

ナンプレのチェーン系解法のためのアルゴリズムについて

山口大学

北本卓也

発表の流れ

- ナンプレについて
- ナンプレの解法
- チェーン系の計算法について
- チェーン系の解法の拡張
- 計算実験
- まとめ

ナンプレについて

- 9×9マスに1~9までの数字を入れるパズル
- 各行、各列、各ブロックに1~9までの数字が1つずつ入る
- 初期配置の数字を対称的に入れる必要はないが、ニコリのパズル(数独)では対称的に入っている。
- 世界的に有名(世界大会あり)
- ニコリでは数独と呼ばれている

							2	1
	6	1		2				5
	7			9	1	8		
						2	8	9
	9						1	
7	1	2						
		8	4	6			3	
3				8		5	9	
9	2							

ナンプレの解法

koemon worksheet 図1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A		5				6			9
B		9			8	2	4		
C			8	1					
D	2				4			9	
E	4								8
F		7			3				6
G						3	8		
H			7	9	2			1	
I	3			8				6	

Copyright©2014 Koemon Inc. #2014#0000001#1-1-1#L1#

koemon worksheet

図3

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1 2 3	5	1 2 3	1 2 3	1 2 3	6	1 2 3	1 2 3	9
	4 5 6		4 5 6	4 5 6	4 5 6		4 5 6	4 5 6	
	7 8 9		7 8 9	7 8 9	7 8 9		7 8 9	7 8 9	
	1 2 3		1 2 3	1 2 3			1 2 3	1 2 3	

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1 2 3 4 5 6 7 8 9	5	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	6	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	9

$A2=\{5\}$ ならば

$5 \notin A1, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9$

	1	2	3	4	5
A	1 2 3 4 5 6 7 8 9	5	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 4 5 7 8
B	1 2 3 4 5 6 7 8 9	9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	8
C	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	8	1	1 2 4 5 7 8
D	2	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	4

$A2=\{5\}$ ならば

$5 \notin A1, A3, B1, B2, B3, C1, C2, C3$

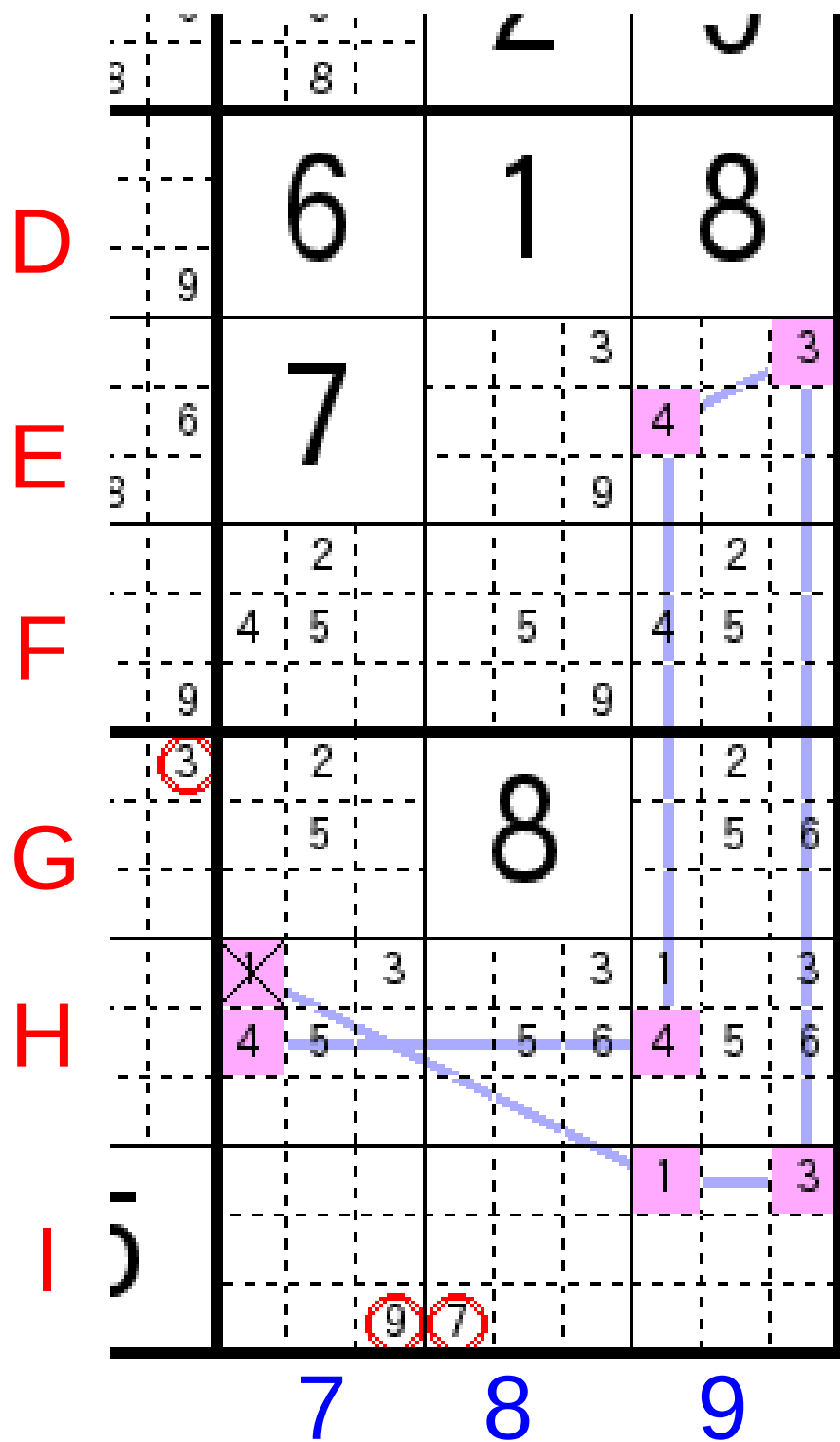
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1 2 3 4 5 6 7 8 9	⑤	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	⑥	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	⑨
B	1 2 3 4 5 6 7 8 9	⑨	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	⑧	②	④	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9
C	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	⑧	①	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9
D	②	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	④	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	⑨	1 2 3 4 5 6 7 8 9
E	④	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	⑧
F	1 2 3 4 5 6 7 8 9	⑦	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	③	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	⑥
G	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	③	⑧	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9
H	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	⑦	⑨	②	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	①	1 2 3 4 5 6 7 8 9
I	③	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	⑧	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9	⑥	1 2 3 4 5 6 7 8 9

解法テクニック

- N国同盟 (Locked Set)
- AB操作 (Intersection Removal, RowColumn Subsets)
- チェーン

チェーン系の解法について

- 強力な方法だが、使うのが難しい高等テクニック。
- 色々なバリエーションがあるが、基本原理は同じ。
- 数学的な原理は背理法。



$H7 = 1 \Rightarrow I9 \neq 1 \Rightarrow I9 = 3$
 $\Rightarrow E9 \neq 3 \Rightarrow E9 = 4$
 $\Rightarrow H9 \neq 4 \Rightarrow H7 = 4$
 $\Rightarrow H7 \neq 1$

よって $H7 \neq 1$

先ほどの例の一般化(チェーン)

- 数字をつないで奇数回で元に戻る物を探す
- つなぐことができるのは
 - 同じ行にある同じ数字
 - 同じ列にある同じ数字
 - 同じ3x3ブロックにある同じ数字
 - 同じマスにある異なる数字
- 偶数番目、または奇数番目のリンクは同じブロック内に選択肢(同じ数字)が2つのみ⇒強リンク

チェーンを探すアルゴリズム

- 残っている数字の候補のノードとみなして経路探索アルゴリズムを使う。

D

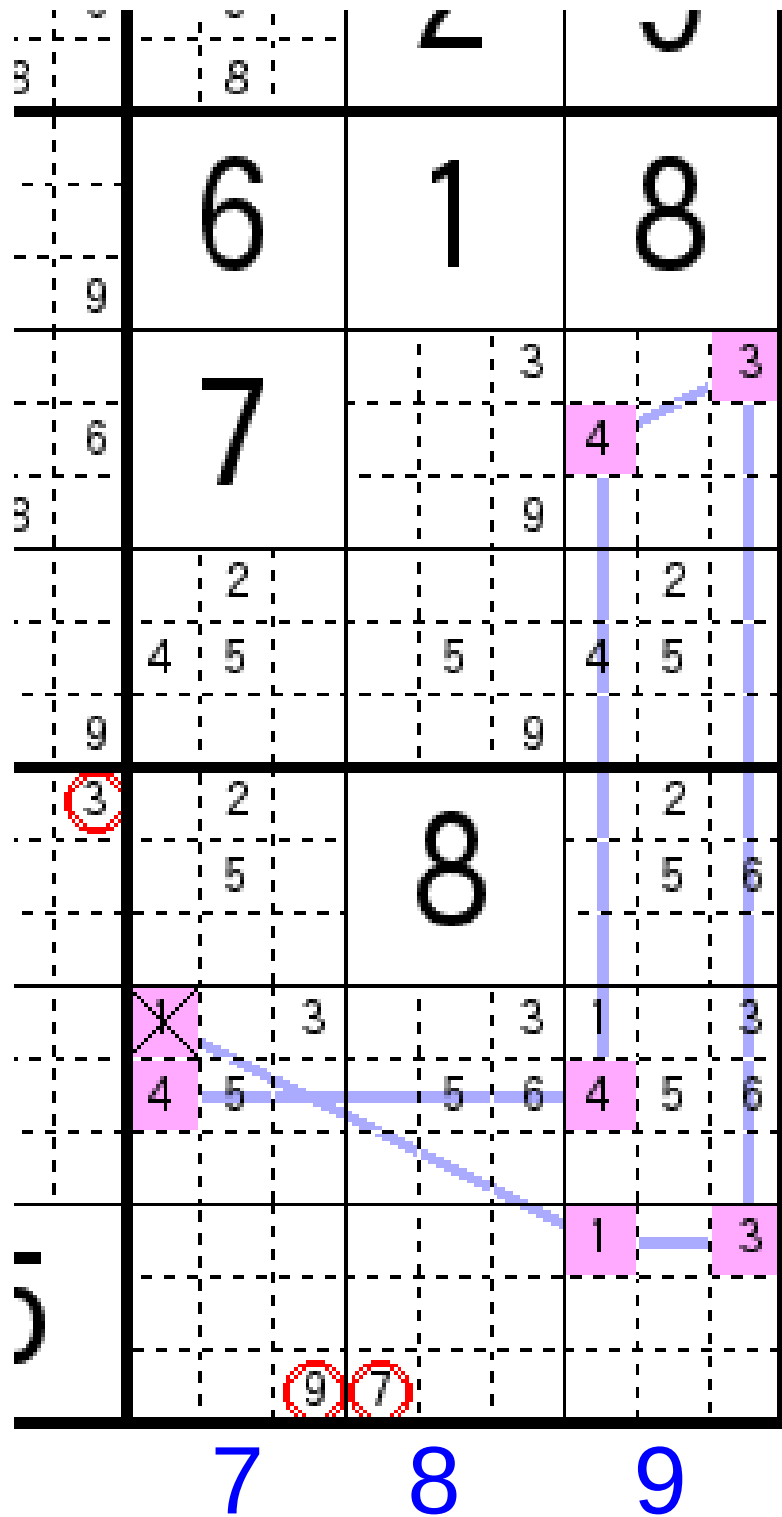
E

F

G

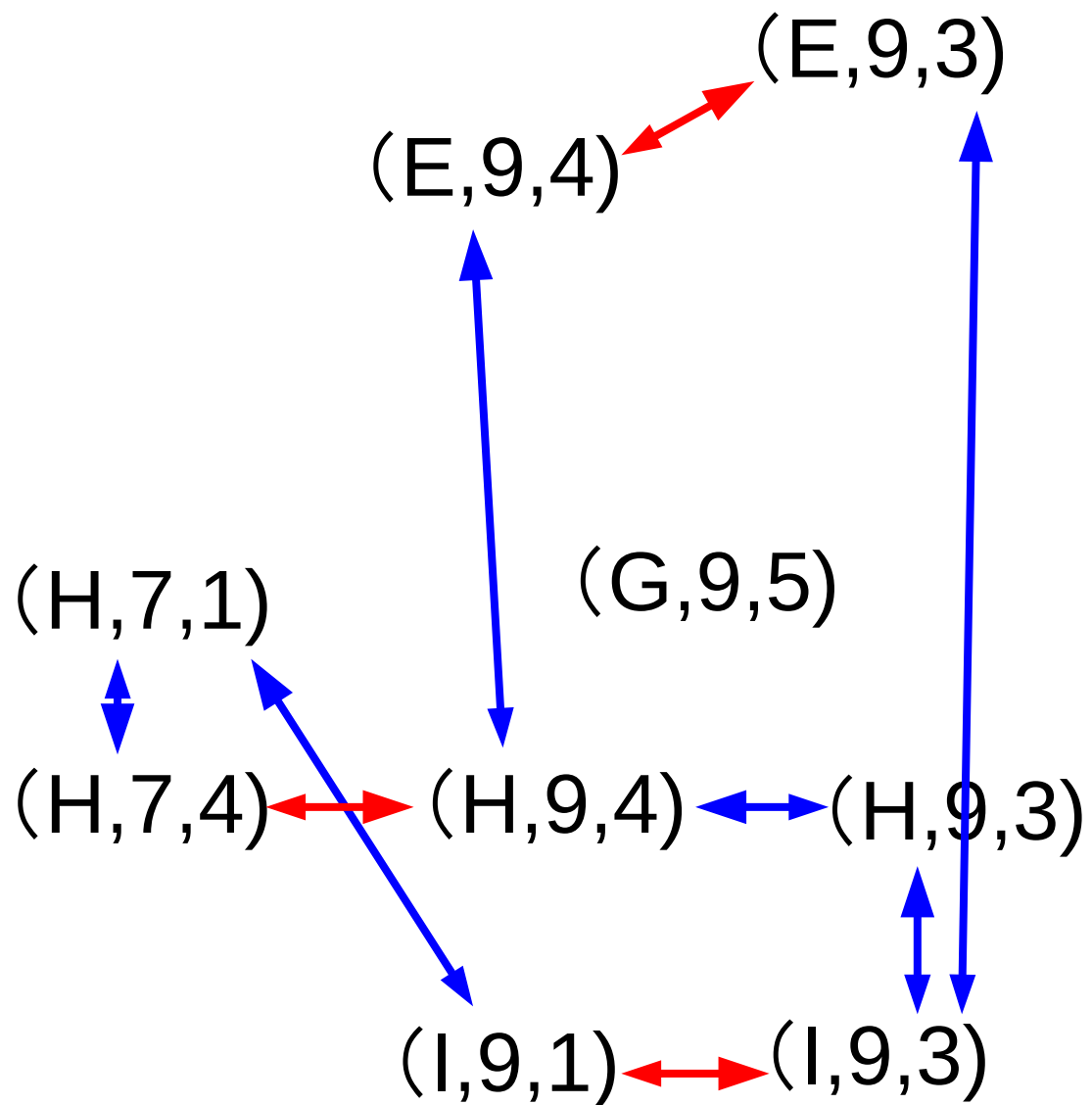
H

I



弱リンク

強リンク



	E93	E94	G95	H71	H74	H93	H94	I91	I93
E93		1							1
E94	1						1		
G95									
H71					1			1	
H74				1			1		
H93							1		1
H94		1			1	1			
I91				1					1
I93	1					1		1	

	E93	E94	G95	H71	H74	H93	H94	I91	I93
E93		1							
E94	1								
G95									
H71					1				
H74				1			1		
H93									
H94					1				
I91									1
I93								1	

	E93	E94	G95	H71	H74	H93	H94	I91	I93
E93								1	
E94					1				
G95									
H71							1		1
H74									
H93					1			1	
H94	1								
I91									
I93		1							

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[illegible]

$$M_3^2 \times M_1 =$$

[illegible]

$$M_3^3 \times M_1 =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

チェーン系の解法の拡張

- ALSをチェーン系の解法に組み込む

Locked Set (N国同盟)

A

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2 3	5	2 3	4	2 3	2 3	1	2
6	6							6
8 9	7 8					8 9		8 9
1 2		1 3		2 3	3	1 2	1 3	

$A4=\{2,3\}$, $A6=\{2,3\}$ ならば

$2,3 \notin A1, A2, A3, A5, A7, A8, A9$

N国同盟の条件:

N個のマスにN個の数字が入っている

ALSについて

N個のマスの(N+1)個の数字が入っている

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	9	1	4 8	7	2 6 8	5 6	2 5	4 5	3
B	4 8	6	2	5 8	1 8	3	7	1 4 5	9
C	7	3	5	1 9	1 2 9	4	1 2	8	6
D	1 8	4 8	9	3	7	2	1 5 8	6	1 4 5 8
E	4 6 8	2	3	6 9	5	1 9	4 8	7	1 8
F	1 6	5	7	1 6	4	8	9	3	2
G	2	7	6 8	4	1 6 8 9	1 5 9	3	1 5	1 5 8
H	5	4 8	1	2	3	7	6	9	4 8
J	3	9	4 6	5 8	1 6 8	1 5 6	1 4 5 8	2	7

A5のマスには8は入らない

$A5=8 \Rightarrow A3=4 \Rightarrow J3=6$

$A5=8 \Rightarrow B5=1 \Rightarrow J5=6$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	2 7 9	3	2 9	6	8	4 7	1	4 7 9	5
B	6	4 8	1	5	2 4 7 9	3	2 8	4 7 9	2 4 9
C	5 7 9	4 8	5 9	2 9	2 4 7 9	1	2 3 8	6	2 3 9
D	1 2 9	1 2 9	4	8	1 7 9	5	6	3	2 7
E	8	6	2 3 9	2 3 9	2 3 4 7 9	4 7	2 4 7	5	1
F	1 3	5	7	1 2 3	1 2 3 4 6	2 6	9	8	2 4
G	1 2 3 5 9	7	2 3 5 6 9	4	1 2 3 6	8	3 5	1 9	3 6 9
H	1 2 3 5 9	1 2 9	2 3 5 6 9	7	1 2 3 6	2 6 9	3 4 5	1 4 9	8
J	4	1 9	8	1 3	5	6 9	3 7	2	3 6 9

F5のマスには3は入らない

$F5=3 \Rightarrow F1=1$

$F5=3 \Rightarrow C4, E4, F4=\{1, 2, 9\}$
 $\Rightarrow F4=1$

A5=8 と J3=6 の間に仮想的な弱リンクがあると考える

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	9	1	4 8	7	2 6	5 6	2 5	4 5	3
B	4 8	6	2	5 8	1 8	3	7	1 4 5	9
C	7	3	5	1 9	2 9	4	1 2	8	6
D	1 8	4 8	9	3	7	2	1 5 8	6	1 4 5 8
E	4 6 8	2	3	6 9	5	1 9	4 8	7	1 8
F	1 6	5	7	1 6	4	8	9	3	2
G	2	7	6 8	4	1 6 8 9	1 5 9	3	1 5	1 5 8
H	5	4 8	1	2	3	7	6	9	4 8
J	3	9	4 6	5 8	1 6 8	1 5 6	1 4 5 8	2	7

A5=8 $\Rightarrow$ B5, J5={1,6}
 $\Rightarrow$ J5=6 $\Rightarrow$ J3 $\neq$ 6

J3=6 $\Rightarrow$ B5, J5={1,8}
 $\Rightarrow$ A5 $\neq$ 8

A5=8 $\Rightarrow$ J3 $\neq$ 6 $\Rightarrow$ J3=4
 $\Rightarrow$ A3 $\neq$ 4 $\Rightarrow$ A3=8
 $\Rightarrow$ A5 $\neq$ 8

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	9	1	4 8	7	2 8	5 6	2 5	4 5	3
B	4 8	6	2	5 8	1 8	3	7	1 4 5	9
C	7	3	5	1 9	1 2 9	4	1 2	8	6
D	1 8	4 8	9	3	7	2	1 5 8	6	1 4 5 8
E	4 6 8	2	3	6 9	5	1 9	4 8	7	1 8
F	1 6	5	7	1 6	4	8	9	3	2
G	2	7	6 8	4	1 8	1 6 9	3	1 5	1 5 8
H	5	4 8	1	2	3	7	6	9	4 8
J	3	9	4 6	5 8	1 8	1 6	1 4 5 8	2	7

Locked set を完成させる
点の集合を P とすると、
P の要素間に仮想的な弱
リンクが存在する。

A5=8, J3=6, C5=1, G5=1
G5=6, G5=8, J6=6

Almost Row-Column Subsets

AB操作

D	4 5 8	1	2 8	3	5 6 8	7	2 4 5 6 8	2 4 5 8	9
E	4 5 7 8	2 3 4 5 7	6	2 8 9	5 8 9	2 8 9	1	2 3 4 5 8	3 4 5 8
F	9	2 3 5	2 8	4	5 6 8	1	2 3 5 6	7	3 5 6 8

この黄色の所に 2 がなければ
このピンクの所にも 2 はない

I2=8 から B8=8 に仮想的な弱リンクがある

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	2	4 5 9	4 5 9	7	1 4 6 8 9	1 4	1 4 6 8 9	1 3 5 6 8 9	1 3
B	4 3 9	1	6	2	4 8 9	5	4 7 8 9	8 9	3 7 8 9
C	4 5 9	7	8	1 4 6 9	1 4 6 9	3	1 4 5 6 9	2 1 2 9	
D	1 9	(2)	7	8	3 6 9	1	3 6	4	5
E	1 4 5 8 9	4 5 8 9	4 5 9	1 4 5 6 7 9	1 3 4 5 6 7 9	1 3 7 9	1 3 6 7	2 6	1 2 3 7
F	6	3	1 4 5	1 4 5 7	1 4 5 7	2	9	1 8	1 7 8
G	1 4 5 7 8	4 5 6 8	4 5	9	1 4 5 7	1 4 7	2	3	1 6 8
H	1 4 9	4 6 9	1 2 4 9	3	1 2 4	8	5	7	1 6 9
I	7 3	5 9	2 3	1 5	2	6	1 8	1 8 9	4

$I2=8 \Rightarrow B8 \neq 8 \Rightarrow B8=9$
 $\Rightarrow I8 \neq 9 \Rightarrow I2=9$
 $\Rightarrow I2 \neq 8$

数値実験

- チェーン系の解法のみでは解けない問題10問を提案した解法で解く(仮置きは用いない)
- チェーン系+ALS $\Rightarrow$ 2問
- チェーン系+ALS+ARCS $\Rightarrow$ 4問

結論

- ナンプレのチェーン系の解法のためのアルゴリズムを提案
- ALS や ARCS を用いてチェーン系の解法を拡張
- 計算実験の結果、通常のチェーン系のアルゴリズムだけでは解けない問題の40%程度は解けるようになった。
- まだまだ仮置き以外では解けない問題も多いので、更なる改良が必要