
- 上位 2 者決戦方式 ⇒ 吉野家が当選
- 勝ち抜き決戦方式
- 順位評点方式 (ボルダ法)
- 総当たり決戦方式

簡単な例

吉野家 > 松屋 > すき家	4人
すき家 > 吉野家 > 松屋	3人
松屋 > 吉野家 > すき家	2人

- **勝ち抜き決戦方式**

1位票の数が少ない候補者から脱落していき、残った最後の1人を勝者とする。

簡単な例

吉野家	>	すき家	4人
すき家	>	吉野家	3人
吉野家	>	すき家	2人

- 勝ち抜き決戦方式

1位票の数が少ない候補者から脱落していき、残った最後の1人を勝者とする。**松屋が最初に脱落する。**

簡単な例

吉野家	4人
吉野家	3人
吉野家	2人

- 勝ち抜き決戦方式

1位票の数が少ない候補者から脱落していき、残った最後の1人を勝者とする。松屋が最初に脱落する。**次にすき家が脱落する。**

簡単な例

吉野家

4人

吉野家

3人

吉野家

2人

- 勝ち抜き決戦方式

1位票の数が少ない候補者から脱落していき、残った最後の1人を勝者とする。松屋が最初に脱落する。**次にすき家が脱落する。**

⇒吉野家が当選

簡単な例

吉野家 > 松屋 > すき家	4 人
すき家 > 吉野家 > 松屋	3 人
松屋 > 吉野家 > すき家	2 人

- 単記投票方式 ⇒ 吉野家が当選
- 上位 2 者決戦方式 ⇒ 吉野家が当選
- 勝ち抜き決戦方式 ⇒ 吉野家が当選
- 順位評点方式 (ボルダ法)
- 総当たり決戦方式

簡単な例

吉野家 > 松屋 > すき家	4 人
すき家 > 吉野家 > 松屋	3 人
松屋 > 吉野家 > すき家	2 人

- 単記投票方式 ⇒ 吉野家が当選
- 上位 2 者決戦方式 ⇒ 吉野家が当選
- 勝ち抜き決戦方式 ⇒ 吉野家が当選
- 順位評点方式 (ボルダ法)
- 総当たり決戦方式

簡単な例

吉野家 > 松屋 > すき家	4人
すき家 > 吉野家 > 松屋	3人
松屋 > 吉野家 > すき家	2人

- 順位評点方式（ボルダ法）

投票者の選好を順位で投票し、
1位:3点、2位:2点、3位:1点と点数をつけて総
得点が一番高い候補者を勝者とする方式。

簡単な例

吉野家 > 松屋 > すき家	4人
すき家 > 吉野家 > 松屋	3人
松屋 > 吉野家 > すき家	2人

- 順位評点方式 (ボルダ法)

吉野家 : $3 \times 4 + 2 \times (3 + 2) = 22$

松屋 : $2 \times 4 + 1 \times 3 + 3 \times 2 = 17$

すき家 : $1 \times (4 + 2) + 3 \times 3 = 15$

⇒ 吉野家が当選

簡単な例

吉野家 > 松屋 > すき家	4 人
すき家 > 吉野家 > 松屋	3 人
松屋 > 吉野家 > すき家	2 人

- 単記投票方式 ⇒ 吉野家が当選
- 上位 2 者決戦方式 ⇒ 吉野家が当選
- 勝ち抜き決戦方式 ⇒ 吉野家が当選
- 順位評点方式 (ボルダ法) ⇒ 吉野家が当選
- 総当たり決戦方式

簡単な例

吉野家 > 松屋 > すき家	4 人
すき家 > 吉野家 > 松屋	3 人
松屋 > 吉野家 > すき家	2 人

- 単記投票方式 ⇒ 吉野家が当選
- 上位 2 者決戦方式 ⇒ 吉野家が当選
- 勝ち抜き決戦方式 ⇒ 吉野家が当選
- 順位評点方式 (ボルダ法) ⇒ 吉野家が当選
- 総当たり決戦方式

簡単な例

吉野家 > 松屋 > すき家	4 人
すき家 > 吉野家 > 松屋	3 人
松屋 > 吉野家 > すき家	2 人

- **総当たり決戦方式**

立候補者全員による総当たり決戦投票の票数の合計で争う方式。

簡単な例

吉野家 > 松屋 > すき家	4人
すき家 > 吉野家 > 松屋	3人
松屋 > 吉野家 > すき家	2人

- 総当たり決戦方式

吉野家 vs すき家・・・6対3

⇒吉野家の勝利

簡単な例

吉野家 > 松屋 > すき家	4人
すき家 > 吉野家 > 松屋	3人
松屋 > 吉野家 > すき家	2人

- 総当たり決戦方式

吉野家 vs 松屋・・・7対2

⇒ 吉野家の勝利

簡単な例

吉野家 > 松屋 > すき家	4 人
すき家 > 吉野家 > 松屋	3 人
松屋 > 吉野家 > すき家	2 人

- 総当たり決戦方式

吉野家は他の選択肢2つよりも望ましいと考えられている。

⇒ **吉野家**が当選

簡単な例

吉野家 > 松屋 > すき家	4 人
すき家 > 吉野家 > 松屋	3 人
松屋 > 吉野家 > すき家	2 人

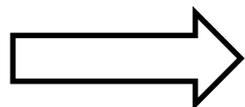
- 単記投票方式 ⇒ 吉野家が当選
- 上位 2 者決戦方式 ⇒ 吉野家が当選
- 勝ち抜き決戦方式 ⇒ 吉野家が当選
- 順位評点方式 (ボルダ法) ⇒ 吉野家が当選
- 総当たり決戦方式 ⇒ 吉野家が当選

パウロスの全員当選モデル（1991）

- 5つの選択肢（A～E）
- **55人**による**6**選好パターン
- 5つの投票方法

- 「**単記投票方式**」
- 「**上位2者決戦方式**」
- 「**勝ち抜き決戦方式**」
- 「**順位評点方式**」
- 「**総当たり方式**」

パターン①	A > D > E > C > B	18人
パターン②	B > E > D > C > A	12人
パターン③	C > B > E > D > A	10人
パターン④	D > C > E > B > A	9人
パターン⑤	E > B > D > C > A	4人
パターン⑥	E > C > D > B > A	2人
		計55人



各投票方法における勝者がそれぞれ異なる

単記投票方式

パウロスモデルでは18票を得たAが当選する。

パターン①	A > D > E > C > B	18人
パターン②	B > E > D > C > A	12人
パターン③	C > B > E > D > A	10人
パターン④	D > C > E > B > A	9人
パターン⑤	E > B > D > C > A	4人
パターン⑥	E > C > D > B > A	2人

上位2者決戦方式

パウロスモデルではAとBで決選投票を行い、その際Bにパターン②～⑥のすべての票がはいることになる。18票対37票で**Bが当選**する。

パターン①	A > D > E > C > B	18人
パターン②	B > E > D > C > A	12人→37人
パターン③	C > B > E > D > A	10人
パターン④	D > C > E > B > A	9人
パターン⑤	E > B > D > C > A	4人
パターン⑥	E > C > D > B > A	2人

勝ち抜き決戦方式

- パターン① A>D>E>C>B 18人
- パターン② B>E>D>C>A 12人
- パターン③ C>B>E>D>A 10人
- パターン④ D>C>E>B>A 9人
- パターン⑤ E>B>D>C>A 4人
- パターン⑥ E>C>D>B>A 2人

A	B	C	D	E
18	12	10	9	6

勝ち抜き決戦方式

- パターン① A>D>E>C>B 18人
- パターン② B>E>D>C>A 12人
- パターン③ C>B>E>D>A 10人
- パターン④ D>C>E>B>A 9人
- パターン⑤ E>B>D>C>A 4人**
- パターン⑥ E>C>D>B>A 2人**

A	B	C	D	E
18	12	10	9	6

勝ち抜き決戦方式

- パターン① A>D>E>C>B 18人
- パターン② B>E>D>C>A 12人
- パターン③ C>B>E>D>A 10人
- パターン④ D>C>E>B>A 9人
- パターン⑤ E>B>D>C>A 4人**
- パターン⑥ E>C>D>B>A 2人**

A	B	C	D	E
18	12	10	9	6
脱落				

勝ち抜き決戦方式

パターン①	A>D> C>B	18人
パターン②	B> D>C>A	12人
パターン③	C>B> D>A	10人
パターン④	D>C> B>A	9人
パターン⑤	B>D>C>A	4人
パターン⑥	C>D>B>A	2人

A	B	C	D
18	12	10	9
	+4	+2	

勝ち抜き決戦方式

パターン①	A>D> C>B	18人
パターン②	B> D>C>A	12人
パターン③	C>B> D>A	10人
パターン④	D>C> B>A	9人
パターン⑤	B>D>C>A	4人
パターン⑥	C>D>B>A	2人

A	B	C	D
18	12	10	9
	+4	+2	
18	16	12	9

勝ち抜き決戦方式

- パターン① A>D> C>B 18人
- パターン② B> D>C>A 12人
- パターン③ C>B> D>A 10人
- パターン④ D>C> B>A 9人**
- パターン⑤ B>D>C>A 4人
- パターン⑥ C>D>B>A 2人

A	B	C	D
18	12	10	9
	+4	+2	
18	16	12	9

勝ち抜き決戦方式

パターン①	A>D> C>B	18人
パターン②	B> D>C>A	12人
パターン③	C>B> D>A	10人
パターン④	D>C> B>A	9人
パターン⑤	B>D>C>A	4人
パターン⑥	C>D>B>A	2人

A	B	C	D
18	12	10	9
	+4	+2	
18	16	12	9
			脱落

勝ち抜き決戦方式

パターン①	A>	C>B	18人
パターン②	B>	C>A	12人
パターン③	C>B>	A	10人
パターン④	C>	B>A	9人
パターン⑤	B>	C>A	4人
パターン⑥	C>	B>A	2人

A	B	C
18	12	10
	+4	+2
18	16	12
		+9

勝ち抜き決戦方式

パターン①	A>	C>B	18人
パターン②	B>	C>A	12人
パターン③	C>B>	A	10人
パターン④	C>	B>A	9人
パターン⑤	B>	C>A	4人
パターン⑥	C>	B>A	2人

A	B	C
18	12	10
	+4	+2
18	16	12
		+9
18	16	21

勝ち抜き決戦方式

パターン①	A>	C>B	18人
パターン②	B>	C>A	12人
パターン③	C>B>	A	10人
パターン④	C>	B>A	9人
パターン⑤	B>	C>A	4人
パターン⑥	C>	B>A	2人

A	B	C
18	12	10
	+4	+2
18	16	12
		+9
18	16	21

勝ち抜き決戦方式

パターン① A> C>B 18人
パターン② **B> C>A 12人**
パターン③ C>B> A 10人
パターン④ C> B>A 9人
パターン⑤ **B> C>A 4人**
パターン⑥ C> B>A 2人

A	B	C
18	12	10
	+4	+2
18	16	12
		+9
18	16	21
	脱落	

勝ち抜き決戦方式

パターン①	A>	C	18人
パターン②		C>A	12人
パターン③	C>	A	10人
パターン④	C>	A	9人
パターン⑤		C>A	4人
パターン⑥	C>	A	2人

A	C
18	10
	+2
18	12
	+9
18	21
	+16

勝ち抜き決戦方式

パターン①	A>	C	18人
パターン②		C>A	12人
パターン③	C>	A	10人
パターン④	C>	A	9人
パターン⑤		C>A	4人
パターン⑥	C>	A	2人

A	C
18	10
	+2
18	12
	+9
18	21
	+16
18	37

勝ち抜き決戦方式

パターン①	A>	C	18人
パターン②		C>A	12人
パターン③	C>	A	10人
パターン④	C>	A	9人
パターン⑤		C>A	4人
パターン⑥	C>	A	2人

A	C
18	10
	+2
18	12
	+9
18	21
	+16
18	37

勝ち抜き決戦方式

パターン①	A>	C	18人
パターン②		C>A	12人
パターン③	C>	A	10人
パターン④	C>	A	9人
パターン⑤		C>A	4人
パターン⑥	C>	A	2人

A	C
18	10
	+2
18	12
	+9
18	21
	+16
18	37
脱落	

勝ち抜き決戦方式

パターン①		C	18人
パターン②		C	12人
パターン③	C		10人
パターン④		C	9人
パターン⑤		C	4人
パターン⑥	C		2人

$$\begin{array}{r} C \\ \hline 10 \\ +2 \\ \hline 12 \\ +9 \\ \hline 21 \\ +16 \\ \hline 37 \\ \hline \end{array}$$

勝ち抜き決戦方式

最終的にCが当選する。

パターン①		C	18人
パターン②		C	12人
パターン③	C		10人
パターン④	C		9人
パターン⑤		C	4人
パターン⑥	C		2人

$$\begin{array}{r} C \\ \hline 10 \\ +2 \\ \hline 12 \\ +9 \\ \hline 21 \\ +16 \\ \hline 37 \\ \hline \end{array}$$

順位評点方式（ボルダ法）

投票者の選好を順位で投票し、1位:5点、2位:4点、3位:3点、4位:2点、5位:1点と点数をつける。

A:127点 B:156点 C:162点 **D:191点** E:189点となり、**Dが当選**する。

パターン①	A > D > E > C > B	18人
パターン②	B > E > D > C > A	12人
パターン③	C > B > E > D > A	10人
パターン④	D > C > E > B > A	9人
パターン⑤	E > B > D > C > A	4人
パターン⑥	E > C > D > B > A	2人

順位評点方式 (ボルダ法)

投票者の選好を順位で投票し、1位:5点、2位:4点、3位:3点、4位:2点、5位:1点と点数をつける。

$$\text{計算例(A): } 5 \times 18 + 1 \times (12 + 10 + 9 + 4 + 2) = 127$$

$$\text{計算例(D): } 5 \times 9 + 4 \times 18 + 3 \times (12 + 4 + 2) + 2 \times 10 = 191$$

パターン①	A > D > E > C > B	18人
パターン②	B > E > D > C > A	12人
パターン③	C > B > E > D > A	10人
パターン④	D > C > E > B > A	9人
パターン⑤	E > B > D > C > A	4人
パターン⑥	E > C > D > B > A	2人

総当たり決戦方式

パウロスモデルでは
A対E(18対37), B対E(22対33), C対E(19対36), D対E(27対28)
となりEが当選する。

- パターン① A>D>E>C>B 18人
- パターン② B>E>D>C>A 12人
- パターン③ C>B>E>D>A 10人
- パターン④ D>C>E>B>A 9人
- パターン⑤ E>B>D>C>A 4人
- パターン⑥ E>C>D>B>A 2人

	A	B	C	D	E
A	-	18-37	18-37	18-37	18-37
B	37-18	-	16-39	26-29	22-33
C	37-18	39-16	-	12-43	19-36
D	37-18	29-26	43-12	-	27-28
E	37-18	33-22	36-19	28-27	-

全員当選モデルの存在

- 単記投票方式 ⇒ Aが当選
- 上位2者決戦方式 ⇒ Bが当選
- 勝ち抜き決戦方式 ⇒ Cが当選
- 順位評点方式（ボルダ法） ⇒ Dが当選
- 総当たり決戦方式 ⇒ Eが当選

⇒以上より、
ある条件の下では全ての選択肢が当選し得る。

本研究の目的

パウロスのモデルはこの「問題」の本質を突く例になっているのか？

- 55人よりも小さな例が存在するか？
⇒する!!
- 選好パターンが6つよりも小さい例が存在するか？
⇒する!!

主結果①

定理1

投票人数が11人の時、各投票方法における勝者がそれぞれ異なる例が存在する

定理2

投票パターンが4つ かつ 投票人数が17人の時、各投票方法における勝者がそれぞれ異なる例が存在する

投票者11人の例

パターン①	A>E>D>C>B	4人	
パターン②	B>D>E>C>A	2人	
パターン③	B>E>D>C>A	1人	
パターン④	C>D>B>E>A	2人	
パターン⑤	D>C>E>B>A	1人	
パターン⑥	E>C>D>B>A	1人	合計11人

- ・ 単記投票方式→**Aが勝利**
- ・ 上位2者決戦方式→**Bが勝利**
- ・ 勝ち抜き決戦方式→**Cが勝利**
- ・ 順位評点方式→**Dが勝利** A:27点, B:29点, C:32点, D:39点, E:38点
- ・ 総当たり方式→**Eが勝利**
A対E(4対7), B対E(5対6), C対E(3対8), D対E(5対6)

選好パターンが4つ 投票人数が17人の例

パターン①	A>D>E>B>C	6人	
パターン②	B>E>D>C>A	5人	
パターン③	C>E>D>B>A	4人	
パターン④	D>C>A>E>B	2人	合計17人

- ・ 単記投票方式→**Aが勝利**
- ・ 上位2者決戦方式→**Bが勝利**
- ・ 勝ち抜き決戦方式→**Cが勝利**
- ・ 順位評点方式→**Dが勝利** (A:45点, B:47点, C:44点, D:61点, E:58点)
- ・ 総当たり方式→**Eが勝利**
A対E(8対9), B対E(5対12), C対E(6対11), D対E(8対9)

分かっている事実

定理3

投票人数が10人以下の時、「単記投票方式」、「上位2者決戦方式」、「勝ち抜き決戦方式」のそれぞれの投票方式において選出された唯一の勝者が異なるようなモデルは存在しない。

定理4

選好パターンが3つ以下の時、「単記投票方式」、「上位2者決戦方式」、「勝ち抜き決戦方式」のそれぞれの投票方式において選出された唯一の勝者が異なるようなモデルは存在しない。

主結果②

定理 3'

投票人数11人の例は最小人数による全員当選モデルである。

定理 4'

選好パターン4パターンの例は最小パターンによる全員当選モデルである。

予想

パターン①	$A > D > \dots$ (任意)	k_1 人
パターン②	$B > E > D > C > A$	k_2 人
パターン③	$C > E > D > B > A$	k_3 人
パターン④	$D > C > \dots$ (任意)	k_4 人
		合計 n 人

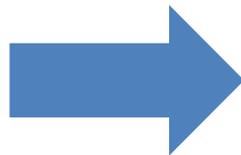
$k_1 \sim k_4, n$ が以下の条件を満たし、上の選好順序を持つときのみ、選好パターンが4つの全員当選モデルが存在する。

- $1 \leq k_2 - k_3 < k_4 < k_3 < k_2 < k_1 < \frac{n}{2}$
- $k_1 + k_4 < k_2 + k_3 < k_1 + 2k_4$

今後の課題

- 予想の証明
- 各投票方法に厳密な定義が必要
 - 現段階では同率の選択肢に関する処理などに関する規定が存在しないため、妥当なものになるように自分で定義するしかない。

A>B>C	2人
B>C>A	2人
C>A>B	1人



単記投票方式において、
唯一の勝者が決定出来
ない。

パターン①	A>E>D>C>B	4人	
パターン②	B>D>E>C>A	2人	
パターン③	B>E>D>C>A	1人	
パターン④	C>D>B>E>A	2人	
パターン⑤	D>C>E>B>A	1人	
パターン⑥	E>C>D>B>A	1人	合計11人

パターン①	A>D>E>B>C	6人	
パターン②	B>E>D>C>A	5人	
パターン③	C>E>D>B>A	4人	
パターン④	D>C>A>E>B	2人	合計17人