

# 制約が少ないサンプルの最少ヒント数

株式会社 タイムインターメディア  
早川友康

# ナンプレ

- ルール

- 空いているマスに1～9の数字を入れる
- 各行, 列, ブロックに同じ数字が入ってはいけない

					3			
		6			1	2		
	7	8						
							9	8
							7	
3	2							
	1					5		
			8	9			4	
			7					

1	4	2	5	7	3	8	6	9
9	3	6	4	8	1	2	5	7
5	7	8	6	2	9	1	3	4
4	6	1	2	5	7	3	9	8
8	9	5	1	3	4	6	7	2
3	2	7	9	6	8	4	1	5
7	1	9	3	4	2	5	8	6
2	5	3	8	9	6	7	4	1
6	8	4	7	1	5	9	2	3

# ナンプレの最少ヒント数

盘面(n×n)	ブロック	最少ヒント数	
4×4	2×2	4	
6×6	2×3	8	
8×8	2×4	14	
9×9	3×3	17	ここまで証明されている
10×10	2×5	(22)	
12×12	2×6	(32)	
12×12	3×4	(30)	
15×15	3×5	(48)	
16×16	4×4	(55)	
20×20	4×5	(91)	たぶんまだ減る
25×25	5×5	(146)	たぶんまだ減る

# ラテン方阵パズルの最少ヒント数

盘面(n×n)	最少ヒント数	
1×1	0	
2×2	1	
3×3	2	
4×4	4	
5×5	6	
6×6	9	
7×7	12	
8×8	16	ここまで証明されている
9×9	(20)	
10×10	(25)	
11×11	(30)	
12×12	(36)	
13×13	(44)	減るかも？

# 最少ヒント数の推測

- ナンプレ（ラテン方陣にも適用可）

- $n \times (n+2) \times \dots \times (n+2(C-2)) < T$

- $T < n \times (n+2) \times \dots \times (n+2(C-1))$

- $n$  : 盤面のサイズ,  $T$  : 解の総数,  $C$  : 最少ヒント数？

Gary, McGuire., Bastian, Tugemann., and Gilles, Civario.: There is no 16-Clue Sudoku: Solving the Sudoku Minimum Number of Clues Problem via Hitting Set Enumeration, p.8 (2013).

- ラテン方陣

- $\text{floor}(n^2 / 4)$

- $n$  : 盤面のサイズ

# 最少ヒント数の推測

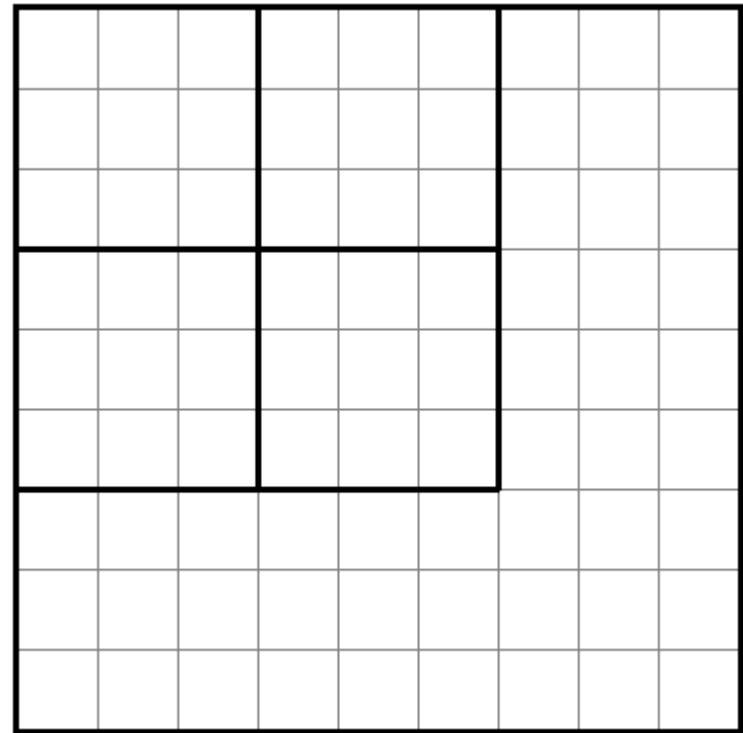
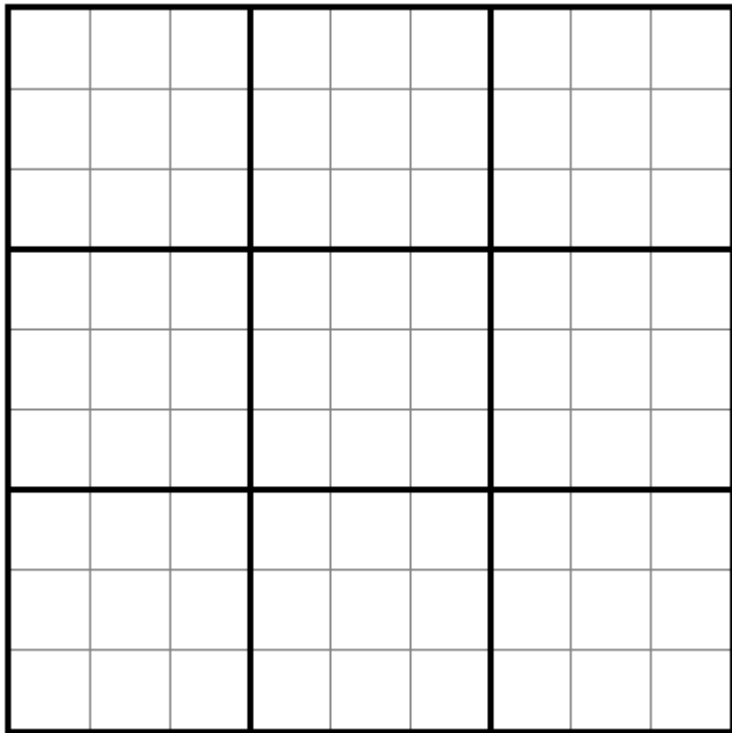
- 別のサンプルの式が欲しい
- 解の総数(T)は使わない
- 盤面( $n \times n$ )とブロック( $h \times w$ )を使う
- ラテン方阵の式からブロックの制約分引けばいいのでは？
  
- $\text{floor}(n^2 / 4) - (h - 1)(w - 1)$

# 最少ヒント数の推測

盤面(n×n)	ブロック	最少ヒント数	$\text{floor}(n^2 / 4) - (h - 1)(w - 1)$
4×4	2×2	4	3
6×6	2×3	8	7
8×8	2×4	14	13
9×9	3×3	17	16
10×10	2×5	(22)	21
12×12	2×6	(32)	31
12×12	3×4	(30)	30
15×15	3×5	(48)	48
16×16	4×4	(55)	55
20×20	4×5	(91)	88
25×25	5×5	(146)	140

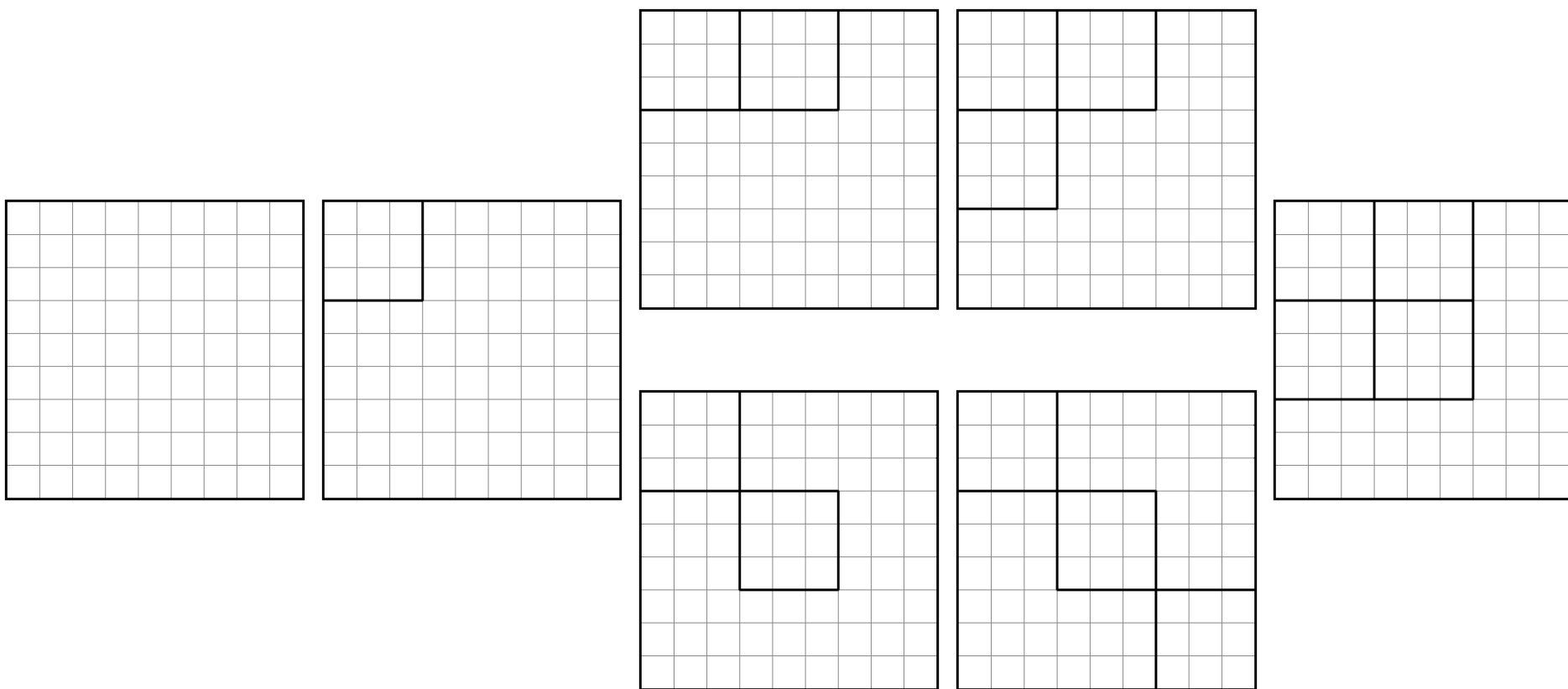
# 本質的なブロック

- $\text{floor}(n^2 / 4) - (h - 1)(w - 1)$





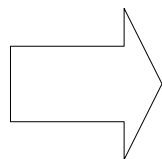
# 本質的なブロック



# 生成アルゴリズム

- 適当な手筋を使って解く
  - 唯一解 or 不明 or 解無し
- どのくらい唯一解に近いか？
  - 各マスの候補数の平方和

9				2			
	7		1				8
		6	5			9	
			8		6		
		4			3		
			6				
				1			
			9	7			6

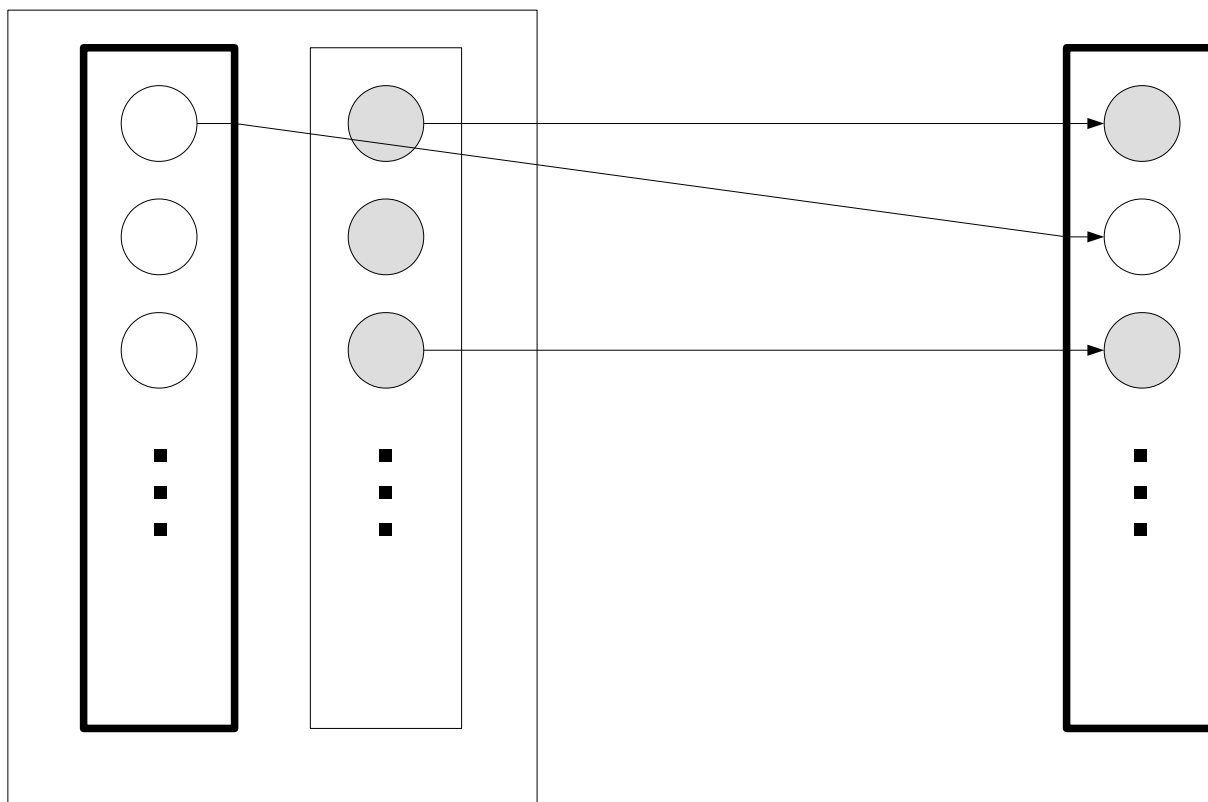


9				2			
				7			
	7		1	9			8
		6	5	1	9		
			8	6			
		4	7		3		
			6	3			
			2	1			
			9	7			6

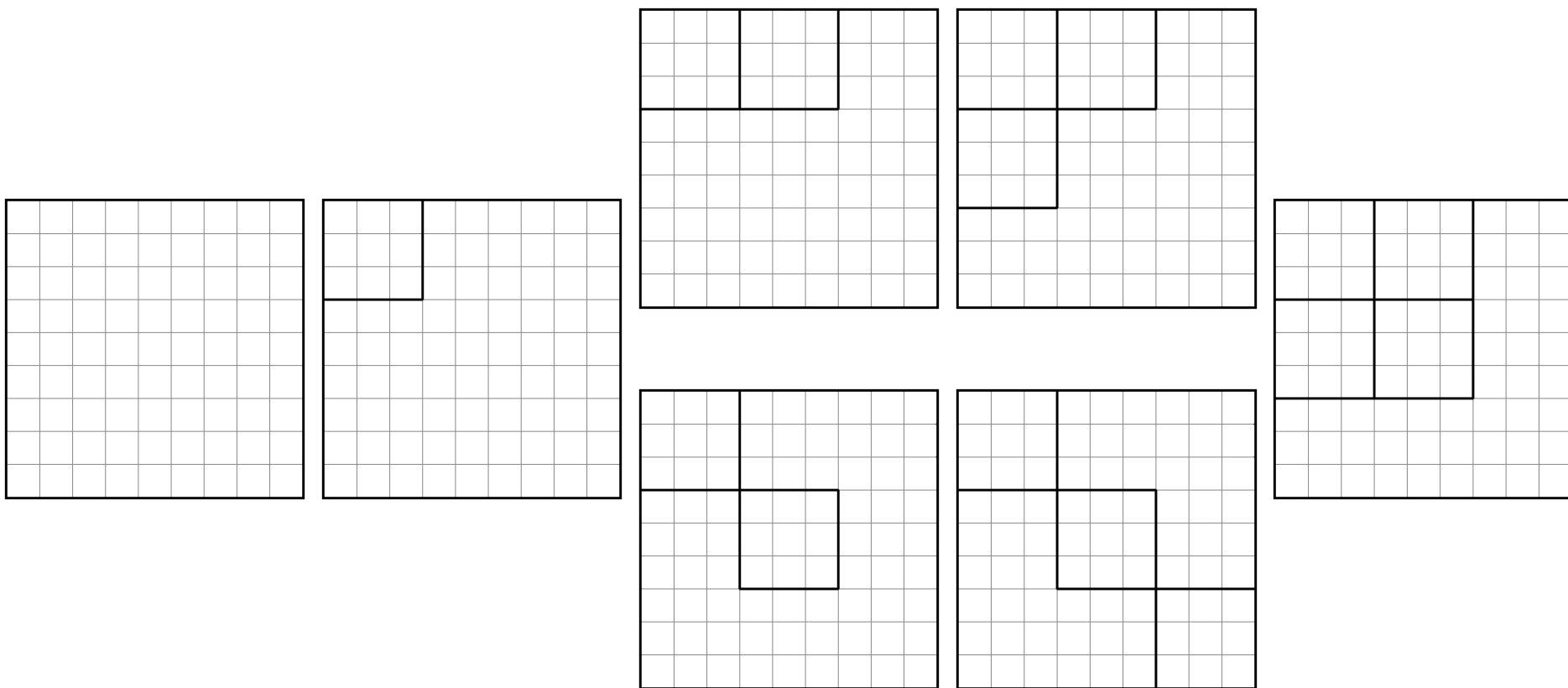
1493

# 生成アルゴリズム

- 進化的プログラミング
  - コピー, 突然変異
  - 良い個体は高確率, 悪い個体は低確率で選ぶ



# 本質的なブロック



# ブロック×1, ヒント数19

7	8							
			2					
		1	4		3			
						8	5	6
3		2						
		3						
						5	6	
						6		
1	2	4	3					

# ブロック×2, ヒント数18

					7			
					8			3
6						5		
	4	8			3			7
		3						
			1			6		
			6			9	1	
			5					
	3	7						

# ブロック×2, ヒント数18

	3				9			
7			1			2		8
								2
							6	
					4		9	
		1	8	7				
8		4						
					6		3	
					3			

# ブロック×3, ヒント数17

				6				
				9				
		3				1		
6			3					
5			8					
			1		4	3		
7				2				6
				5				9
		4						



# ブロック×3, ヒント数16

			2			7		
		1		2				
	7							3
					9		3	
					1			8
	5		7					
5								1
7	6							

# 6×6 (2×3)

ブロック	最少ヒント数
0	9
1	(8)
2	8

		2			
				1	
		4			
1				5	
6					
		3			2

# 8×8 (2×4)

ブロック	最少ヒント数
0	16
1	(15)
2	(14)
3	14

	1						
					4		
				8			
				2		8	1
5		4					
			7	1			
3	7	5	4				
		7					

7			8	3			
				6			
				4	6		
			7	2			
	6	2					
							5
						8	7
	4						

# 10×10(2×5)

ブロック	最少ヒント数
0	(25)
1	(24)
2	(23)
3	(22)
4	(22)

	7			9					
	1							5	
			6						
6		10	3	5					
			5						9
					4				
5		6	10						
	8				9	7			4
	9				8				7
	4				7				

				9	2		3		
10							4		
6	5								
					4		2		
				3			8		
					5	7		10	6
				2					
								6	5
								7	
		3	2	8			9		

					6			7	
2				10					
	7		4		8				
						10			
3		2		1					9
5									
						2	3		1
			6						
						3			2
	6		8		4				

# ブロック×3, ヒント数16

			2			7		
		1		2				
	7							3
					9		3	
					1			8
	5		7					
5								1
7	6							

# ブロックに入る数字の数

			2			7		
		1		2				
	7							3
					9		3	
					1			8
	5		7					
5								1
7	6							

# ブロックに入る数字の数

			2		7		
		1		2			
	7						3
					9	3	
					1		8
	5		7				
5							1
7	6						

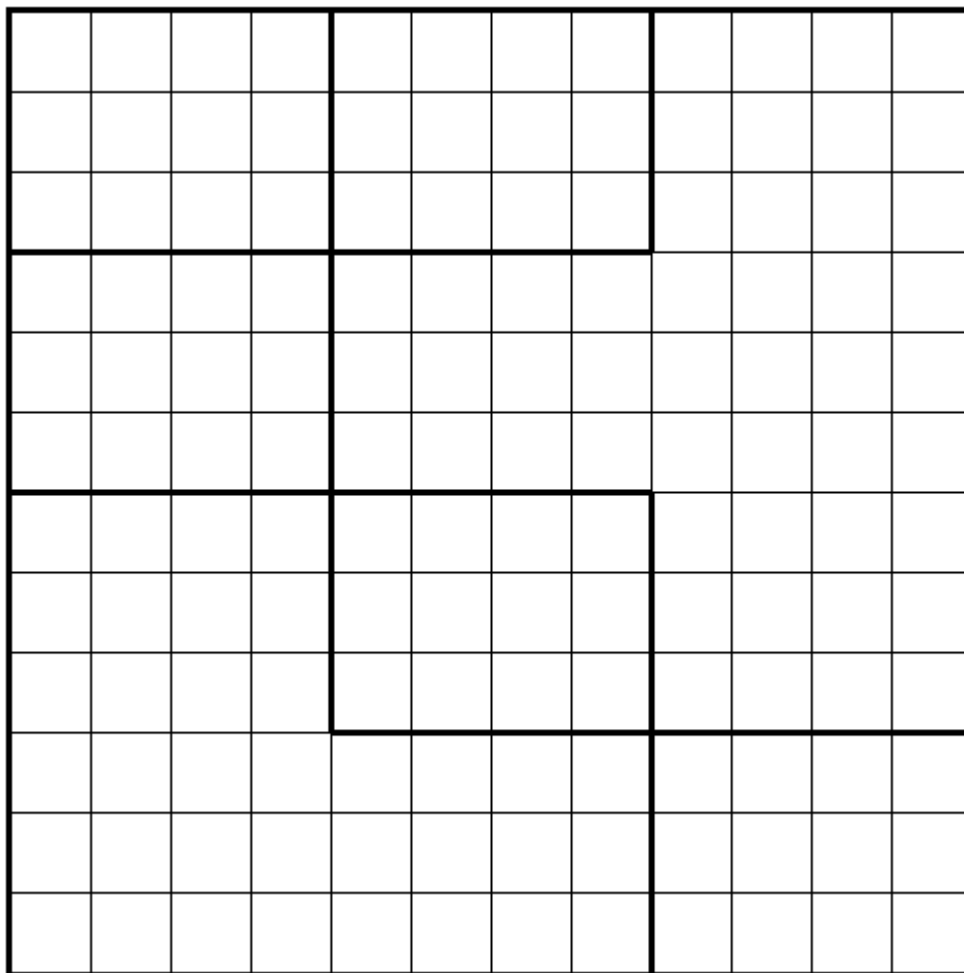
# ブロックに入る数字の数

			2			7		
		1		2				
	7							3
					9		3	
					1			8
	5		7					
5								1
7	6							



# 他に減りそうなのは？

- $12 \times 12 (3 \times 4)$ , ブロック $\times 5$





# まとめ

- ナンプレのブロックを4個から3個に減らすことで  
ヒントを17個から16個に減らすことができた
- $12 \times 12$  ( $3 \times 4$ ) のナンプレでも  
ブロックを6個から5個に減らすことで  
ヒントを30個から29個に減らすことができた

# その他

- 20×20 (4×5)  
ヒント数91
- たぶんまだ減る

											6								
9						18				3	2	14							1
	11					8								13					
	13			15		10	11						16		19				
		6		12								7					1	2	
														8					
2		1						5									9	3	6
	19					16	10							11					
	15		10	11		13	16			5			19						
	16			8		11													20
				19						2	9							6	1
							3			6	20		1		17		2	9	14
			7						20						10				
17		2				9	6	3											
				10								8		13	11	16			15
							14	2											
															8	13			
	8			13											15	10		18	11
14		20				1	2	4	6	9	3								
							9				14				16				

# その他

- 13×13

ヒント数44

- $\text{floor}(n^2 / 4) = 42$ 
  - まだ減るかも？

7	12								10			
6												
		3	5				13	11		2	8	
							5					
10	1					7			12			
11	4			7	12	10			1			
		9					2	5		8	3	
							9			5		
		5					8			3	9	
	7		3									
12									7			
1	10				7	12			4			
							3			9	5	

# その他

- $\text{floor}(n^2 / 4) - (h - 1)(w - 1)$
- $14 \times 14 (2 \times 7)$  - 最少は43~44?
- $16 \times 16 (2 \times 8)$  - 最少は57~58?
- $18 \times 18 (2 \times 9)$  - 最少は73~74?
- $18 \times 18 (3 \times 6)$  - 最少は71~72?

# その他

- 対角線ナンプレ
  - 最少ヒント数12(未証明)
  - 去年の5月時点で496,197問
  - $\{-1,+1\}$ は実行済み
  - $\{-2,+2\}$ を実行中