

# ナンプレの最少ヒント数の現状

株式会社タイムインターメディア  
早川友康

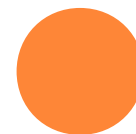
# ナンプレ

## ○ルール

- 空いているマスに1～9の数字を入れる
- 各行, 列, ブロックに同じ数字が入ってはいけない

					3			
		6			1	2		
	7	8						
							9	8
							7	
3	2							
	1					5		
			8	9			4	
			7					

1	4	2	5	7	3	8	6	9
9	3	6	4	8	1	2	5	7
5	7	8	6	2	9	1	3	4
4	6	1	2	5	7	3	9	8
8	9	5	1	3	4	6	7	2
3	2	7	9	6	8	4	1	5
7	1	9	3	4	2	5	8	6
2	5	3	8	9	6	7	4	1
6	8	4	7	1	5	9	2	3



# ナンプレ

- 最少ヒント数: 17
- Gary McGuire, Bastian Tugemann, Gilles Civario  
There is no 16-Clue Sudoku: Solving the Sudoku  
Minimum Number of Clues Problem, (2012).

					3			
		6			1	2		
	7	8						
							9	8
							7	
3	2							
	1					5		
			8	9			4	
			7					

1	4	2	5	7	3	8	6	9
9	3	6	4	8	1	2	5	7
5	7	8	6	2	9	1	3	4
4	6	1	2	5	7	3	9	8
8	9	5	1	3	4	6	7	2
3	2	7	9	6	8	4	1	5
7	1	9	3	4	2	5	8	6
2	5	3	8	9	6	7	4	1
6	8	4	7	1	5	9	2	3



# 他のサイズの最少ヒント数

盘面(n×n)	ブロック	解の総数(T)	最少ヒント数(C)
4×4	2×2	288	4
6×6	2×3	$2.82 \times 10^7$	8
8×8	2×4	$2.91 \times 10^{16}$	14
9×9	3×3	$6.67 \times 10^{21}$	17

- 9×9以下は証明されている



# 最少ヒント数を計算する方法？

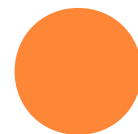
盘面(n×n)	ブロック	解の総数(T)	最少ヒント数(C)
4×4	2×2	288	4
6×6	2×3	$2.82 \times 10^7$	8
8×8	2×4	$2.91 \times 10^{16}$	14
9×9	3×3	$6.67 \times 10^{21}$	17

- 9×9以下は証明されている
- $n \times (n+2) \times \dots \times (n+2(C-2)) < T$   
 $T < n \times (n+2) \times \dots \times (n+2(C-1))$
- 16×16(4×4)について計算すると C=56



# 16 × 16 (4 × 4), ヒント数55, (2014年12月)

			9					3						2
				15			12	16					10	8
	4		5					9						
							10			13				15
		8												16
					5									
10		15												12
					13	9			4					7
				16			14							
	5		4					7		11	1	13	9	
			3					1			5		4	
				10			15							
15		16						8		10				14
					1	4						2		5
8								12		16				
					9	7	3							1



# 目的

- $16 \times 16(4 \times 4)$ , ヒント数54に挑戦

- $n \times (n+2) \times \cdots \times (n+2(C-2)) < T$

$T < n \times (n+2) \times \cdots \times (n+2(C-1))$

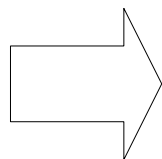
他のサイズについても調べる



# 生成アルゴリズム

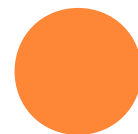
- 適当な手筋を使って解く
  - 唯一解 or 不明 or 解無し
- どのくらい唯一解に近いか？
  - 各マスの候補数の平方和

9				2			
	7		1				8
		6	5			9	
			8		6		
		4			3		
			6				
				1			
			9	7		6	



9				2			
				7			
	7		1	9			8
		6	5	1	9		
			8	6			
		4	7		3		
			6	3			
			2	1			
			9	7			6

1493





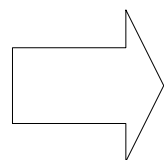
# 生成アルゴリズム

## ○ 局所探索法

- 唯一解に近づくように  
ヒントの数字と位置を変更する

9				2			
				7			
	7		1	9			8
		6	5	1	9		
			8	6			
		4	7	3			
			6	3			
			2	1			
			9	7			6

1493



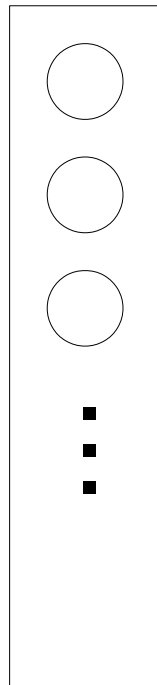
9			3	2			
		3	4	7			
	7		1	9			8
			5	1	9		
			8	6			
		4	7	3			
			6	3			
			2	1			
			9	7			6

1342



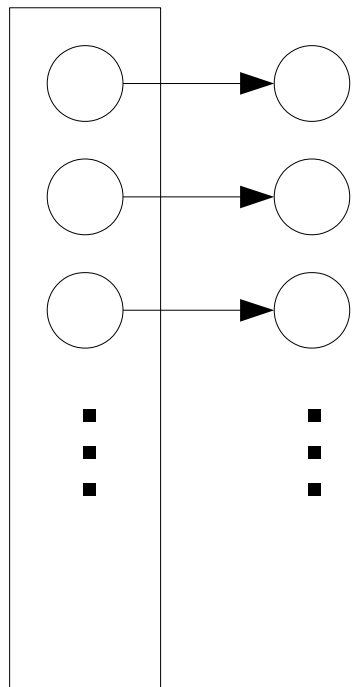
# 生成アルゴリズム

- 進化的プログラミング



# 生成アルゴリズム

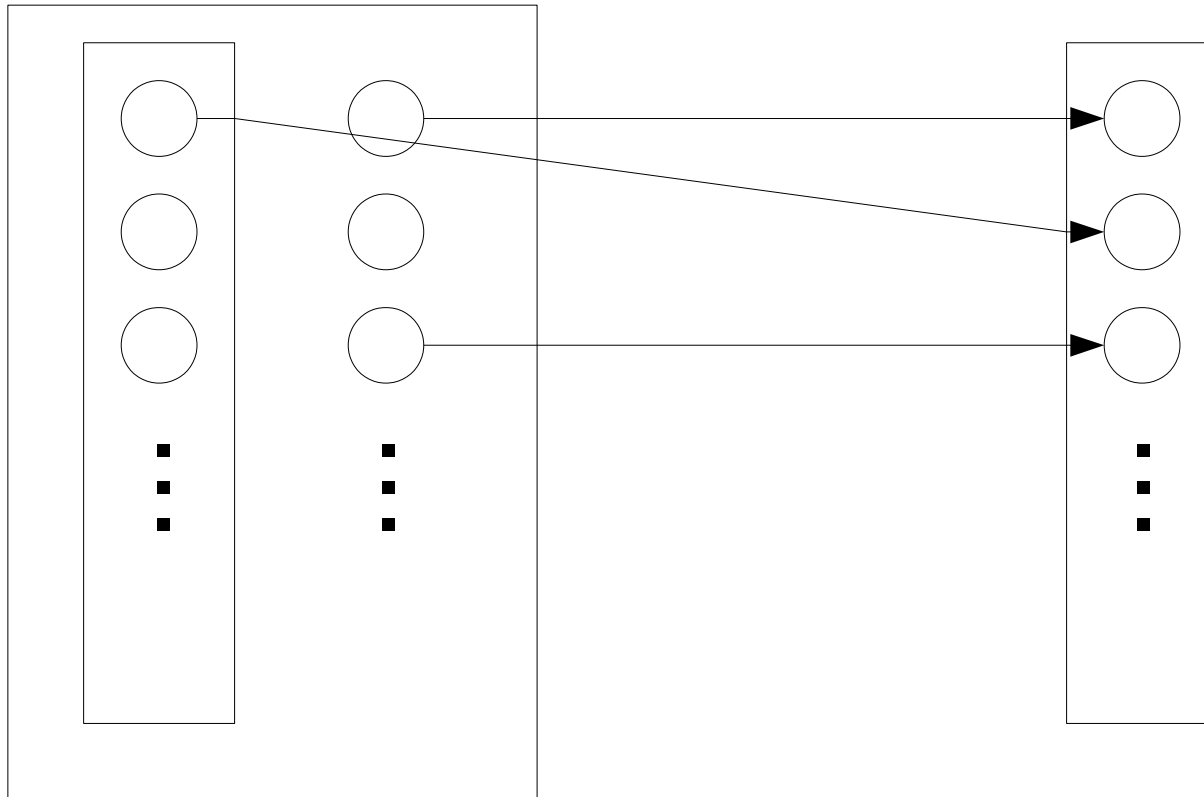
- 進化的プログラミング
  - コピー, 突然変異



# 生成アルゴリズム

## ○ 進化的プログラミング

- コピー, 突然変異
- 良い個体は高確率, 悪い個体は低確率で選ぶ



# 生成アルゴリズム

- 突然変異
  - 局所探索, ランダム
- 進化 → ヒントを1個抜く → 進化 → 1個足す → …
- 最初の個体群をヒントが1個多いナンプレから作る
  - $16 \times 16$  ( $4 \times 4$ ), ヒント数57のナンプレを作る
    - ヒント数58のナンプレからヒントを1つ抜いた問題を最初の個体群にする



# 16 × 16(4 × 4), ヒント数54に挑戦

- JAISTの上原研究室と共同研究 (2015年度)
- Cray XC30
  - 計算ノード
    - 360ノード/8640CPUコア
  - ノード構成
    - Intel Xeon E5-2690v3 2.6GHz (Haswell)  
12Core × 2ソケット
    - 128GBメモリ (16GB DDR4-2133 × 8)



# 16 × 16(4 × 4), ヒント数54に挑戦

- ヒント数54はできなかった (存在するかは不明)

ヒント数	コア数	実行時間(h)	生成した問題数
58	768	24	101
58(768問)→57	768	24	450
57(768問)→56	768	24	179
56(192問)→55	192	24	12
55(32問)→54	192	96	0

奥村 俊文 : 大規模計算機を用いるパズルの解き方の研究, pp.26-28 (2016)



# 他の反例を調べる

○  $n \times (n+2) \times \cdots \times (n+2(C-2)) < T$

$T < n \times (n+2) \times \cdots \times (n+2(C-1))$

- 盤面のサイズ( $n$ )と解の総数( $T$ )で $C$ が計算できる
- ラテン方阵も調べる, 作る
- 他のサイズのナンプレも作る
  - $10 \times 10 (2 \times 5)$
  - $12 \times 12 (2 \times 6)$
  - $12 \times 12 (3 \times 4)$
  - $15 \times 15 (3 \times 5)$






# ラテン方阵の最少ヒント数

盘面 (n×n)	scs (n)	
1×1	0	
2×2	1	
3×3	2	Nelder
4×4	4	Curran and van Rees (1978)
5×5	6	Curran and van Rees (1978)
6×6	9	Bate and van Rees (1999)
7×7	12	Adams and Khodkar (2001)
8×8	16	Richard Bean (2004)

scs : smallest critical set

Richard, Bean.: The size of the smallest uniquely completable set  
in order 8 Latin squares, p.2 (2004)



# ラテン方阵の最少ヒント数

盘面 (n×n)	scs(n)	
1×1	0	
2×2	1	
3×3	2	Nelder
4×4	4	Curran and van Rees (1978)
5×5	6	Curran and van Rees (1978)
6×6	9	Bate and van Rees (1999)
7×7	12	Adams and Khodkar (2001)
8×8	16	Richard Bean (2004)

scs : smallest critical set

○  $scs(n) = \text{floor}(n^2/4)$  と推測されている

Richard, Bean.: The size of the smallest uniquely completable set  
in order 8 Latin squares, p.2 (2004)

# ラテン方阵の最少ヒント数を推測する

盘面 (n×n)	解の総数 (T)	推測 (ナンプレ)	推測 (ラテン)
1×1	1		0
2×2	2		1
3×3	12	2	2
4×4	576	4	4
5×5	161,280	6	6
6×6	$8.13 \times 10^8$	9	9
7×7	$6.15 \times 10^{13}$	12	12
8×8	$1.09 \times 10^{20}$	16	16
9×9	$5.52 \times 10^{27}$	20	20
10×10	$9.98 \times 10^{36}$	25	25
11×11	$7.77 \times 10^{47}$	31	30
12×12	$3.10 \times 10^{60}$	38	36



# ラテン方阵の生成結果

盘面 (n×n)	解の総数 (T)	推測 (ナンプレ)	推測 (ラテン)	生成結果
1×1	1		0	
2×2	2		1	
3×3	12	2	2	
4×4	576	4	4	
5×5	161,280	6	6	
6×6	$8.13 \times 10^8$	9	9	
7×7	$6.15 \times 10^{13}$	12	12	
8×8	$1.09 \times 10^{20}$	16	16	
9×9	$5.52 \times 10^{27}$	20	20	20
10×10	$9.98 \times 10^{36}$	25	25	25
11×11	$7.77 \times 10^{47}$	31	30	30
12×12	$3.10 \times 10^{60}$	38	36	36

# ラテン方阵の生成結果

○ 9 × 9, ヒント数20

8						5	1	
5			8			1	9	
	4	7		2	3			
						8	5	
	7	2		3				
							8	
	2	3						
	3							

○ 10 × 10, ヒント数25

9					3				5
5				9	1				3
	4								
					5				9
					9				
	7						6	4	
	10					4	7	6	
	8		4			6	10	7	
	6						4		



# ラテン方阵の生成結果

○ 11 × 11, ヒント数30

			7	11		3	2		10	
			2	7			3		11	
				3					2	
					1					
			3	2					7	
4	9				6			8		1
1	8				9			4		
									3	
	4				8			1		
	1				4					

○ 12 × 12, ヒント数36

		8	6	5		3	12				10	
7					2				9	1		4
		5		12		10					6	
						12						
		6				5					12	
		12				6						
1												2
2												
9									2			1
		10	12	6		8					5	
4									1	2		9

# サンプルの生成結果

盤面 (n×n)	ブロック	解の総数 (T)	推測 (C)	生成結果
10×10	2×5	$1.90 \times 10^{30}$	22	22
12×12	2×6	$3.83 \times 10^{49}$	32	32
12×12	3×4	$8.11 \times 10^{46}$	30	30
15×15	3×5	$3.51 \times 10^{84}$	49	48
16×16	4×4	$5.96 \times 10^{98}$	56	55
20×20	4×5	$3.18 \times 10^{175}$	90	
25×25	5×5	$4.36 \times 10^{308}$	144	146



# ナンプレの生成結果

- $10 \times 10 (2 \times 5)$ , ヒント数22
- $12 \times 12 (2 \times 6)$ , ヒント数32

		6			9				
	8			3					
					5	8			
	3			1					
	6	7					3		
9			5						
	1	4							
					10	5		2	
							8		1
10		5							

		3				1		5	6	8	
2											
		6		8							
							10	12			9
12			10	2	9						
7									8		
	5	1		6							
							9				
							7				10
	6	8		5					3		
9			12								2
						5			4		



# ナンプレの生成結果

- $12 \times 12 (3 \times 4)$ , ヒント数30
- $15 \times 15 (3 \times 5)$ , ヒント数48

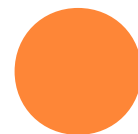
							2				
						5	11				3
7		9								10	
	5		2								
			6							8	
								10	9	7	
			11					12		2	
				8	10		1				
				9	7						4
10		7		1							
12											
							3		2		5

								1		11	9		
	12	10						8	2			7	
7											5	15	6
							9	11			7	4	
	10	12					6						
	8	2											3
4													
								12	3			2	13
11			5	9							6		
													10
		3									14		2
9							11						
								12	2	8	10		
6			15	11								9	5
5										13			



# まとめ

- $n \times (n+2) \times \cdots \times (n+2(C-2)) < T$   
 $T < n \times (n+2) \times \cdots \times (n+2(C-1))$
- 盤面のサイズがある程度小さい → 正しい
- 盤面のサイズがある程度大きい → 少し多め
  - $11 \times 11, 12 \times 12, 15 \times 15 (3 \times 5), 16 \times 16 (4 \times 4)$
- $20 \times 20 (4 \times 5)$  の最少ヒント数は90未満？
- $25 \times 25 (5 \times 5)$  の最少ヒント数は144未満？



# 今後

- $15 \times 15 (3 \times 5)$ 
  - ヒント数48を量産 → ヒント数47に挑戦
- $20 \times 20 (4 \times 5)$ 
  - ヒント数90未満を目指す
- $25 \times 25 (5 \times 5)$ 
  - アルゴリズムの改良が必要そう
- スパコン必要な気がする……

