二人単貧民における必勝判定問題

名古屋大学情報学研究員数理情報学専攻修士2年
木谷　裕紀
名古屋大学情報学研究員数理情報学専攻
小野　廣隆

今日の流れ

1. 大貧民と単貧民
2. 単貧民における必勝手順
3. 本研究
4. 今後の展望

今日の流れ

1.大貧民と単貧民
2.単貧民における必勝手順
3.本研究
4.今後の展望

大貧民について

- 大貧民はトランプで遊ぶカードゲームのひとつ.
  「大富豪」などとも呼ばれる.
  海外にも類似した遊びがある.
- カードを参加者にすべて配り,
  手持ちのカードを順番に場に出して
  早く手札をなくすことを競う手札消費型ゲーム.
- 不完全情報多人数ゲーム.
- 電通大で2006年より毎年
  コンピューター大貧民大会が開催.

単貧民とは（1）

単貧民とは大貧民と類似した完全情報ゲーム.
西野（2007）が定義.
大貧民との主な違いは以下の三つ.

特殊ルールが一切なし.
１枚出しのみ.
手札は公開で行われる.

本研究と単貧民

二人プレイヤーの単貧民の必勝戦略, 必勝判定に関しては

手札が10枚以下の場合（西野 2007）

互いの手札が同一で且つ同じ強さの札が２枚以下（木谷,小野2016）のみ.

より一般の手札における最適アルゴリズムを

本研究では考察.

単貧民とは（2）

ゲームの開始	各プレイヤーに手札を与える.
各手番の行動	各手番のときに各プレイヤーは 一枚のみ場に札を出す. 又はパスを選択することができる.
場に出せる札	場に出せるカードは 既に場に札がおかれている場合, その札より強くなければならない.
勝利条件	手札が先になくなった方が勝利.

3 4 5

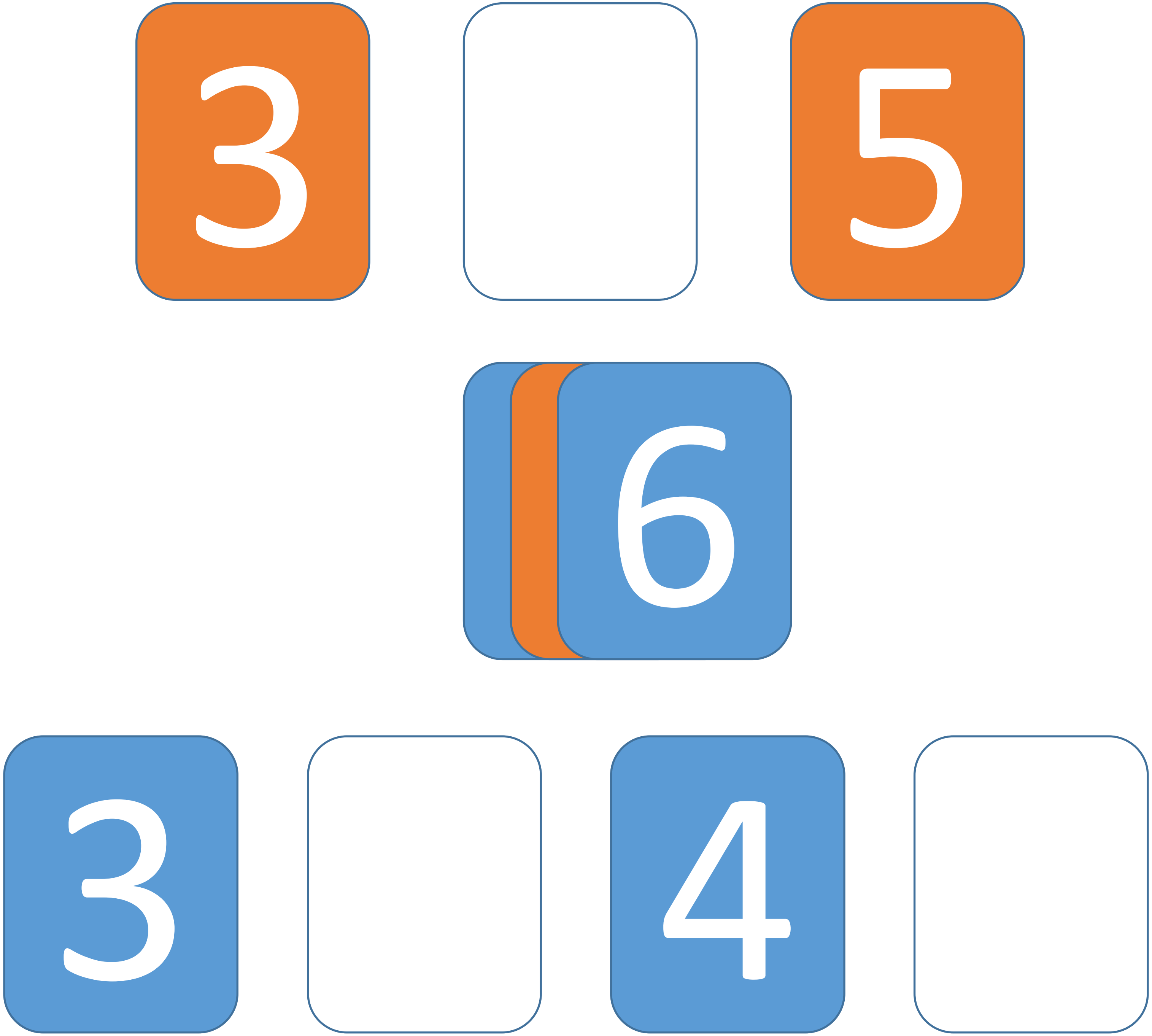
後手の手札

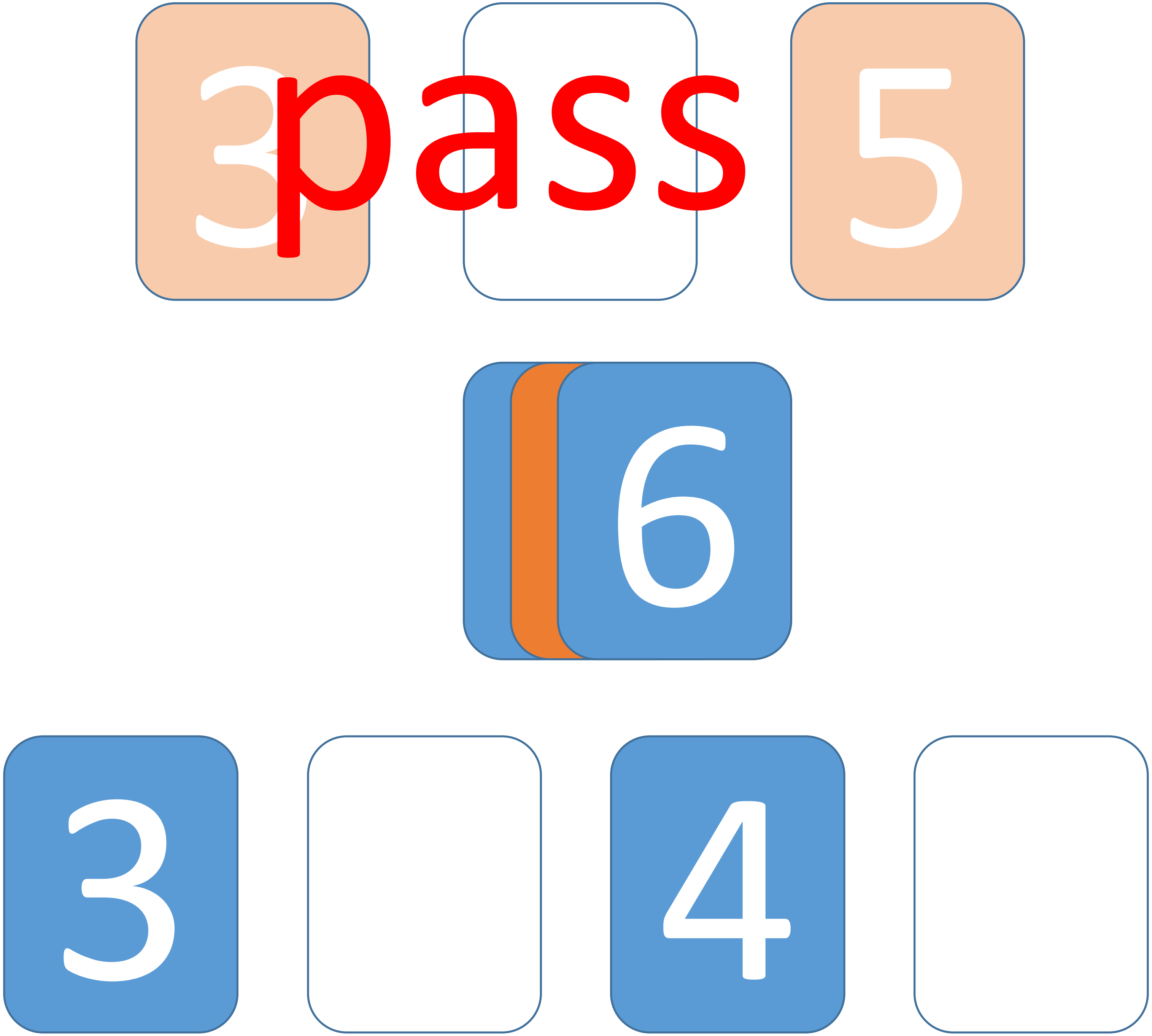
先手の手札

3 3 4 6

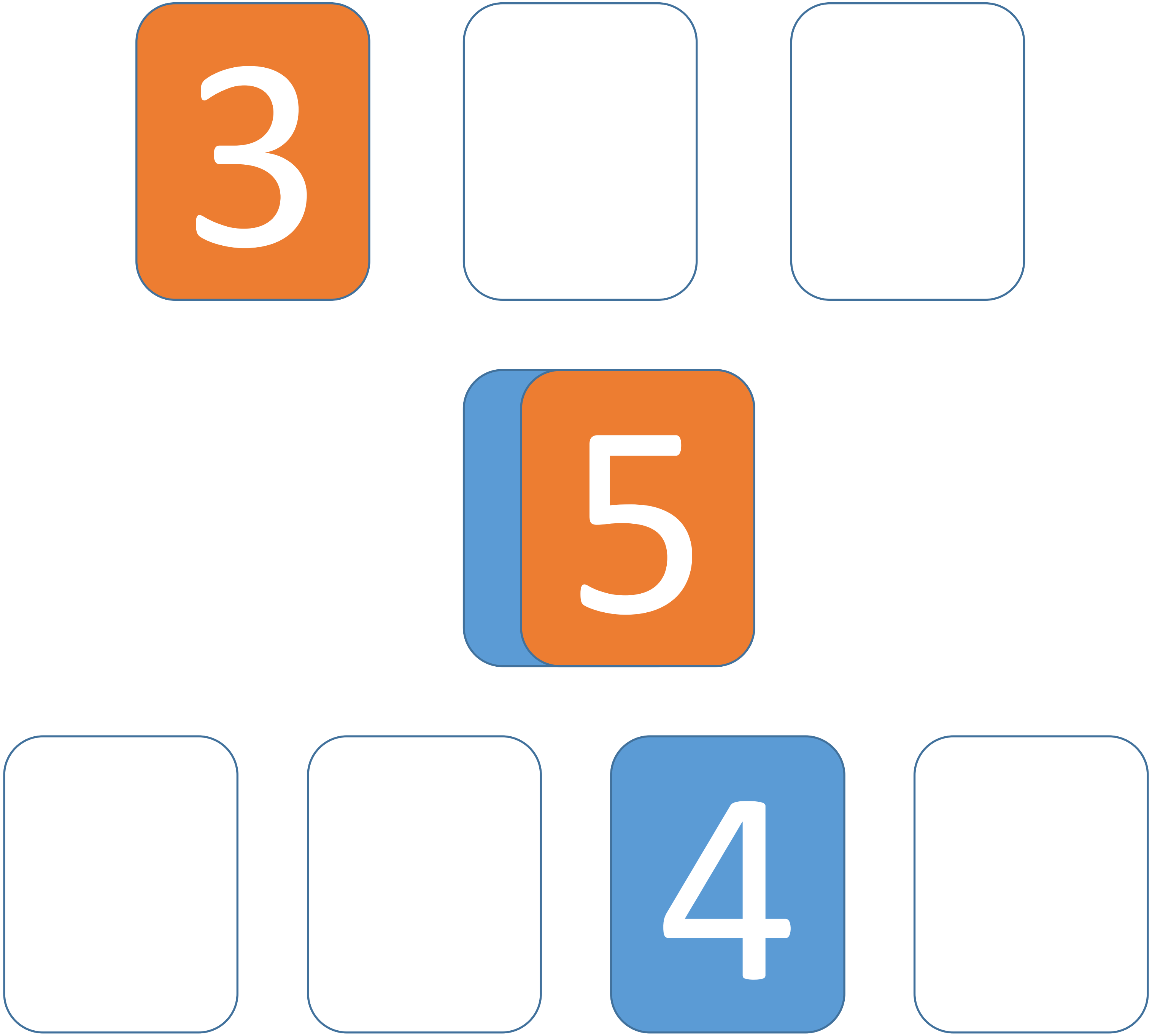

3
4
5
後手の手札
3
先手の手札
3
4
6


3
5
後手の手札
4
先手の手札
3
4
6


3
5
6
3
4


3
pass
5
6
3
4

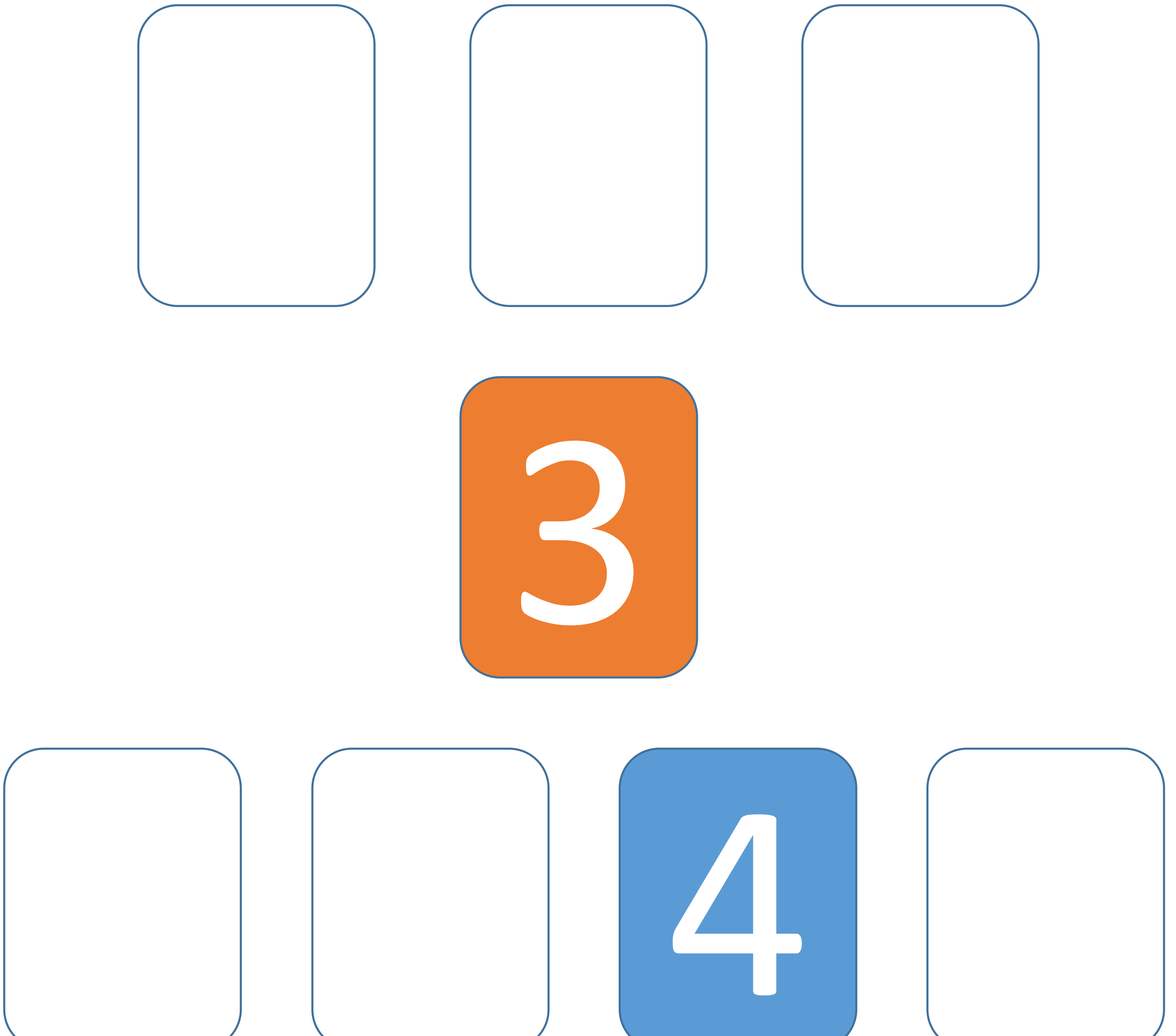

3
5
3
4


3
5
4


3
5
pass
4

3

4


3
4


4 5 5
後手の手札
先手の手札
3 4 4 5 6

4 5 5

先手必勝or後手必勝

3 4 4 5 6

今日の流れ

1. 大貧民と単貧民
2. 単貧民における必勝手順
3. 本研究
4. 今後の展望

今日の流れ

1.大貧民と単貧民
2.単貧民における必勝手順
3.本研究
4.今後の展望

4 5 5

後手必勝

3 4 4 5 6

後手必勝を示す

後手必勝を示すためには
先手がいかなる手順（戦略）で出しても
後手はその手順に対しに勝利する手順（戦略）
があることを示す必要がある.

4 5 5

後手の手札

先手の手札

3 4 4 5 6


4 5 5
3
4 4 5 6

4 5 5

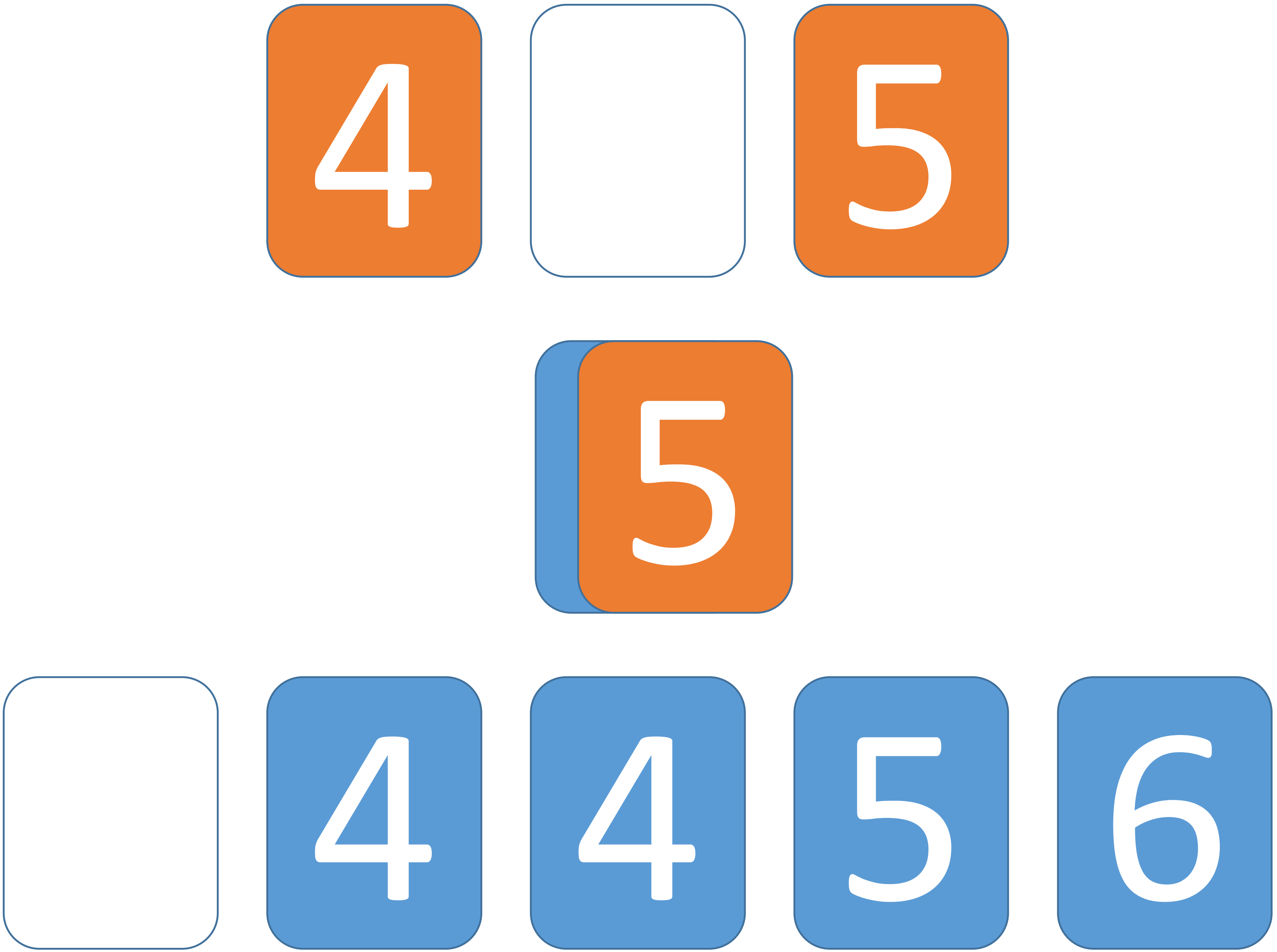
4

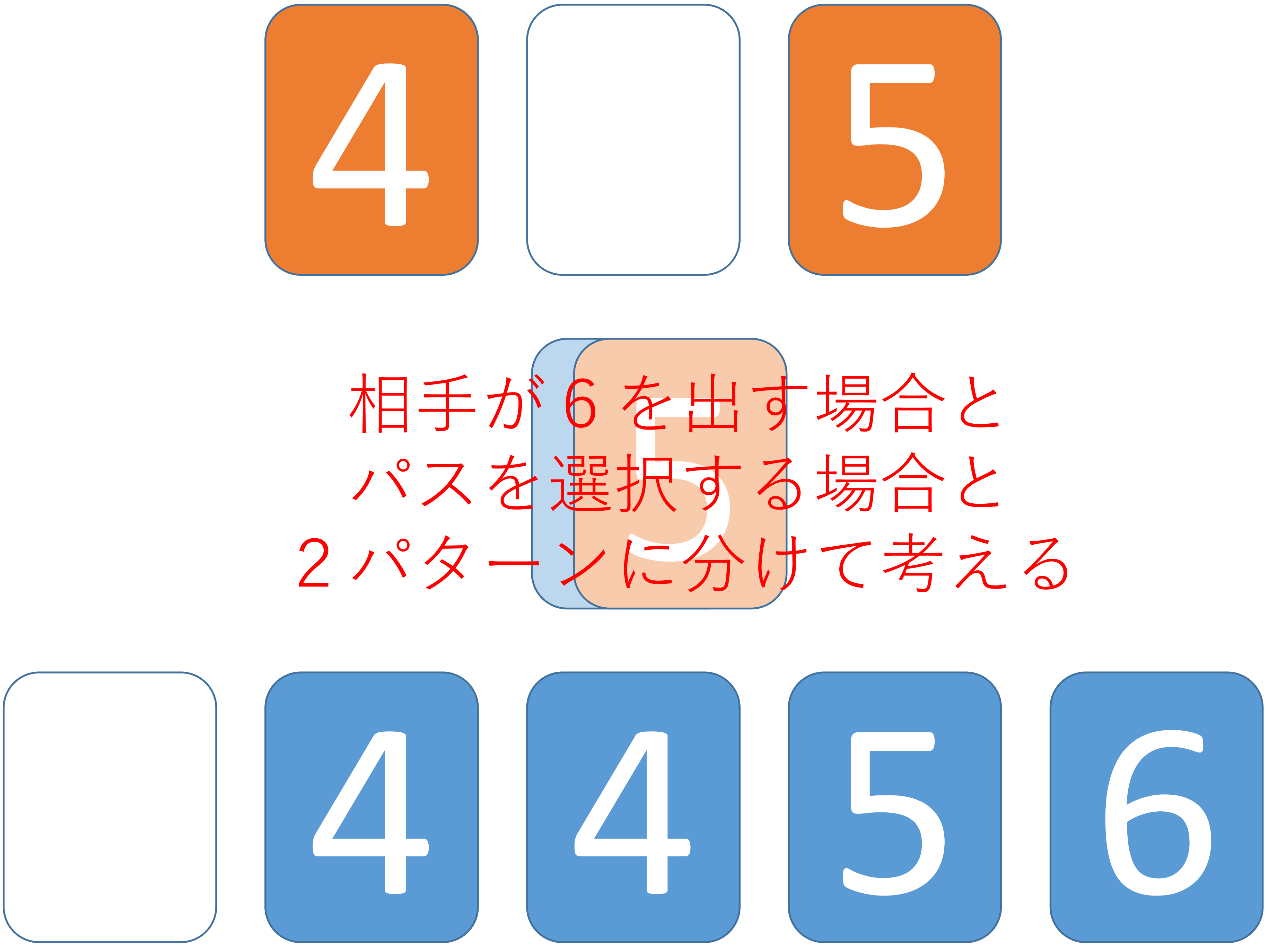
3 4 5 6


4
5
5
5
3
4
4
6

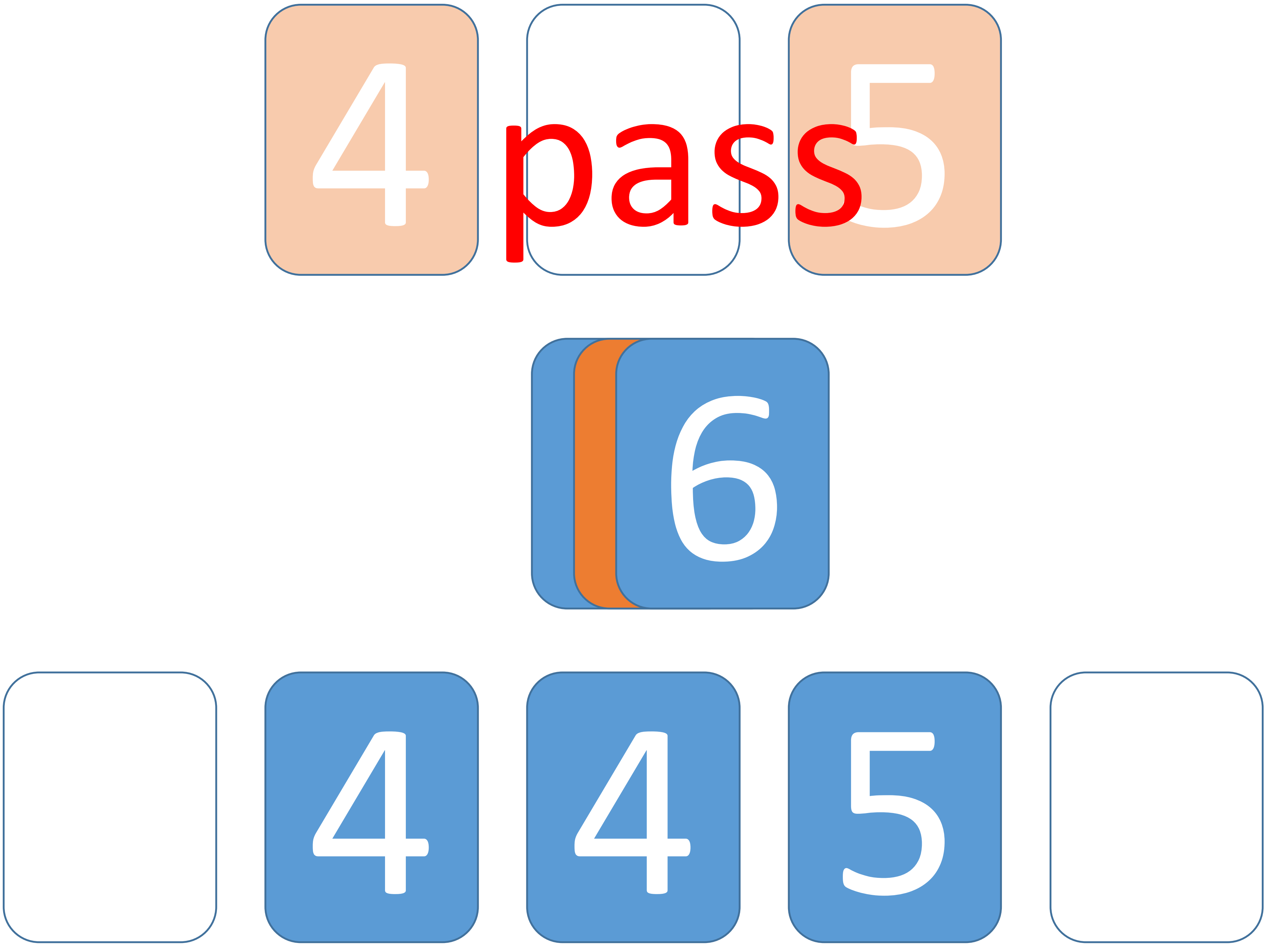

4
5
5
6
3
4
4
5

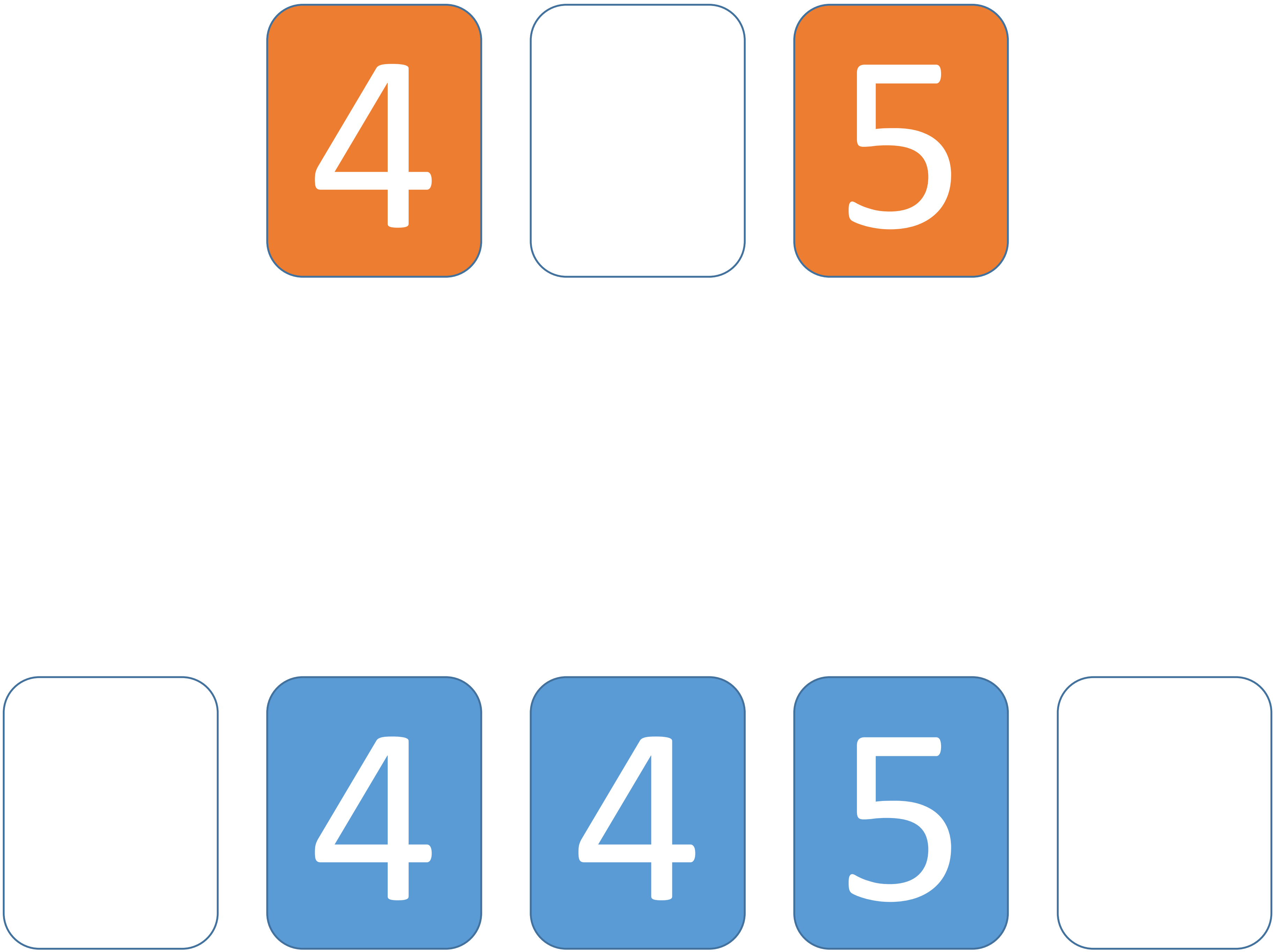

4 5 5
3
4 4 5 6


4
5
5
4
4
5
6

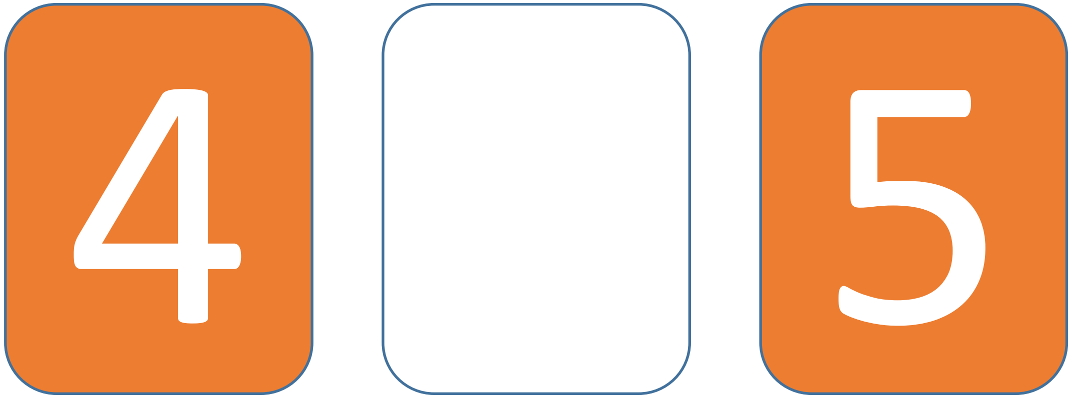

4
5
5
相手が６を出す場合と
パスを選択する場合と
２パターンに分けて考える
4
4
5
6


4
5
6
4
4
5

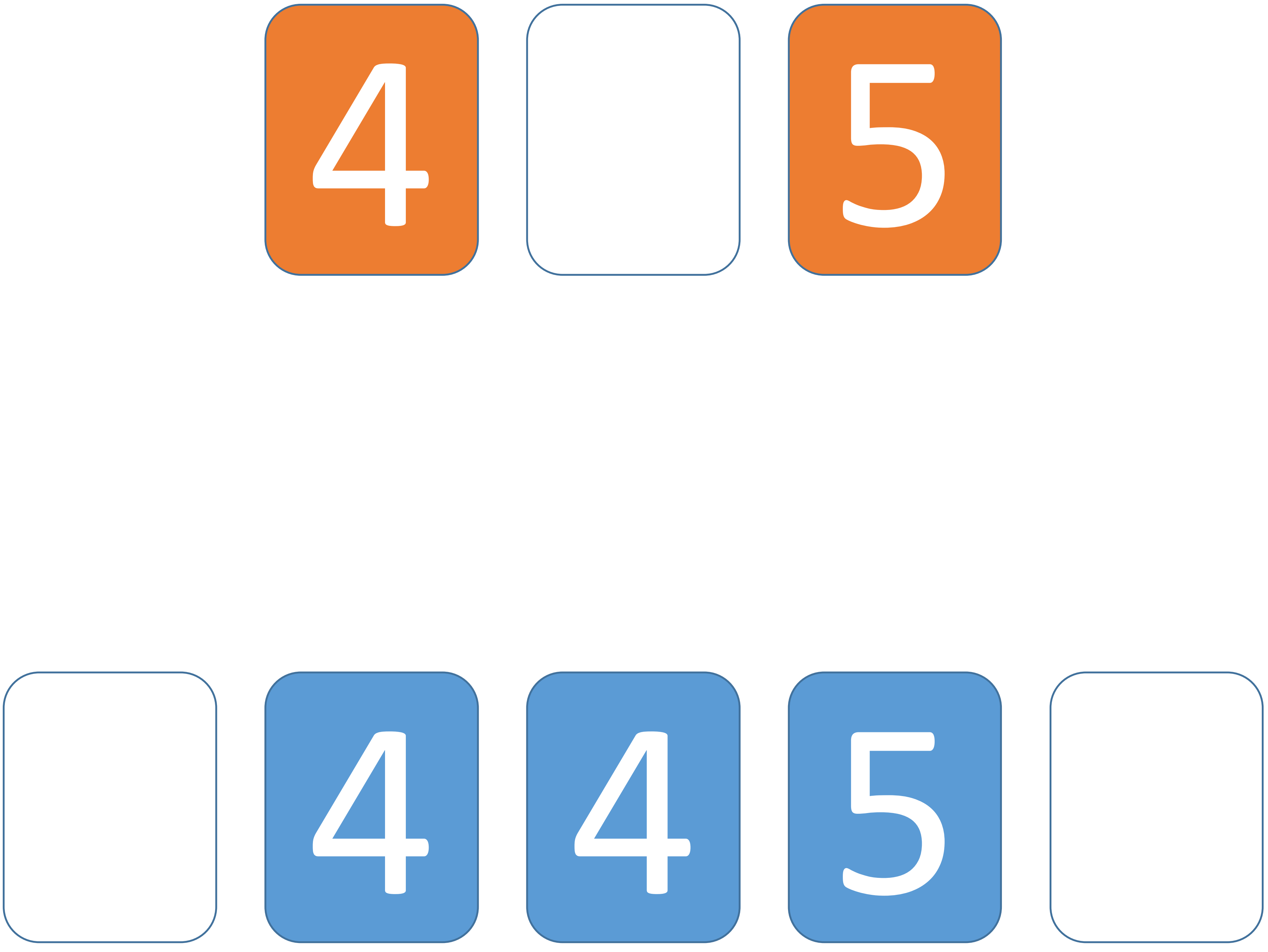

4
pass
5
6
4
4
5



4
5
4
4
5



後手はパスを選択したので
続いて先手が４を出す場合と
５を出す場合をそれぞれ考える.

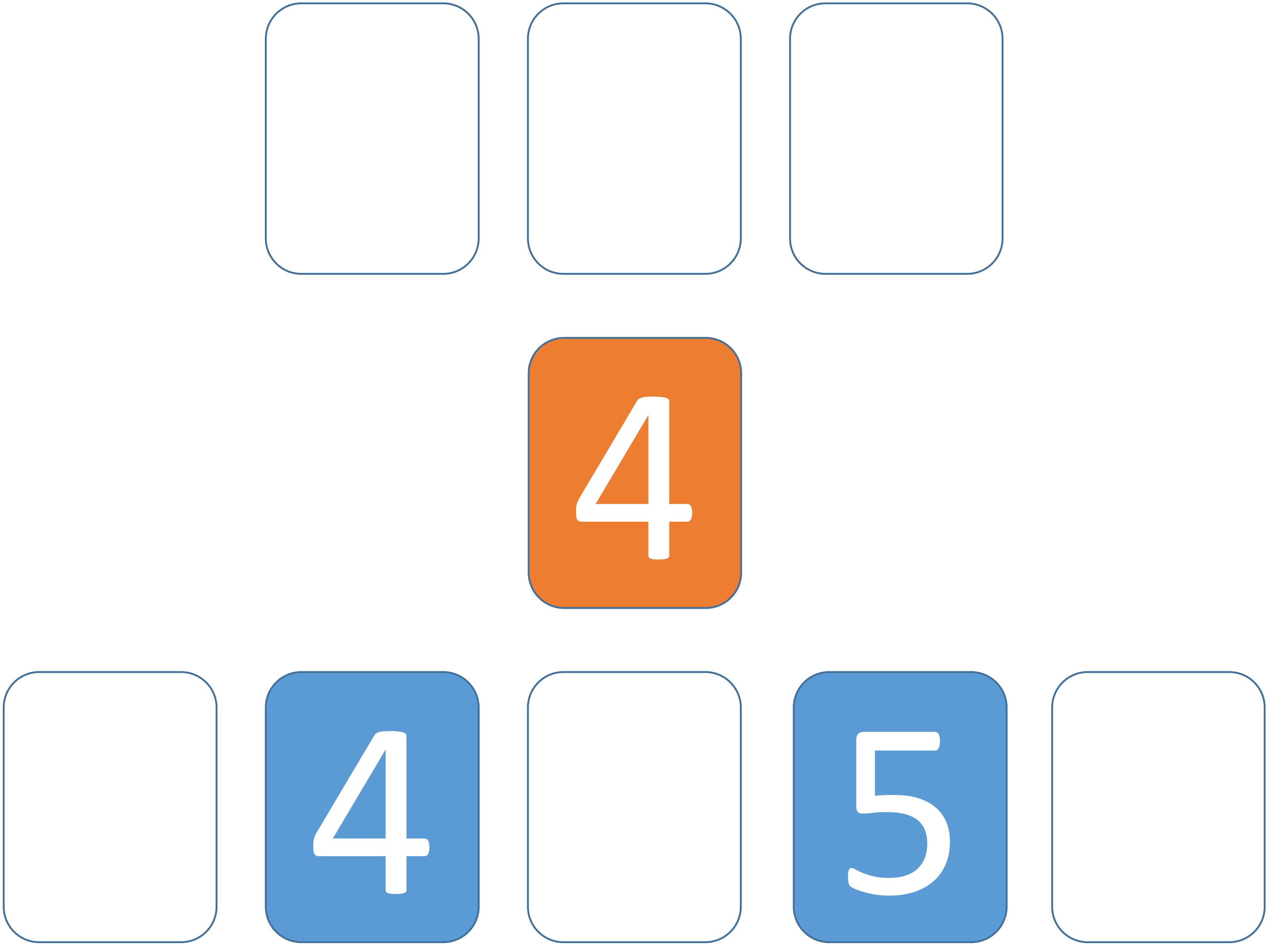

4
5
4
4
5


4
5
4
4
5


4
5
4
5

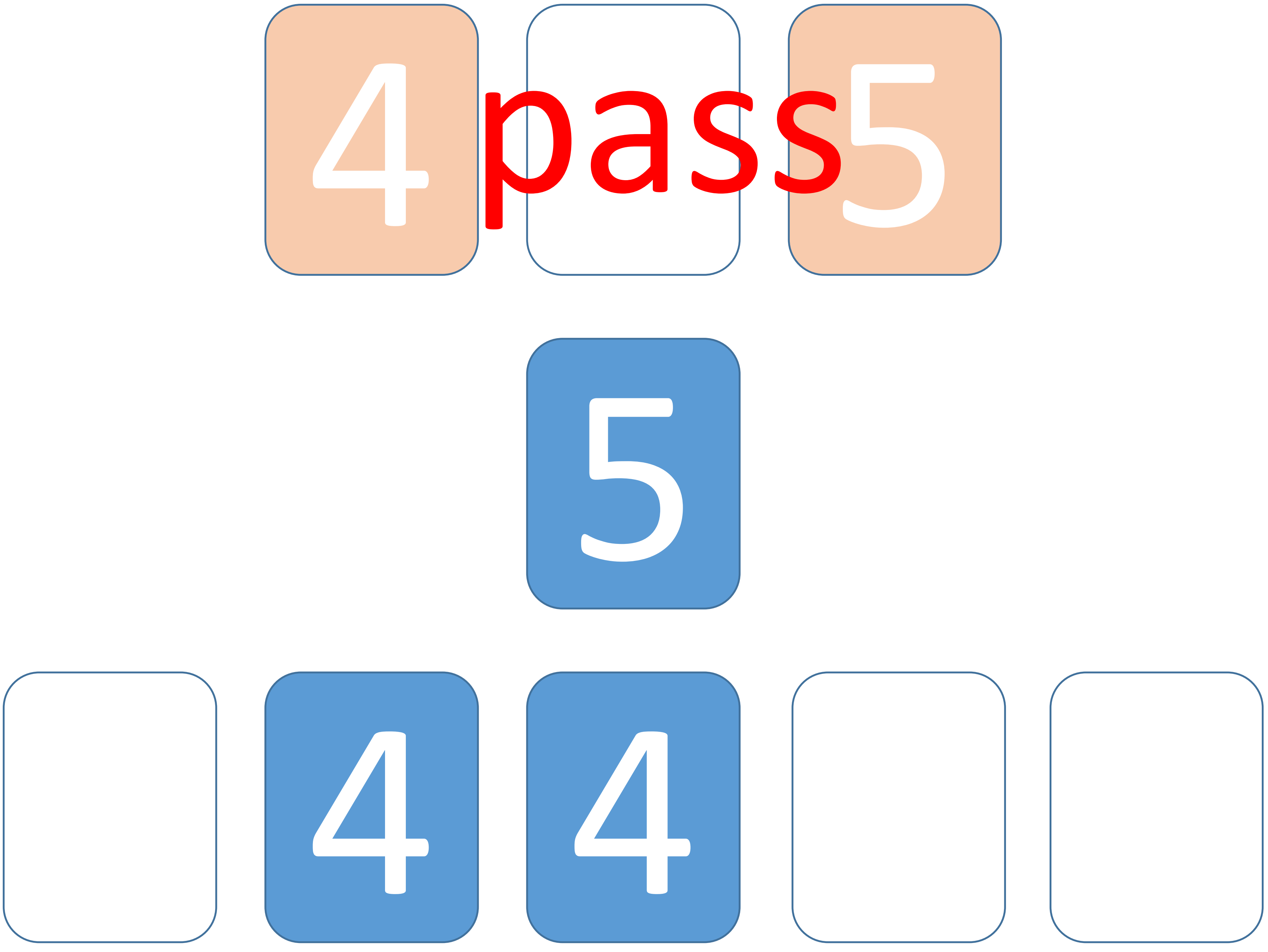
4
5
4
pass
5

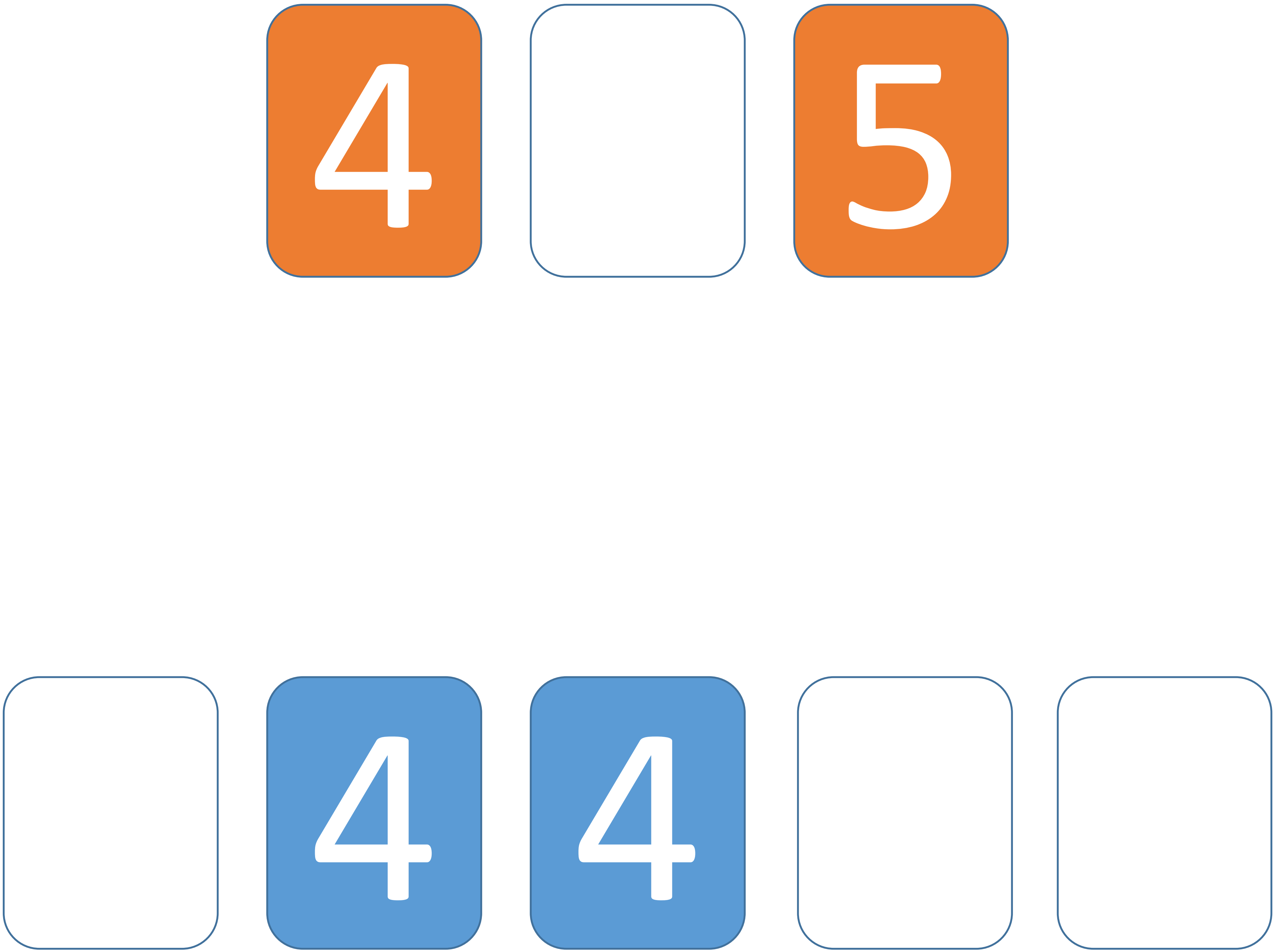

4
4
5


4
4
5


後手勝利
4
4
5


4
5
5
4
4


4
pass
5
5
4
4


4
5
4
4


4
5
4
4

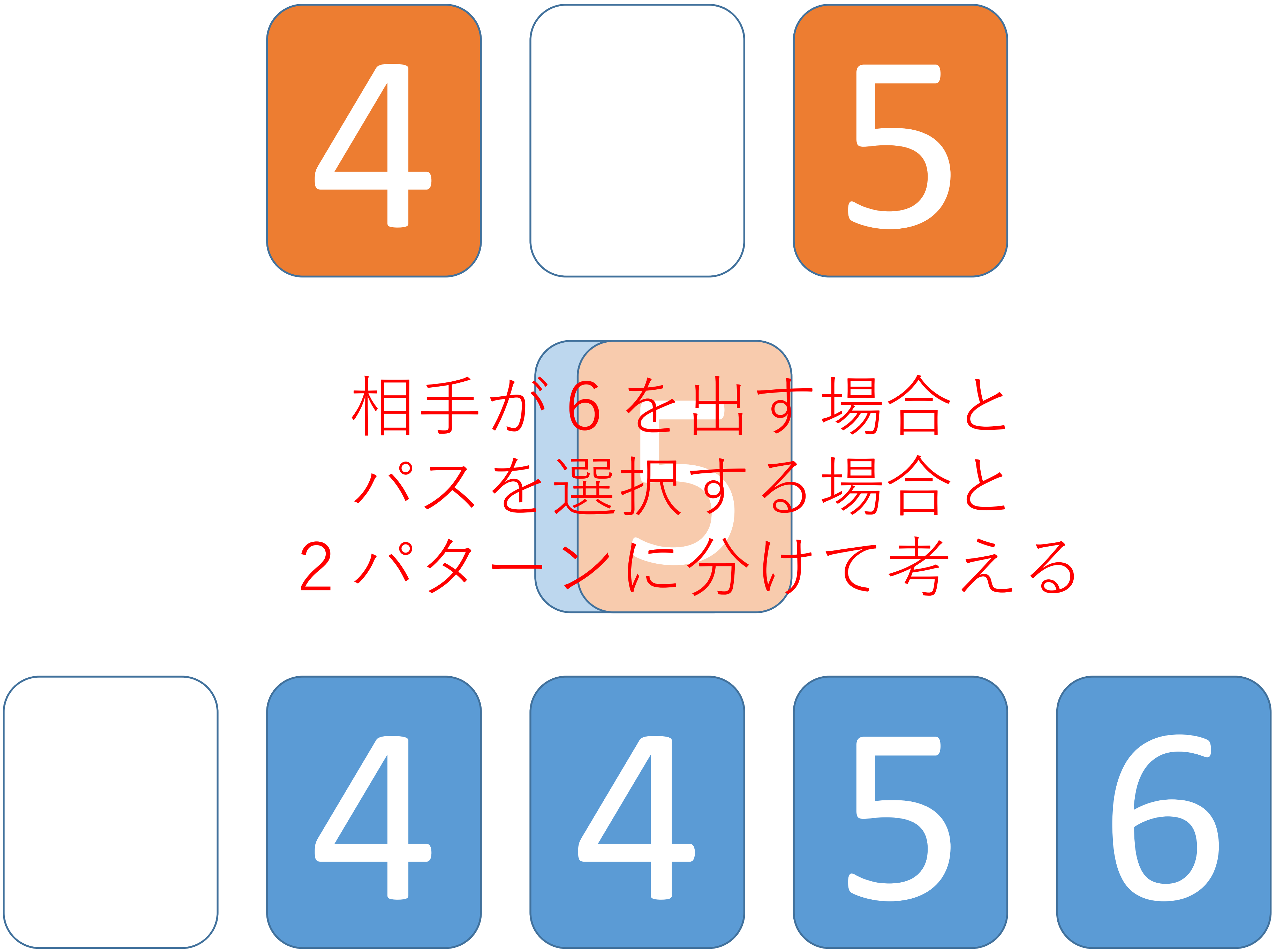

4
5
4

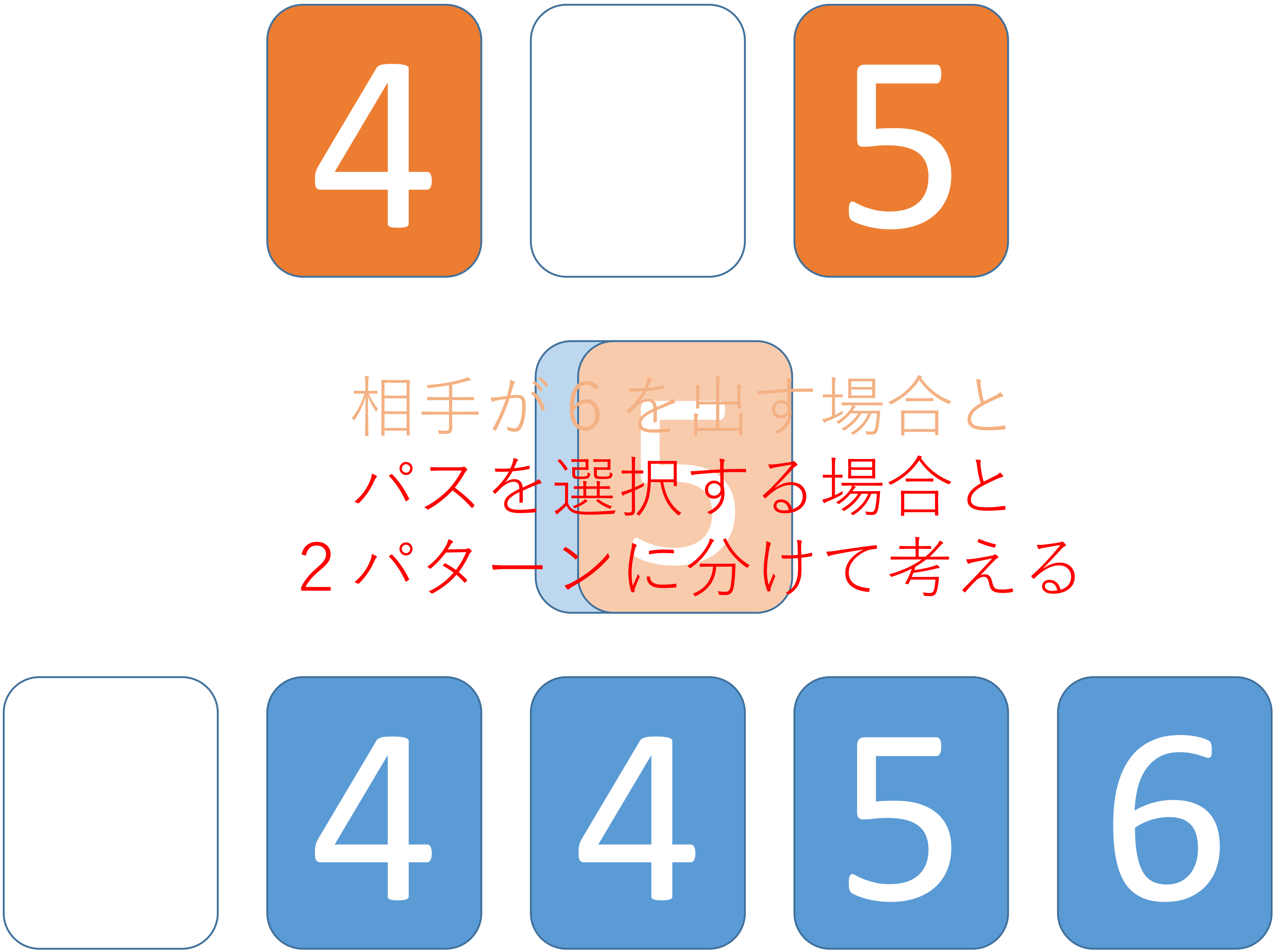
4
5
4
pass

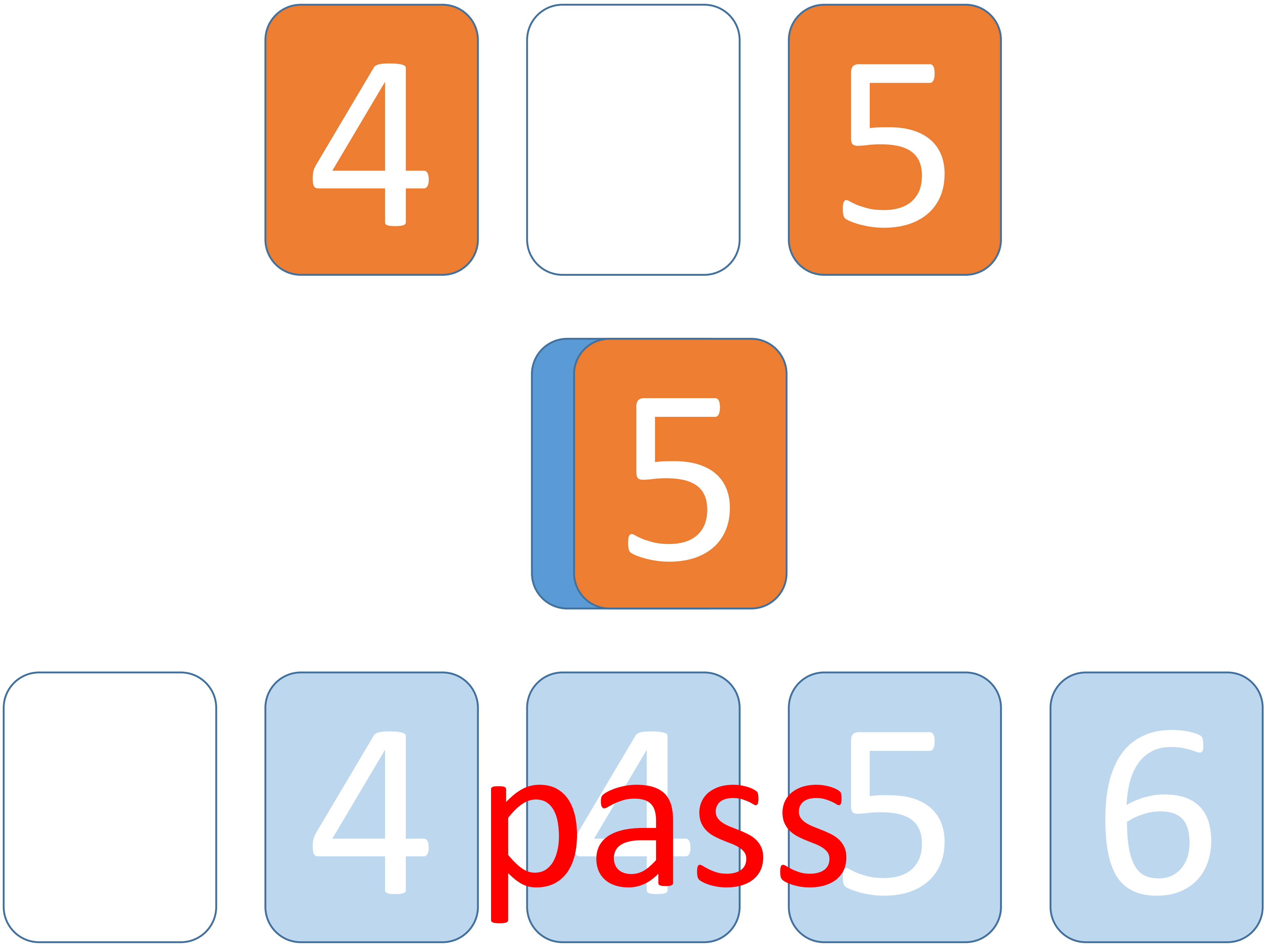

4
4


4
4


後手勝利
4
4

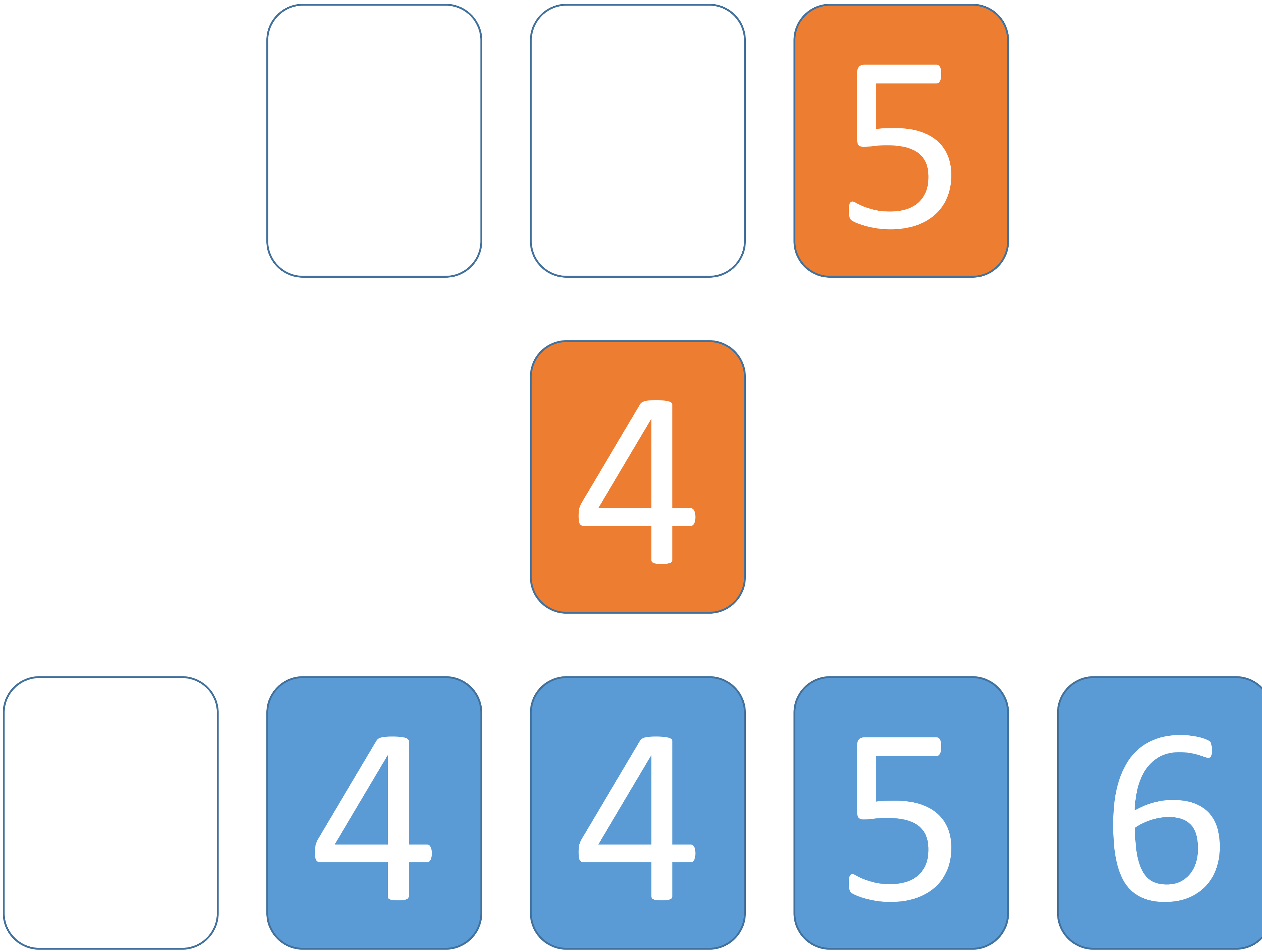

4
5
5
相手が６を出す場合と
パスを選択する場合と
２パターンに分けて考える
4
4
5
6

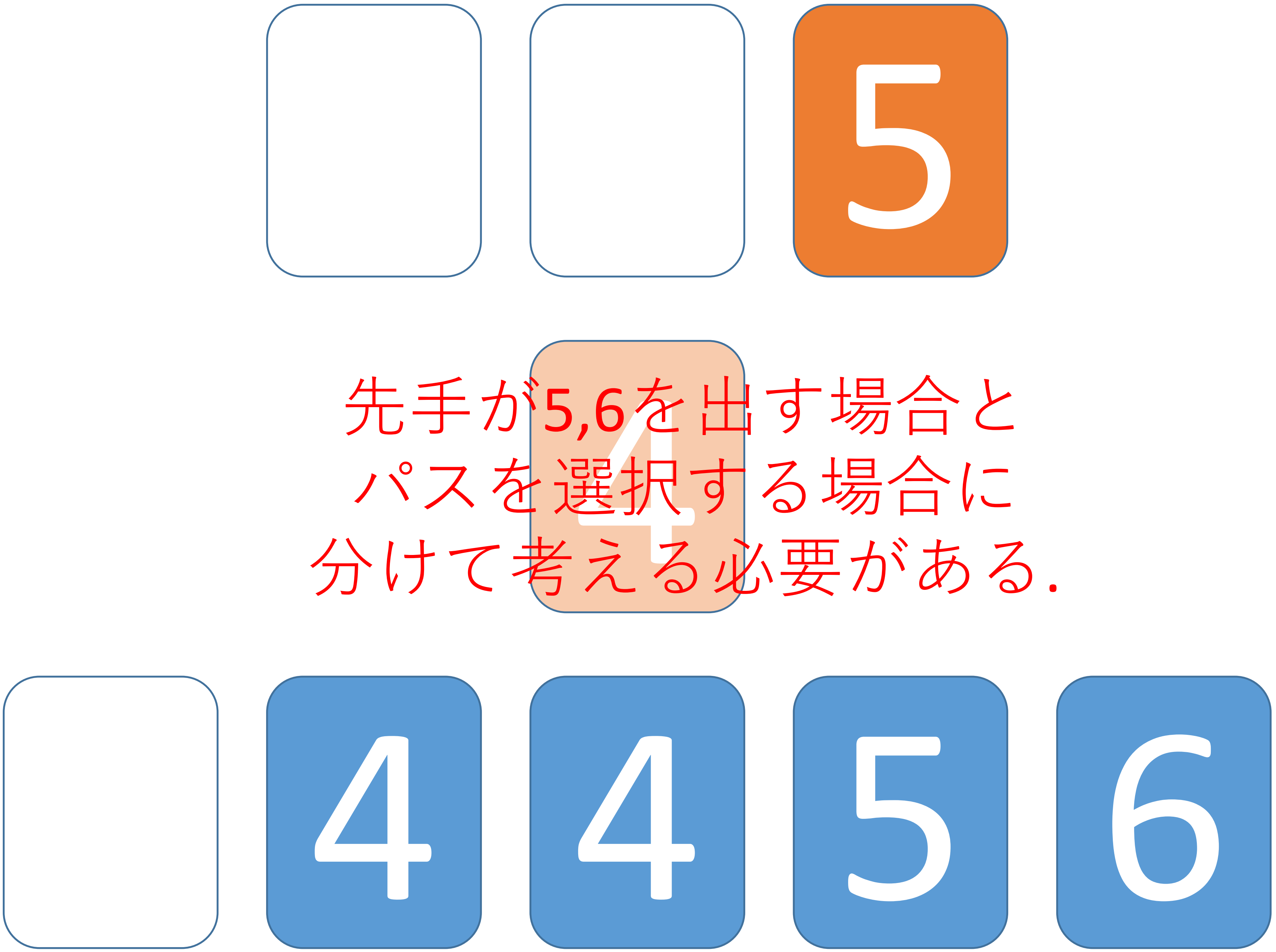

4
5
5
相手が６を出す場合と
パスを選択する場合と
２パターンに分けて考える
4
4
5
6


4
5
5
4
4
5
6
pass

4		5

	4	4	5	6


5
4
4
4
5
6



先手が5,6を出す場合と
パスを選択する場合に
分けて考える必要がある.


5
パスを選択する場合
4
4
4
5
6

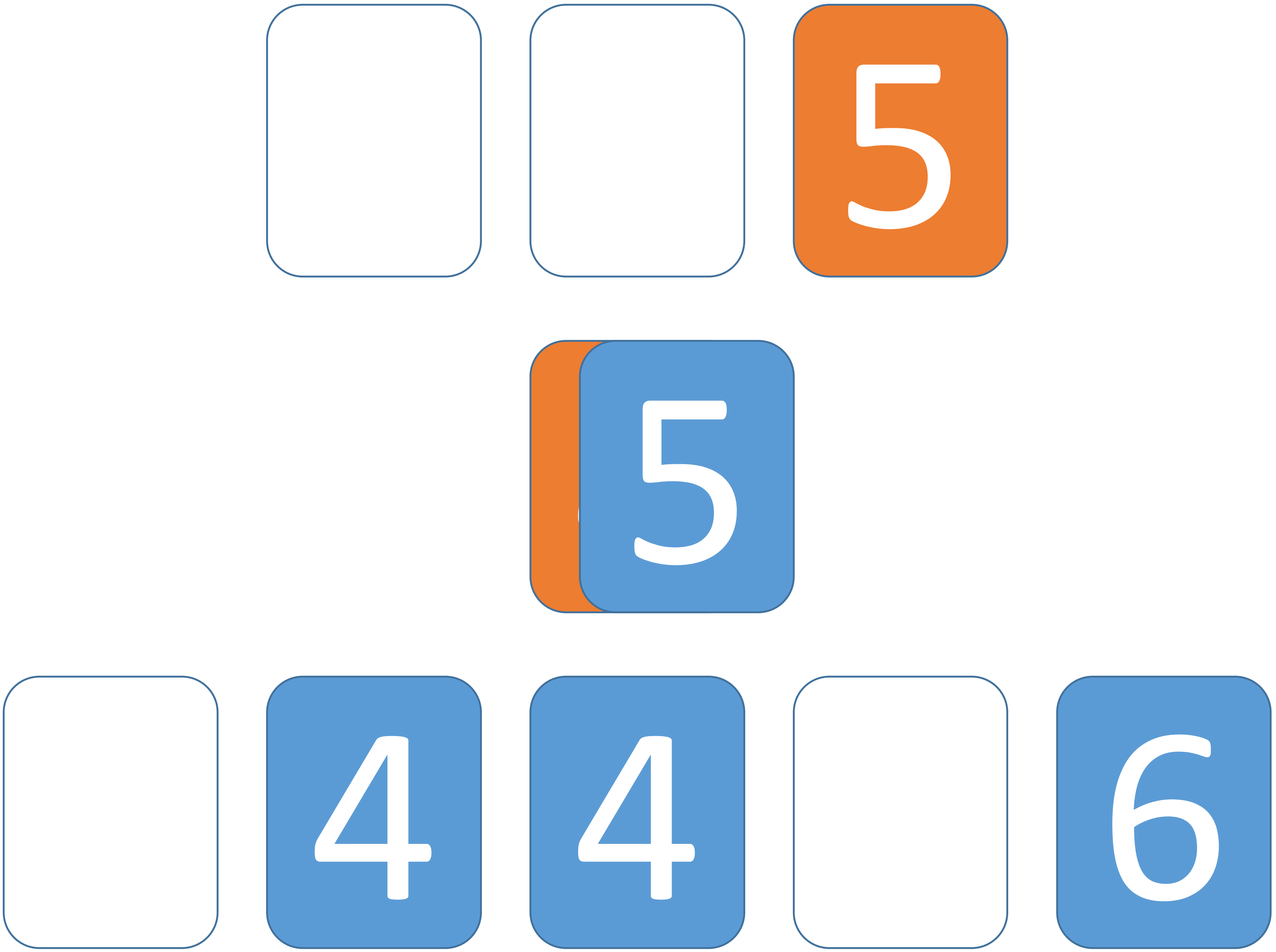

5
4
4
5
6
pass

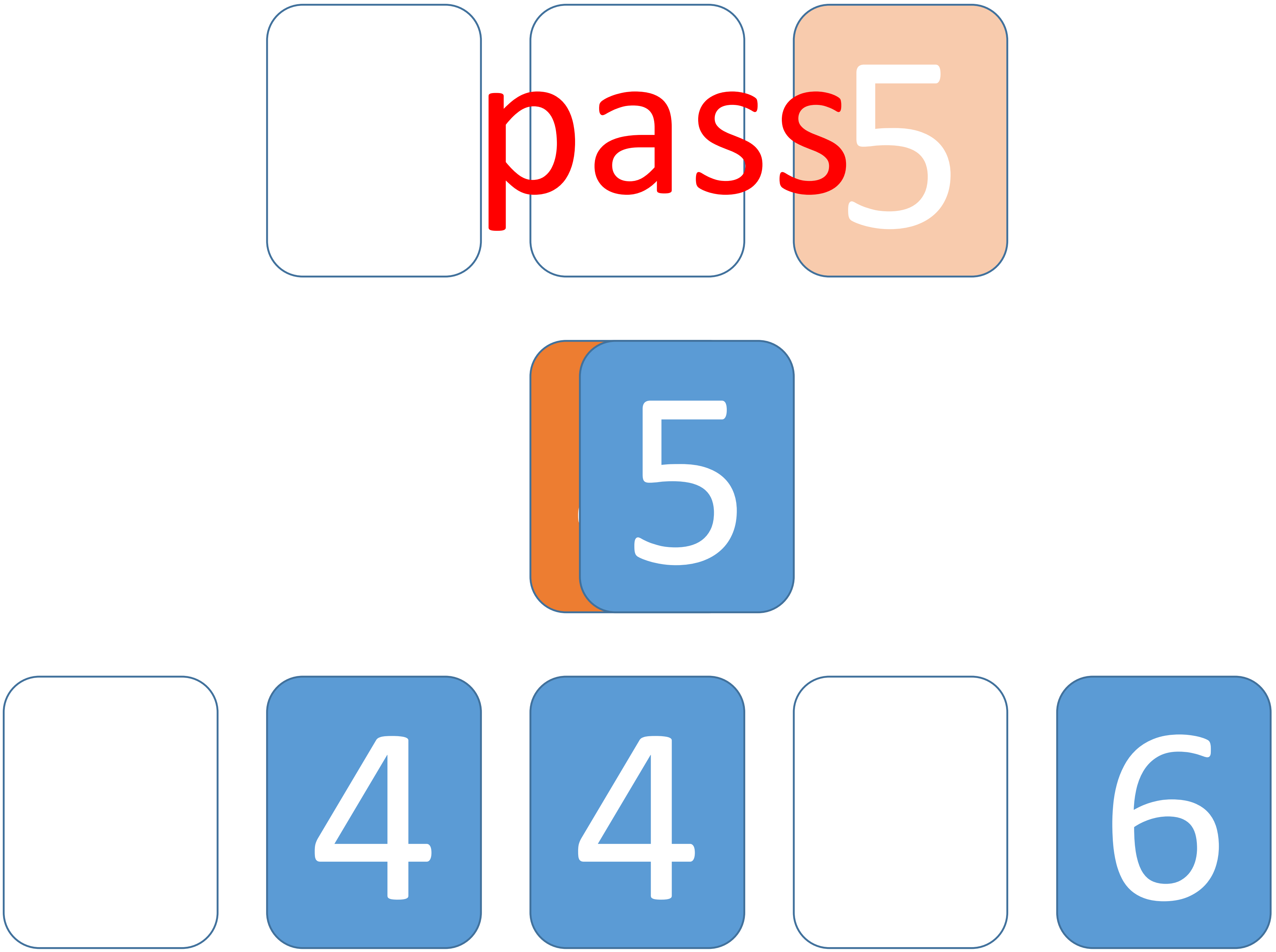

5
4
4
5
6


後手勝利
5
4
4
5
6

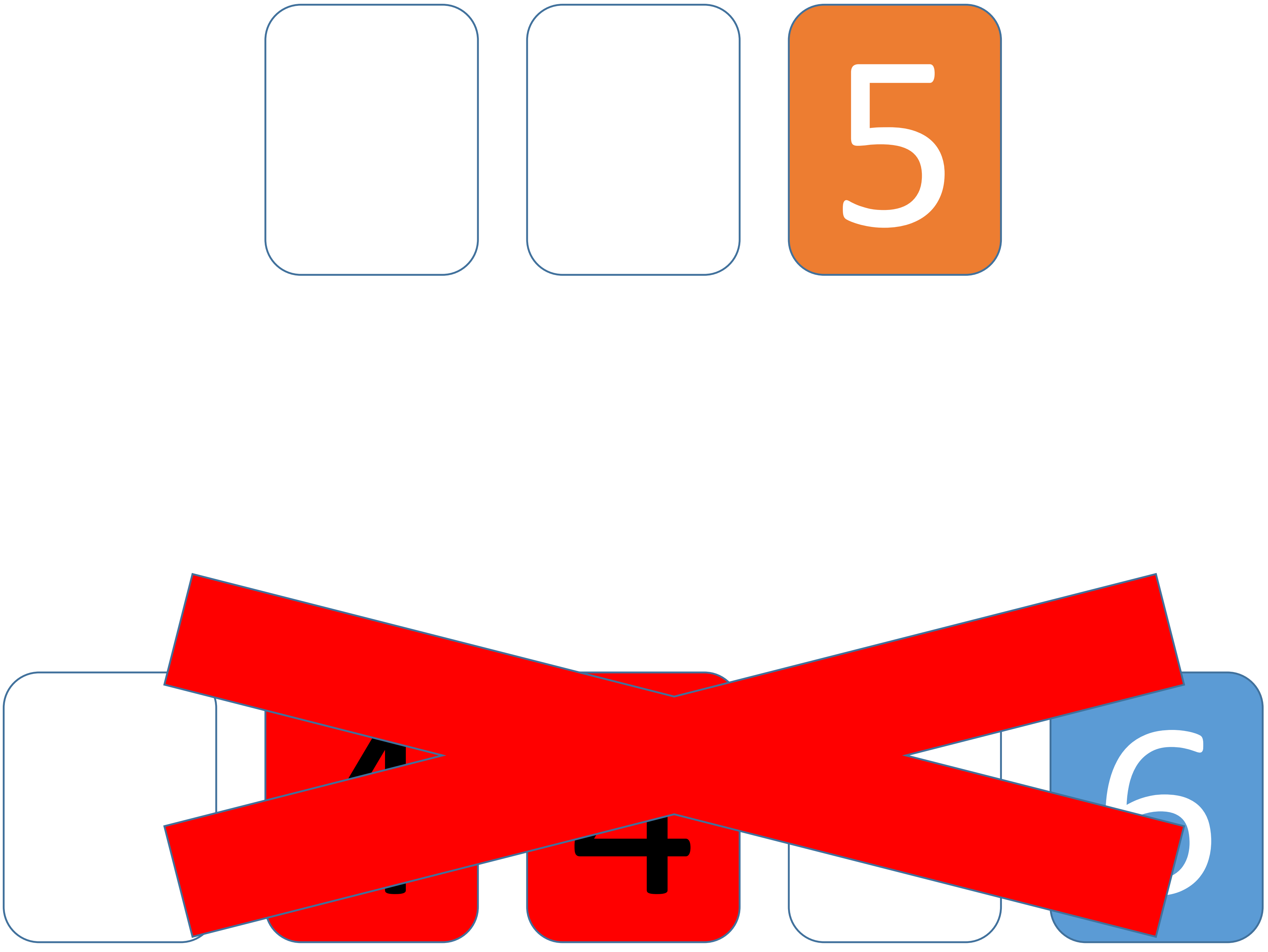
先手が5,6を出す場合

パスを選択する場合に
分けて考える必要がある.


5
5
4
4
6


pass
5
5
4
4
6


5
4
4
6


5
4
6


5
後手勝利
4
4
6

先手が３から出すなら後手に
必勝戦略がある

4 5 5

後手必勝

3 4 4 5 6

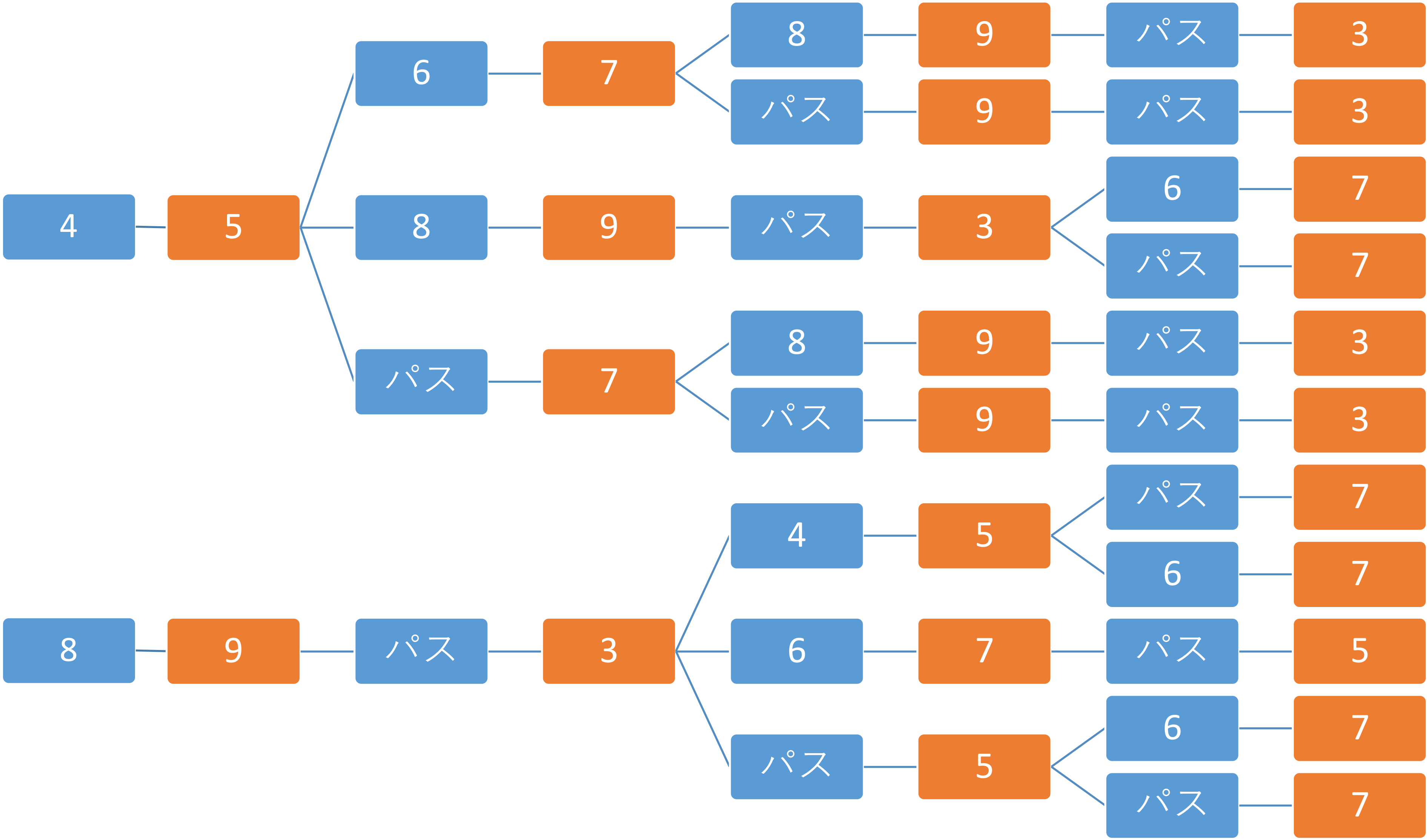
単貧民における最適手順

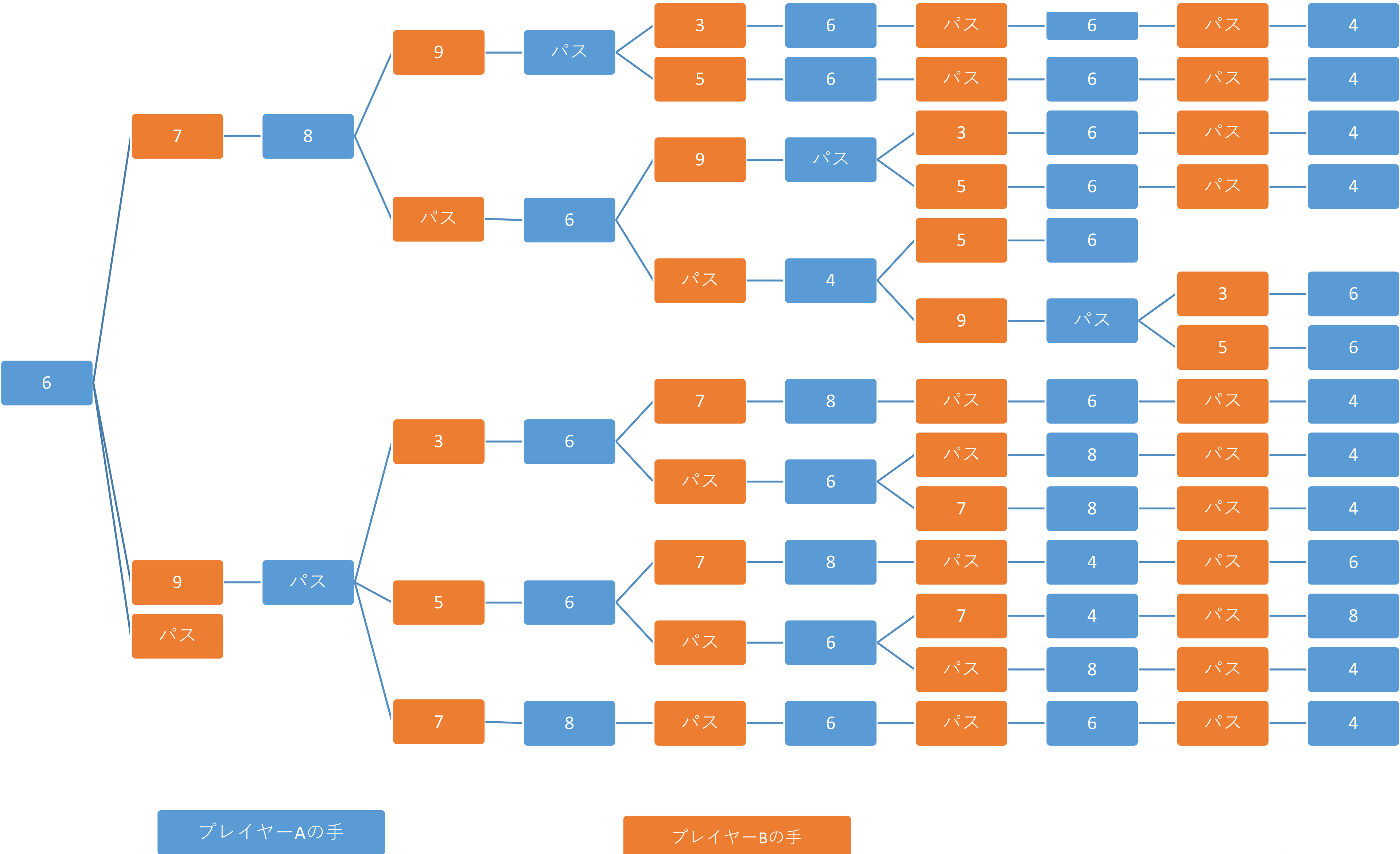
- このゲームにおいて必勝戦略を
  求めるだけならゲーム木による分析が可能

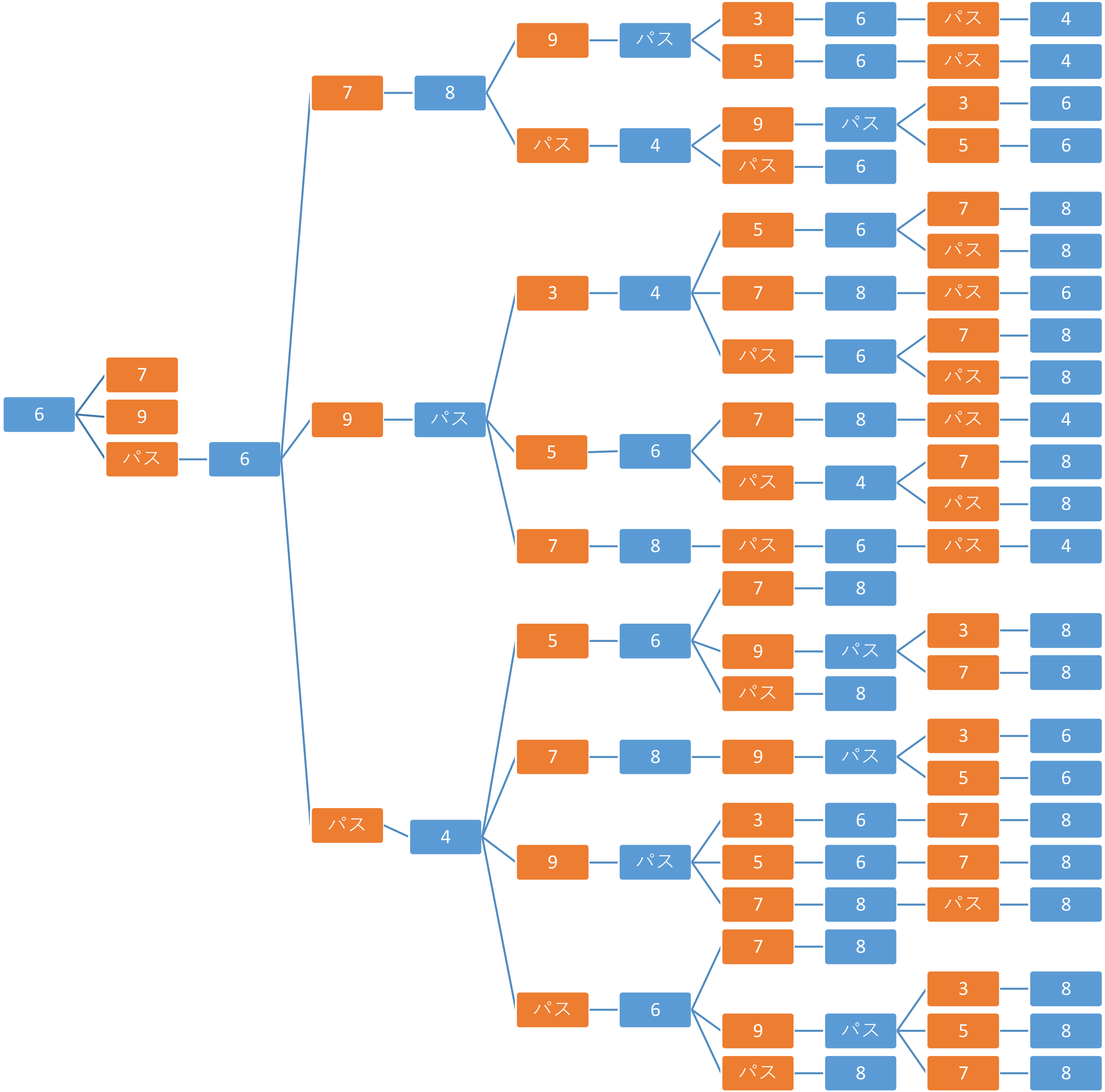
3 5 7 9

先手必勝or後手必勝？

4 6 6 6 8


4
5
6
7
8
9
パス
3
パス
9
パス
3
8
9
パス
3
6
7
パス
7
パス
7
8
9
パス
3
パス
9
パス
3
8
9
パス
3
4
5
パス
7
6
7
6
7
パス
5
パス
5
6
7
パス
7


3 6 パス 6 パス 4
9 パス
5 6 パス 6 パス 4
7 8 3 6 パス 4
9 パス
5 6 パス 4
パス 6
5 6
パス 4
3 6
9 パス
5 6
6
7 8 パス 6 パス 4
3 6
パス 8 パス 4
パス 6
7 8 パス 4
7 8 パス 4 パス 6
9 パス
5 6
7 4 パス 8
パス
パス 6
パス 8 パス 4
7 8 パス 6 パス 6 パス 4
プレイヤーAの手
プレイヤーBの手


3 6 パス 4
9 パス
5 6 パス 4
7 8
3 6
9 パス
パス 4 5 6
パス 6
7 8
5 6
パス 8
3 4 7 8 パス 6
7 8
パス 6
7
パス 8
6
9
9 パス 7 8 パス 4
5 6
パス
6
7 8
パス 4
パス 8
7 8 パス 6 パス 4
7 8
3 8
5 6
9 パス
7 8
パス 8
3 6
7 8 9 パス
5 6
3 6 7 8
パス
4
9 パス 5 6 7 8
7 8 パス 8
7 8
3 8
パス 6
9 パス 5 8
パス 8 7 8

3 5 7 9

先手必勝！

4 6 6 6 8

単貧民における最適手順

- このゲームにおいて必勝戦略を
  求めるだけならゲーム木による分析が可能
- しかし, 枚数が多くなるとゲーム木のサイズ
  は指数的に増大

単貧民における最適手順

- このゲームにおいて必勝戦略を求めるだけならゲーム木による分析が可能
- しかし, 枚数が多くなるとゲーム木のサイズは指数的に増大

単貧民において必勝判定を比較的早く解くアルゴリズムはないのか？

今日の流れ

1. 大貧民と単貧民
2. 単貧民における必勝手順
3. 本研究
4. 今後の展望

今日の流れ

1. 大貧民と単貧民
2. 単貧民における必勝手順
3. 本研究
4. 今後の展望

結果

n枚の手札が2人のプレイヤーに配られたときソート後、$O(n)$時間で必勝戦略保持者がどちらであるか判定できる

準備

準備

プレイヤーを表す変数Xに対して, 一方をX としたとき, 他方を$\bar{X}$とする

手番tにおける$X, \bar{X}$の手札を

$X[\mathrm{t}] \subseteq \{1,2 \ldots \mathrm{n}\}, \bar{X}[\mathrm{t}] \subseteq \{1,2 \ldots \mathrm{n}\}$で表す。

3 5 7 9

$\bar{X}[t]$の手札

$X[t]$の手札

4 6 6 6 8

3 5 7 9

$\bar{X}[t] = \{3,5,7,9\}$

$X[t] = \{4,6,6,6,8\}$

4 6 6 6 8

準備

プレイヤーを表す変数Xに対して, 一方を X としたとき, 他方を$\bar{X}$とする

手番tにおける$X, \bar{X}$の手札を

X[t]⊆ $\{1,2 \ldots \mathrm{n}\}$, $\bar{X}$[t]⊆ $\{1,2 \ldots \mathrm{n}\}$で表す。

このとき任意の手番tに対して以下の二部グラフを定義する。

$G_X[t]$ =(X[t], $\bar{X}$[t],$E_X[t]$)

ただし $E_X[t]$={{i,j}|i ⊆ X[t],j ⊆ $\bar{X}$[t],i>j}

3 5 7 9

$\bar{X}[t] = \{3,5,7,9\}$

$X[t] = \{4,6,6,6,8\}$

4 6 6 6 8

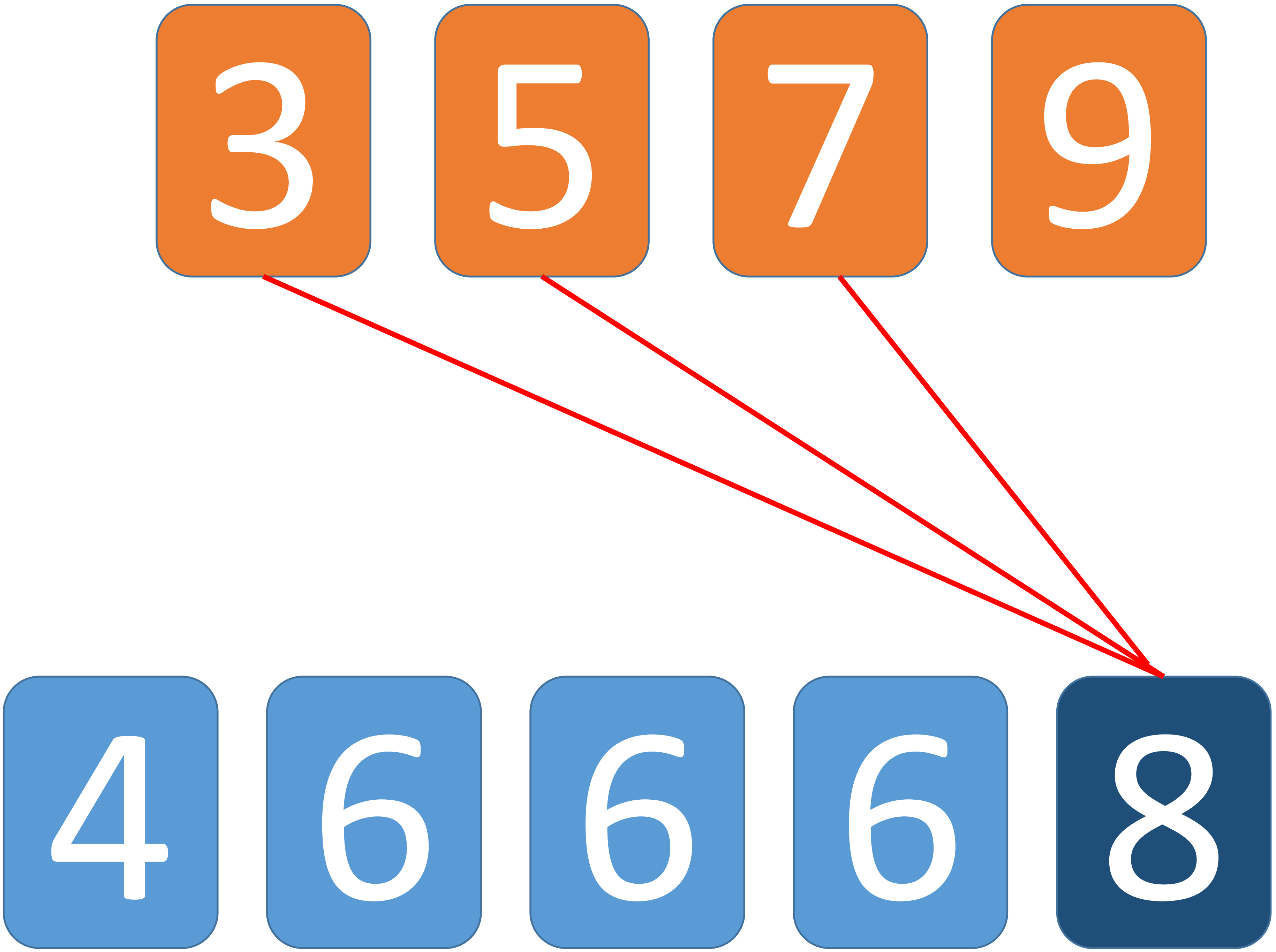
3 5 7 9

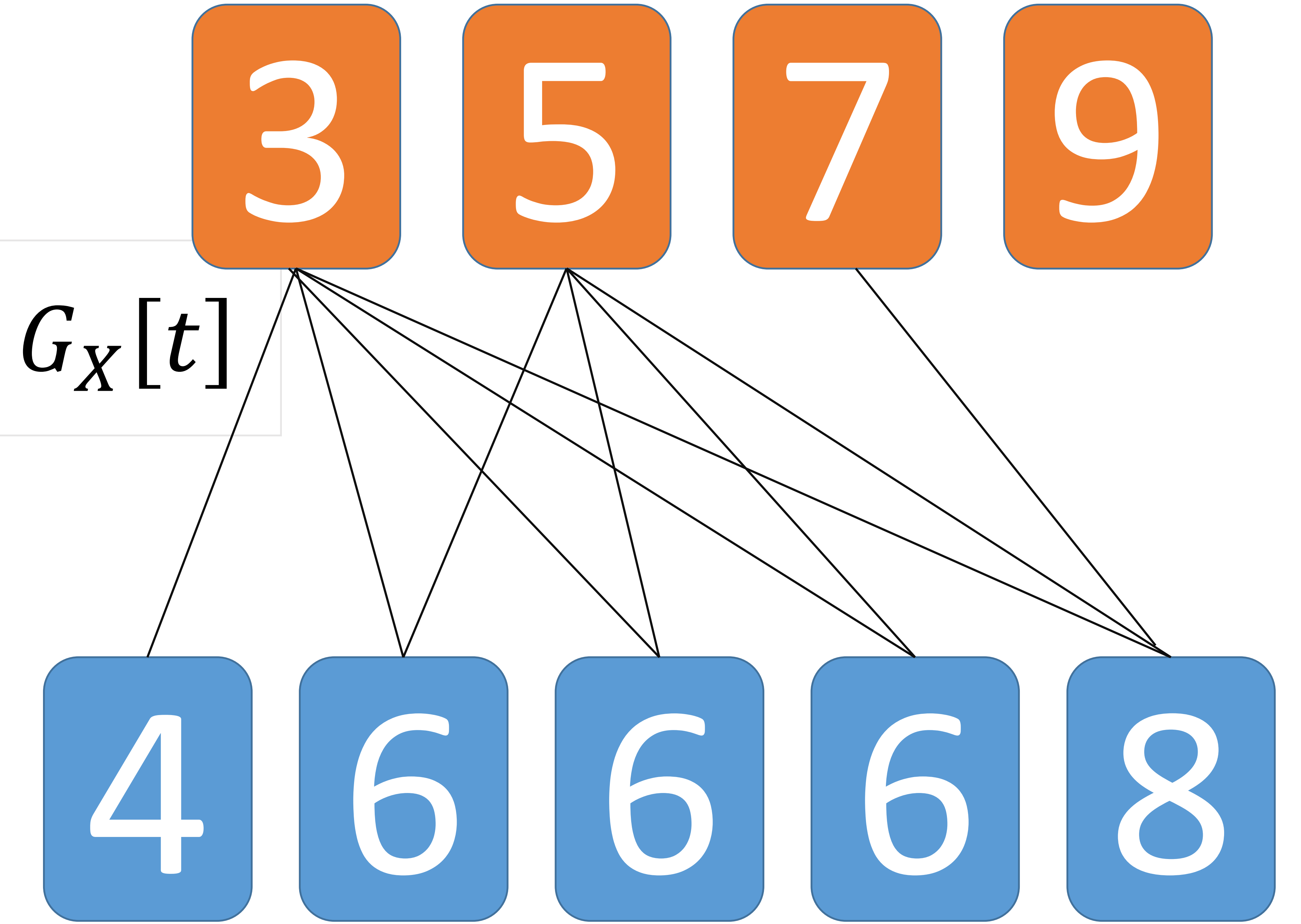
$G_X[t]$の作成

4 6 6 6 8

3 5 7 9

4 6 6 6 8

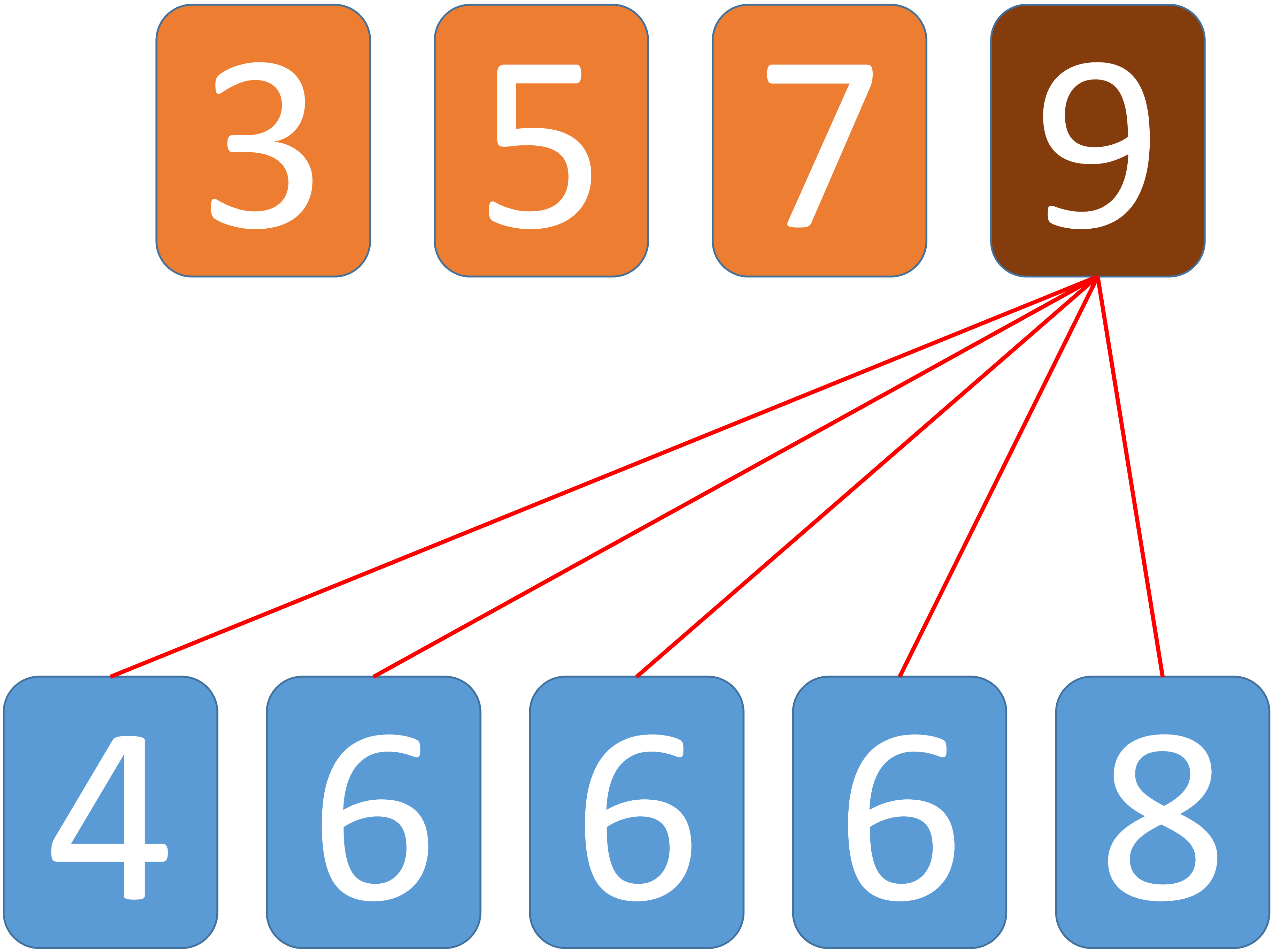

3
5
7
9
4
6
6
6
8

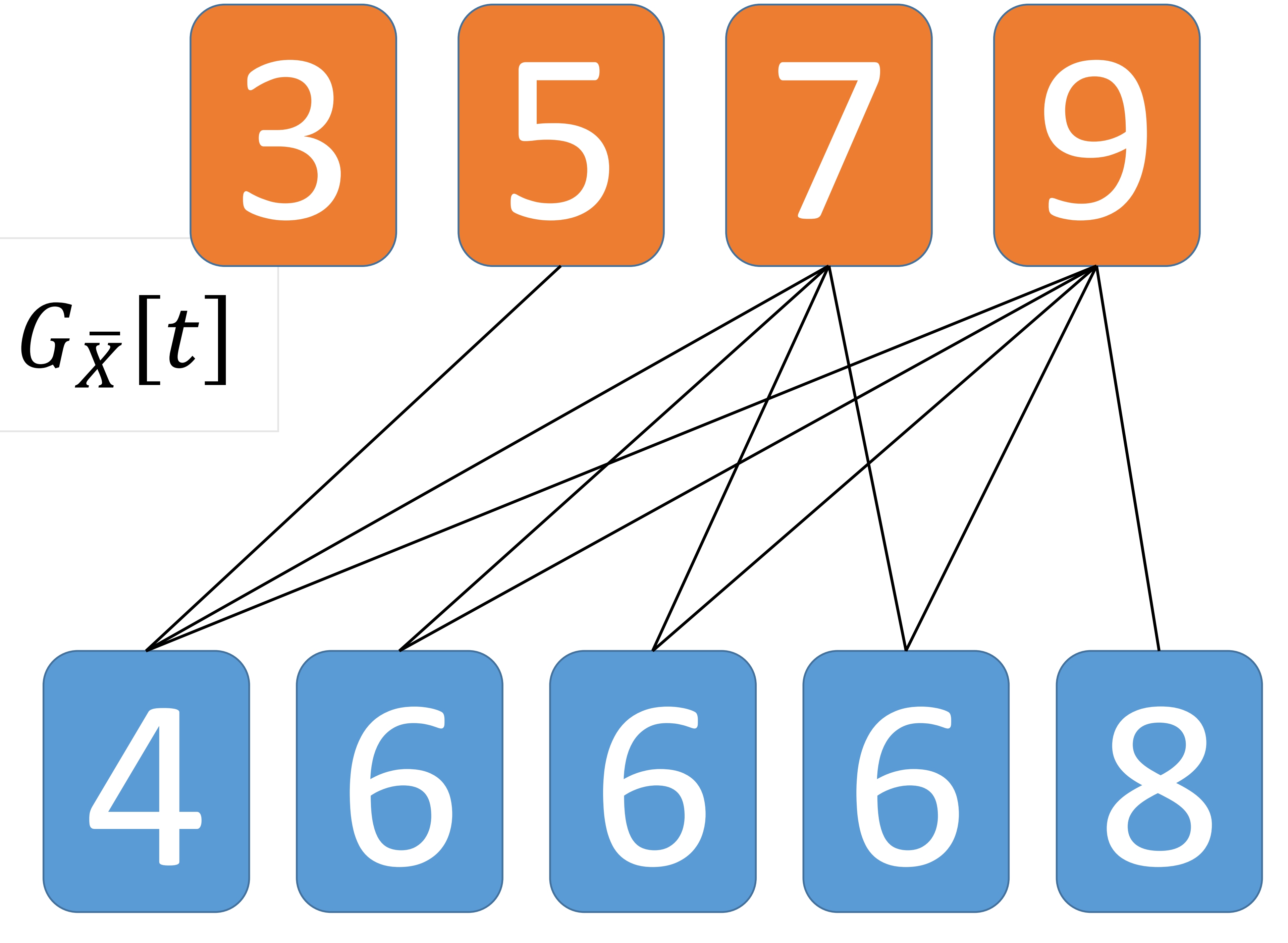

3
5
7
9
$G_X[t]$
4
6
6
6
8

3 5 7 9

$G_{\bar{X}}[t]$の作成

4 6 6 6 8


3
5
7
9
4
6
6
6
8



$G_{\bar{X}}[t]$
3
5
7
9
4
6
6
6
8

準備

μ_X[t] ...Xから見た手の強さ関係を表すグラフにおけるt時点の最大マッチング数

$w(\mu_X[t])$...自らの手のうち$\mu_X[t]$番目に強い手

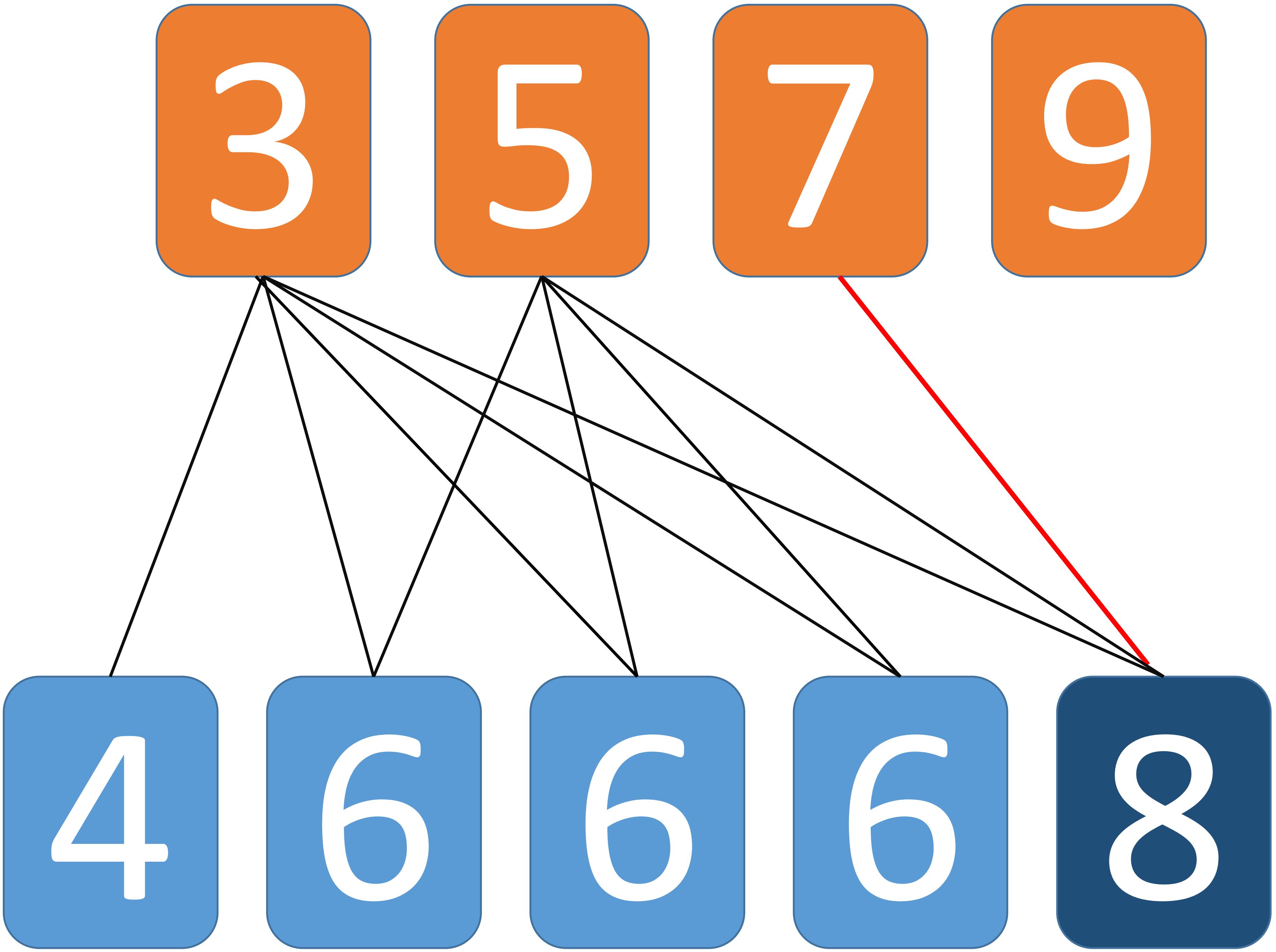
ν_X[t]...$w(\mu_X[t])$の隣接点で且つ$\mu_X[t]$のマッチングに使われていないノードの数

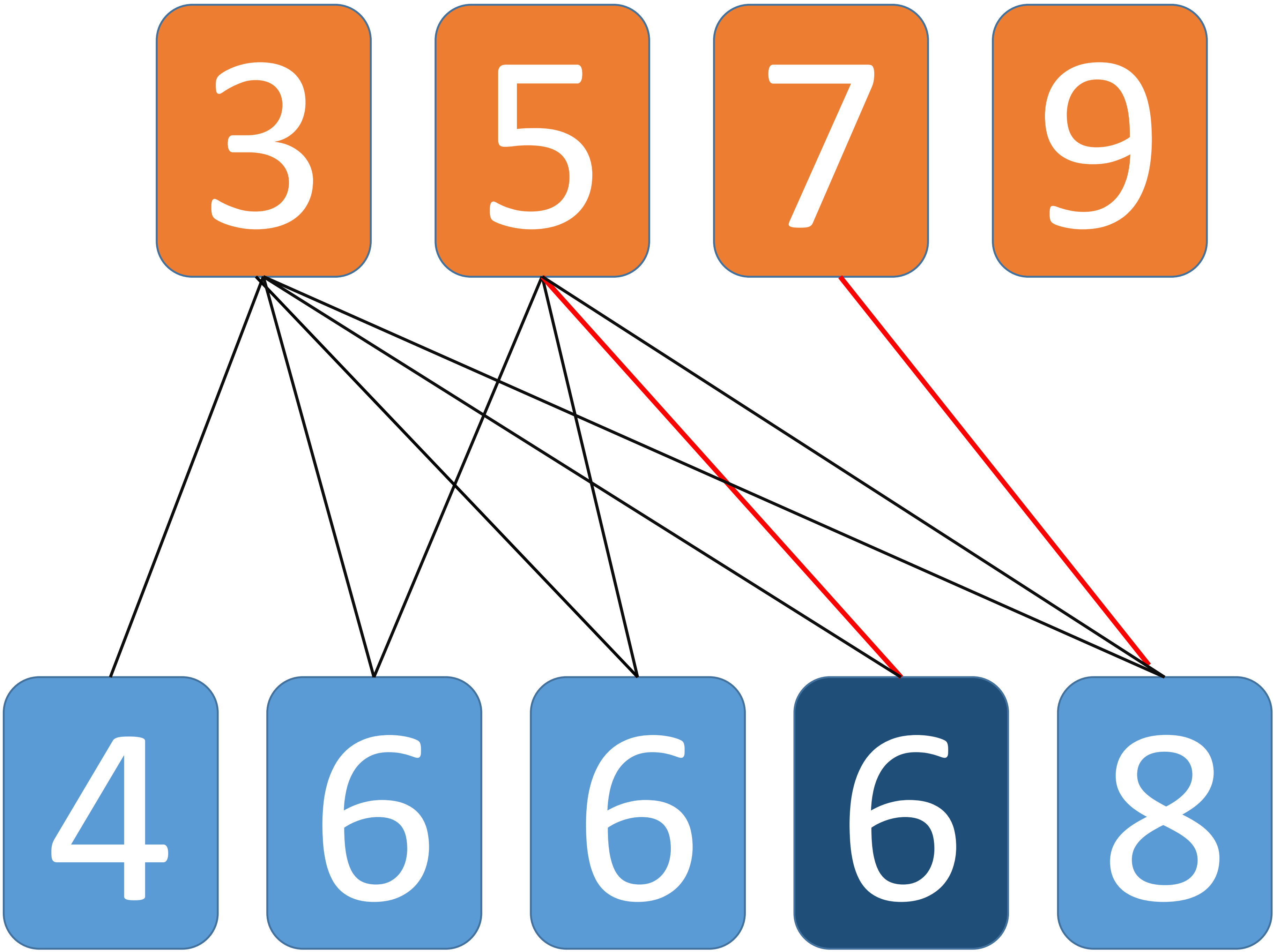
準備

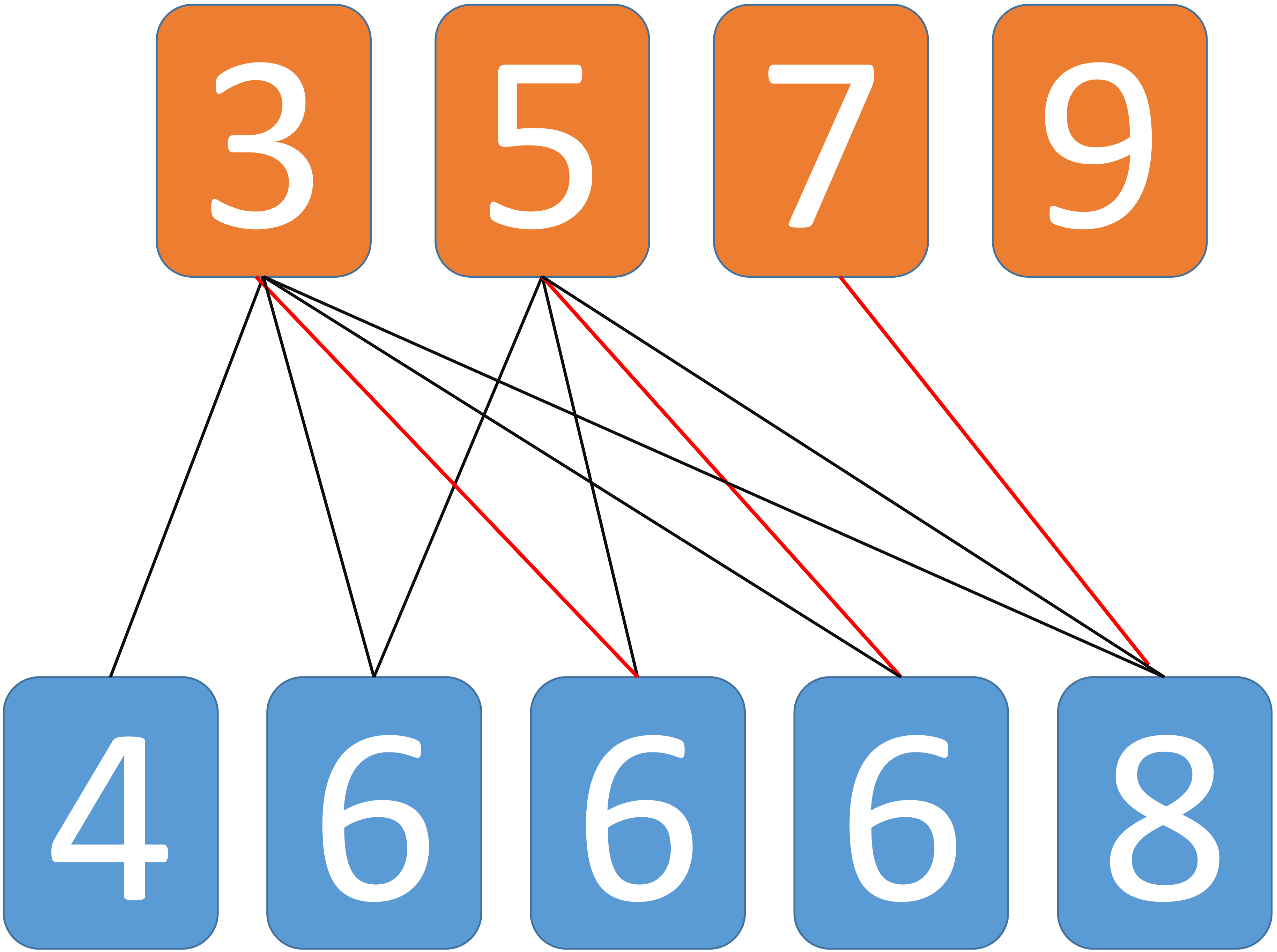
μ_X[t] ...Xから見た手の強さ関係を表すグラフにおけるt時点の最大マッチング数

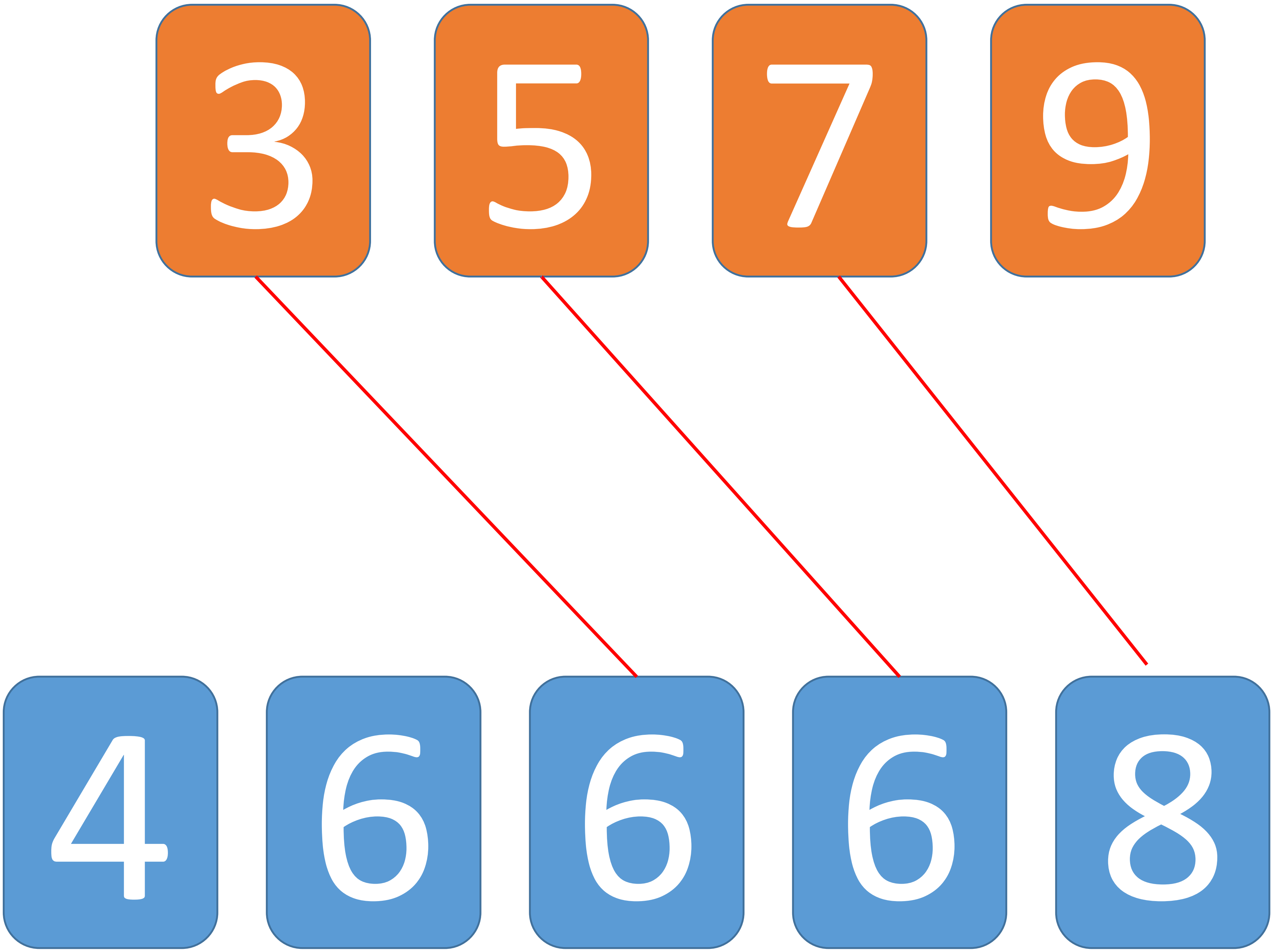
$w(\mu_X[t])$...自らの手のうち$\mu_X[t]$番目に強い手

ν_X[t]...$w(\mu_X[t])$の隣接点で且つ$\mu_X[t]$のマッチングに使われていないノードの数


3
5
7
9
4
6
6
6
8


3
5
7
9
4
6
6
6
8


3
5
7
9
4
6
6
6
8

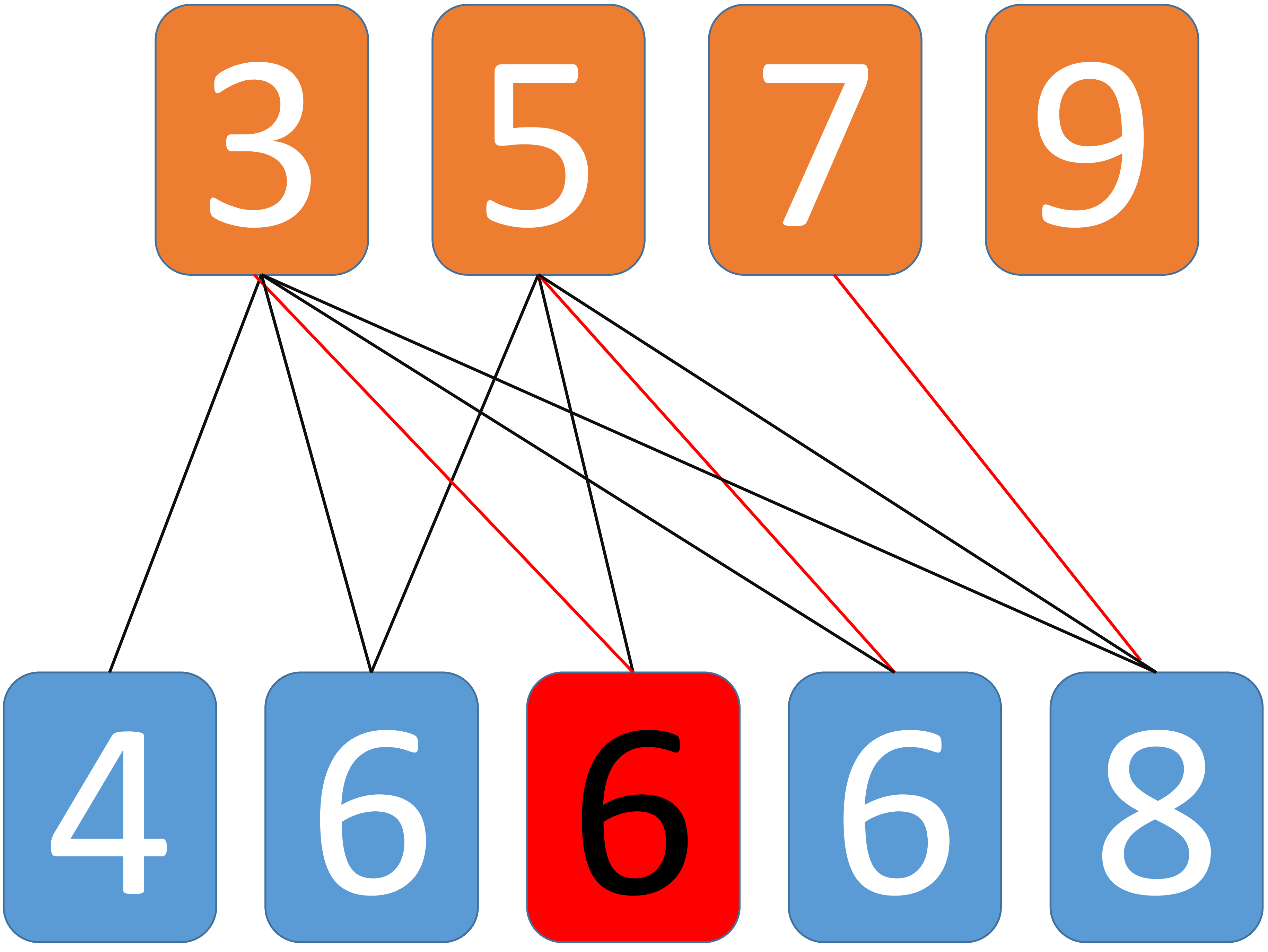

3
5
7
9
4
6
6
6
8

準備

μ_X[t] …Xから見た手の強さ関係を表すグラフにおけるt時点の最大マッチング数

$w(\mu_X[t])$…自らの手のうち$\mu_X[t]$番目に強い手

ν_X[t]…$w(\mu_X[t])$の隣接点で且つ$\mu_X[t]$のマッチングに使われていないノードの数

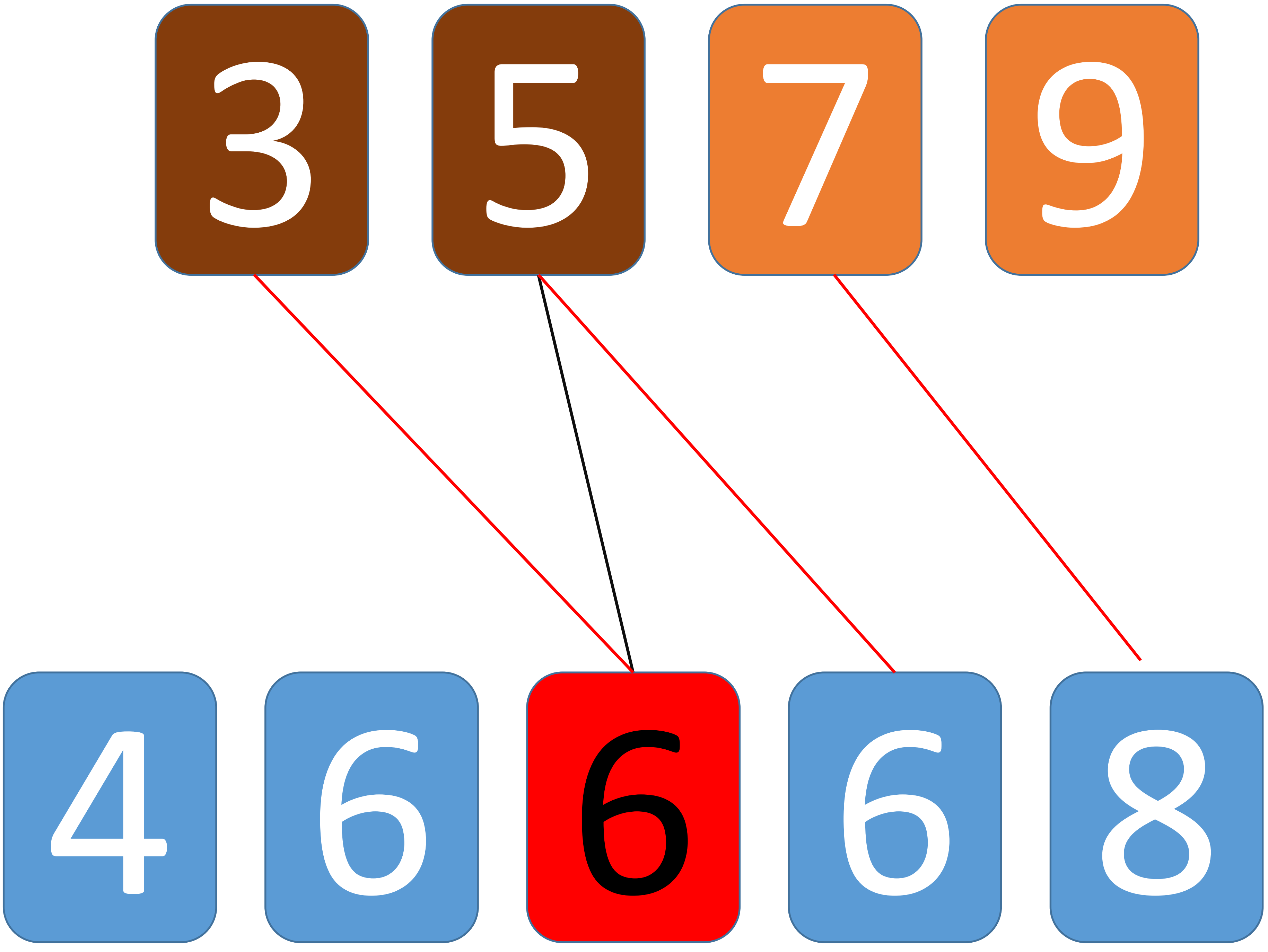

3
5
7
9
4
6
6
6
8

準備

μ_X[t] …Xから見た手の強さ関係を表すグラフにおけるt時点の最大マッチング数

$w(\mu_X[t])$…自らの手のうち$\mu_X[t]$番目に強い手

ν_X[t]…$w(\mu_X[t])$の隣接点で且つ$\mu_X[t]$のマッチングに使われていないノードの数（$\mu_X[t]$＝0ならば1とする）


3
5
7
9
4
6
6
6
8

主結果

定理 1. ある空場におけるt時点の手番プレイヤーを X とする. X は以下のいずれかを満たすとき, またそのときに限り, 必勝プレイヤーである.

(1) μ_X[t]>$\mu_{\bar{X}}$[t]

(2) μ_X[t]=$\mu_{\bar{X}}$[t] ν_X[t]>0,

(3) μ_X[t]=$\mu_{\bar{X}}$[t] $\nu_{\bar{X}}$[t]=0,

(4) μ_X[t]=$\mu_{\bar{X}} + 1, \nu_X$[t]>0, $\nu_{\bar{X}}$[t]=0,

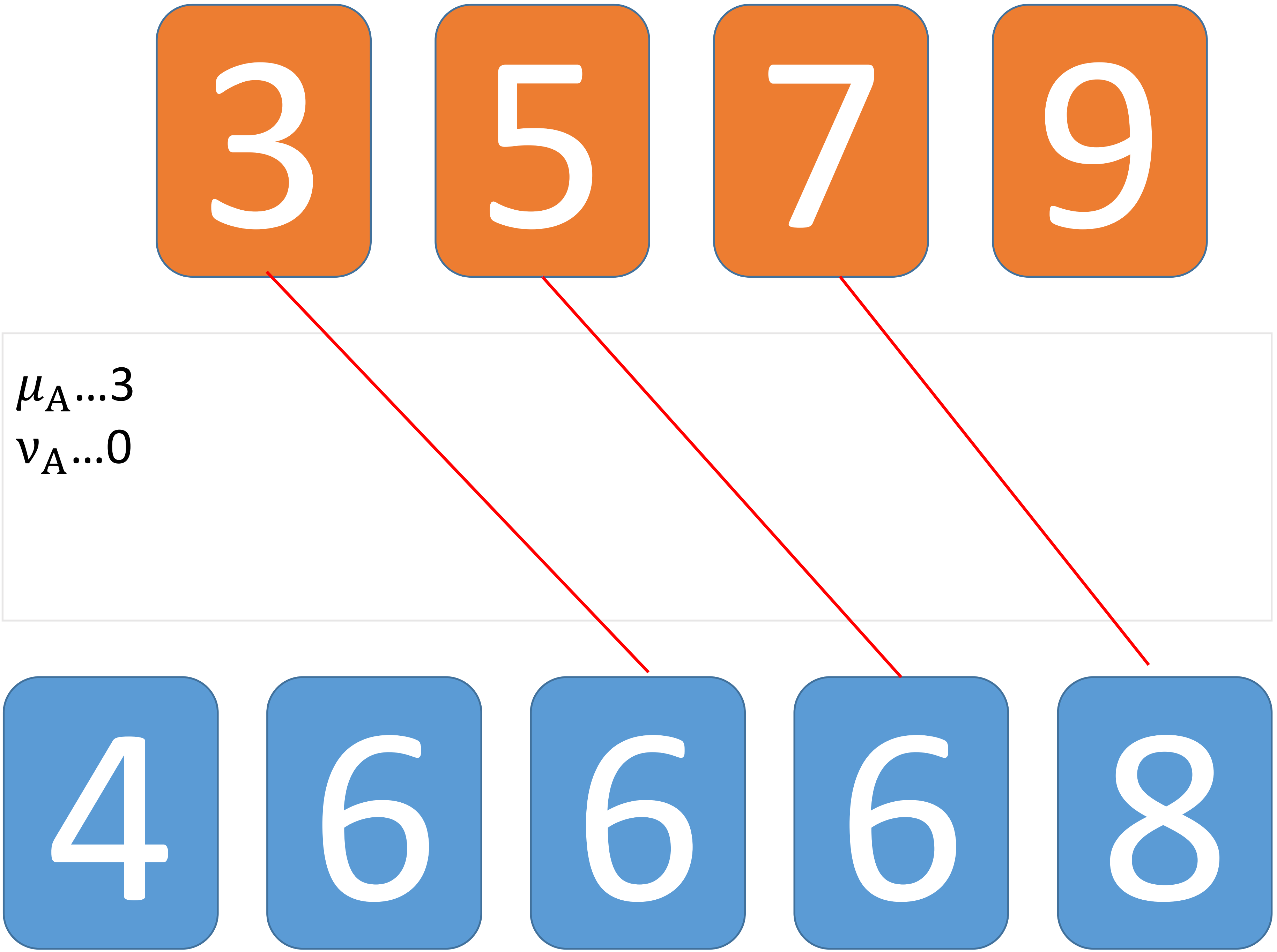
	$\mu_X[t]>\mu_{\bar{X}}[t]$	$\mu_X[t]=\mu_{\bar{X}}[t]$	$\mu_X[t]=\mu_{\bar{X}}+1$	$\mu_X[t]<\mu_{\bar{X}}+1$
$\nu_X[t]=0$, $\nu_{\bar{X}}[t]=0$	先手必勝	先手必勝	後手必勝	後手必勝
$\nu_X[t]>0$, $\nu_{\bar{X}}[t]=0$	先手必勝	先手必勝	先手必勝	後手必勝
$\nu_X[t]=0$, $\nu_{\bar{X}}[t]>0$	先手必勝	後手必勝	後手必勝	後手必勝
$\nu_X[t]>0$, $\nu_{\bar{X}}[t]>0$	先手必勝	先手必勝	後手必勝	後手必勝

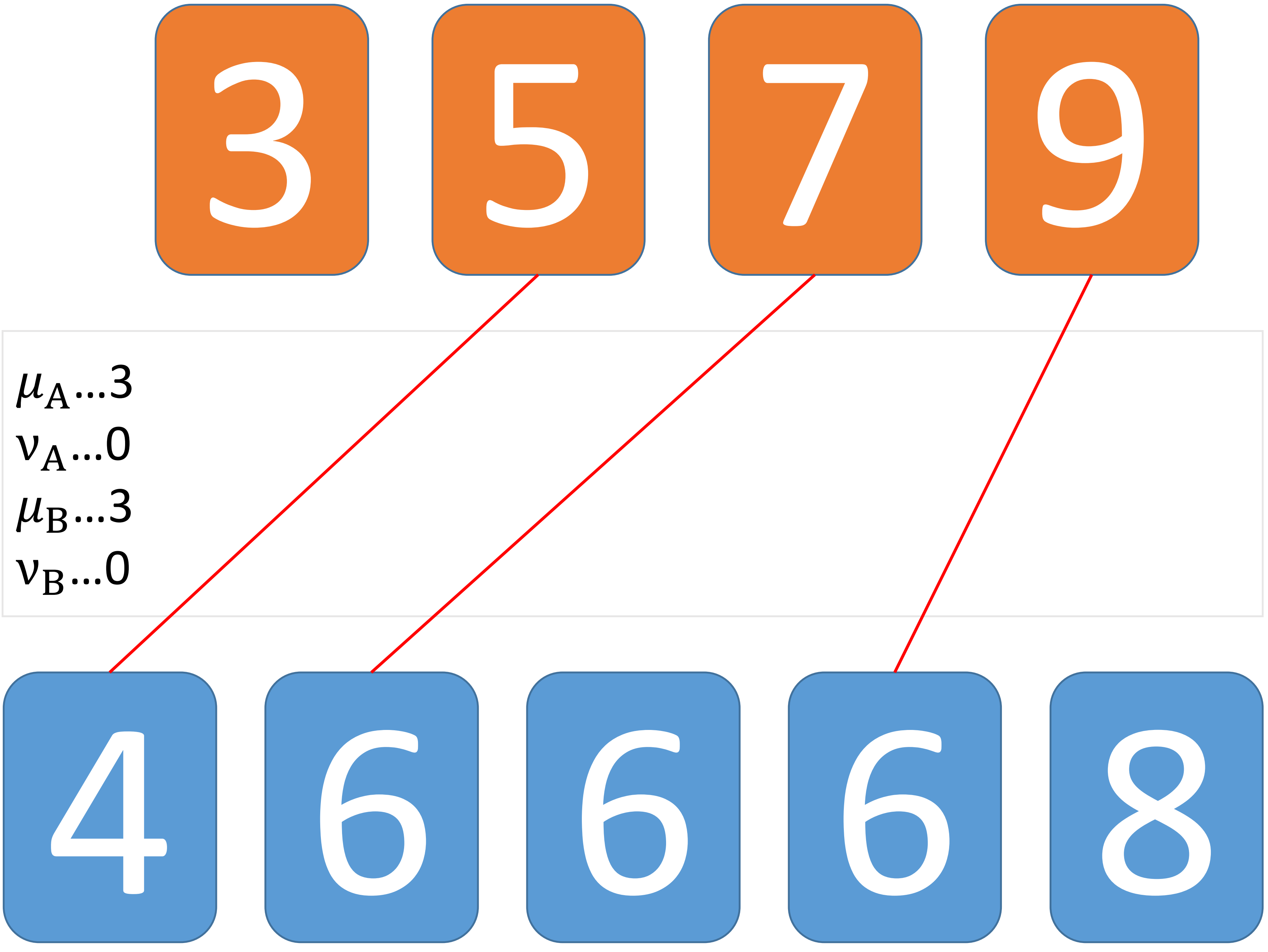
計算時間について

各tに対して μ_X , ν_X を求めることは
ソートされたデータセットが与えられていれば
nに対する線形時間で可能

主結果

$\mu_{\mathrm{A}}[0], \mu_{\mathrm{B}}[0], \nu_A[0], \nu_B[0]$を計算することによって
二人単貧民の必勝プレイヤーとその必勝戦略を
求めることができる.


3
5
7
9
$\mu_A \ldots 3$
$\nu_A \ldots 0$
4
6
6
6
8


3
5
7
9
μ_A...3
ν_A...0
μ_B...3
ν_B...0
4
6
6
6
8

3 5 7 9

μ_A…3
ν_A…0
μ_B…3
ν_B…0

4 6 6 6 8

	$\mu_X[t]>\mu_{\bar{X}}[t]$	$\mu_X[t]=\mu_{\bar{X}}[t]$	$\mu_X[t]=\mu_{\bar{X}}+1$	$\mu_X[t]<\mu_{\bar{X}}+1$
$\nu_X[t]=0$, $\nu_{\bar{X}}[t]=0$	先手必勝	先手必勝	後手必勝	後手必勝
$\nu_X[t]>0$, $\nu_{\bar{X}}[t]=0$	先手必勝	先手必勝	先手必勝	後手必勝
$\nu_X[t]=0$, $\nu_{\bar{X}}[t]>0$	先手必勝	後手必勝	後手必勝	後手必勝
$\nu_X[t]>0$, $\nu_{\bar{X}}[t]>0$	先手必勝	先手必勝	後手必勝	後手必勝

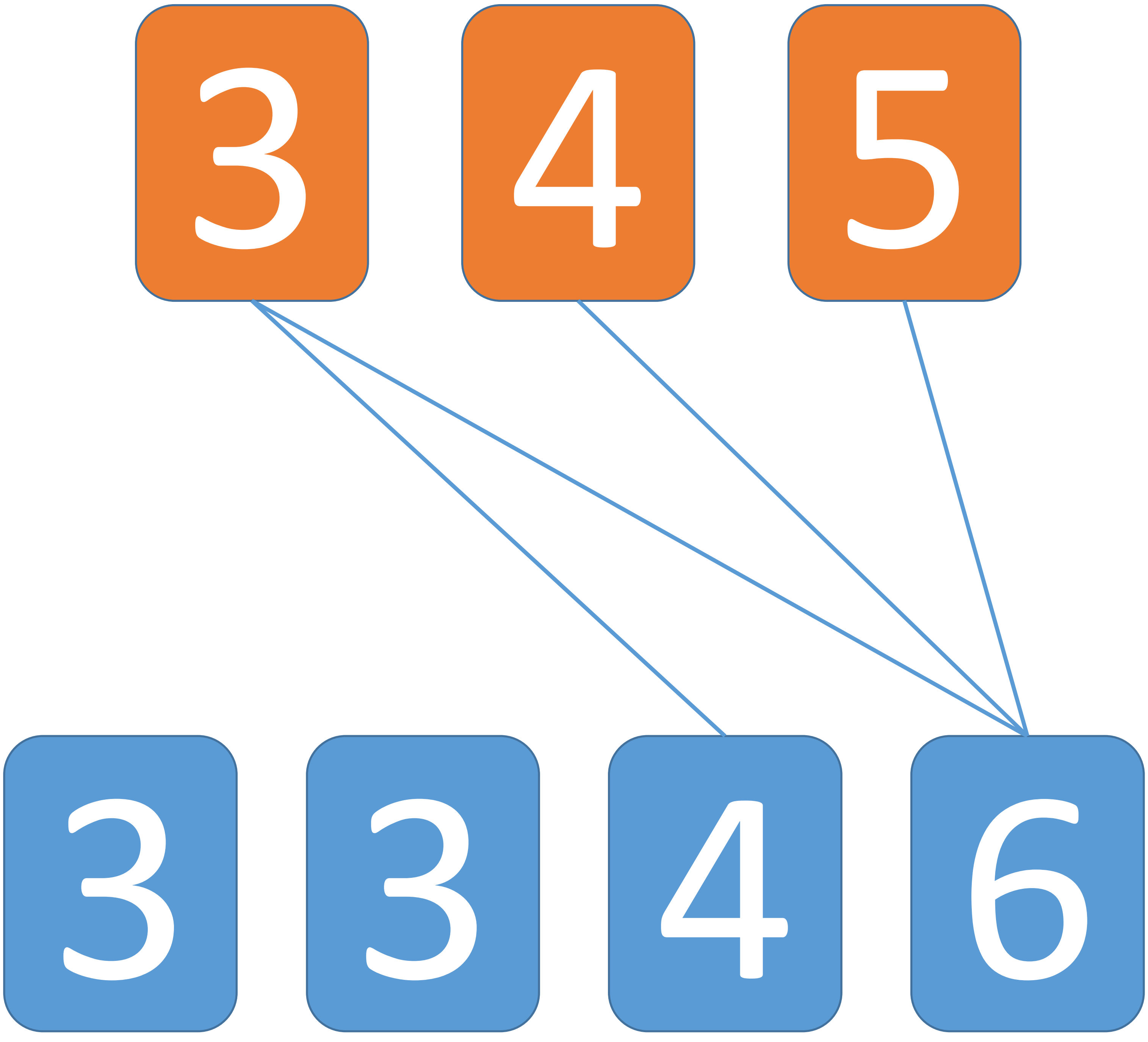
	$\mu_X[t] > \mu_{\bar{X}}[t]$	$\mu_X[t] = \mu_{\bar{X}}[t]$	$\mu_X[t] = \mu_{\bar{X}} + 1$	$\mu_X[t] < \mu_{\bar{X}} + 1$
$\nu_X[t]=0$, $\nu_{\bar{X}}[t]=0$	先手必勝	先手必勝	後手必勝	後手必勝
$\nu_X[t]>0$, $\nu_{\bar{X}}[t]=0$	先手必勝	先手必勝	先手必勝	後手必勝
$\nu_X[t]=0$, $\nu_{\bar{X}}[t]>0$	先手必勝	後手必勝	後手必勝	後手必勝
$\nu_X[t]>0$, $\nu_{\bar{X}}[t]>0$	先手必勝	先手必勝	後手必勝	後手必勝

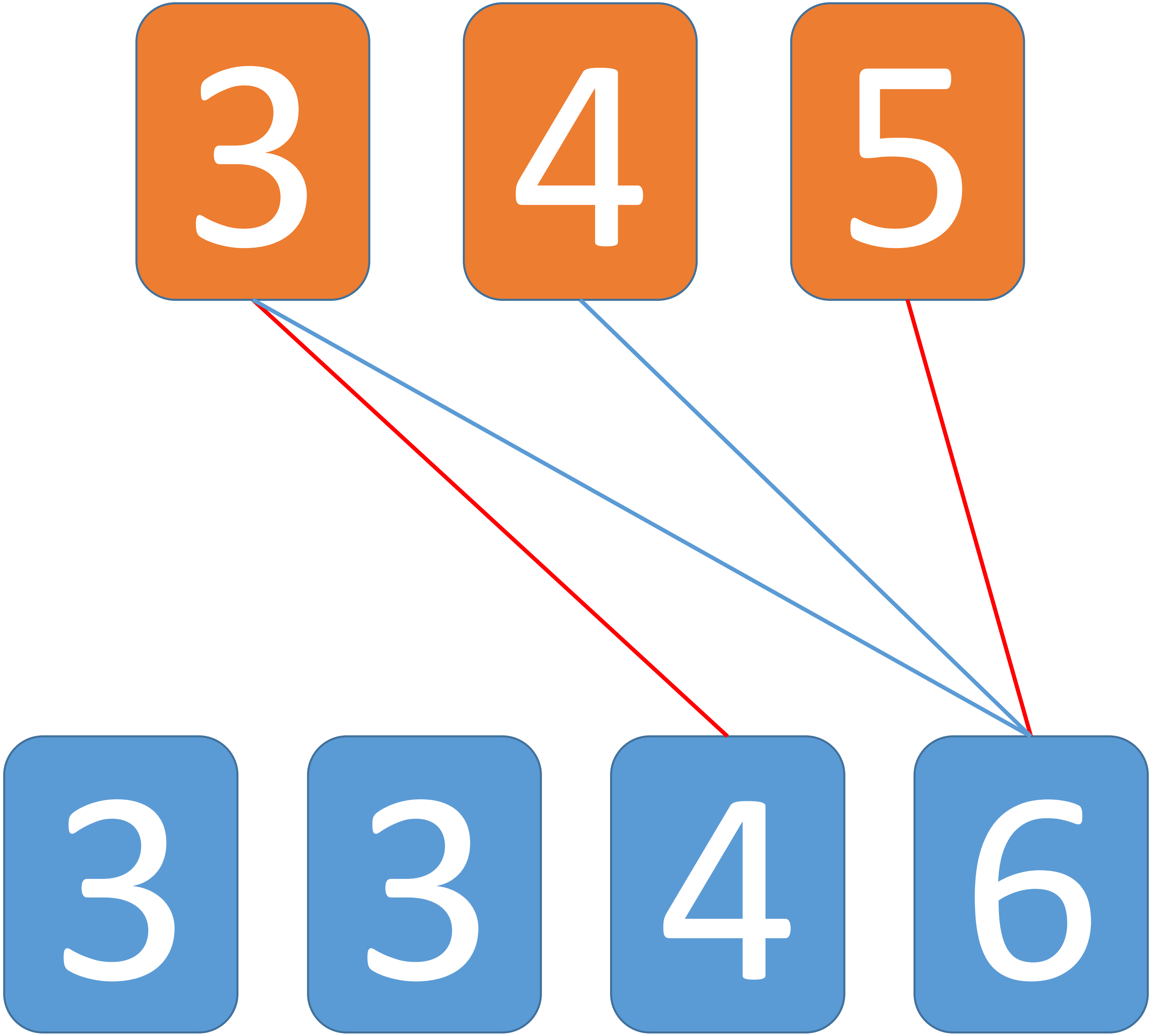
3 5 7 9

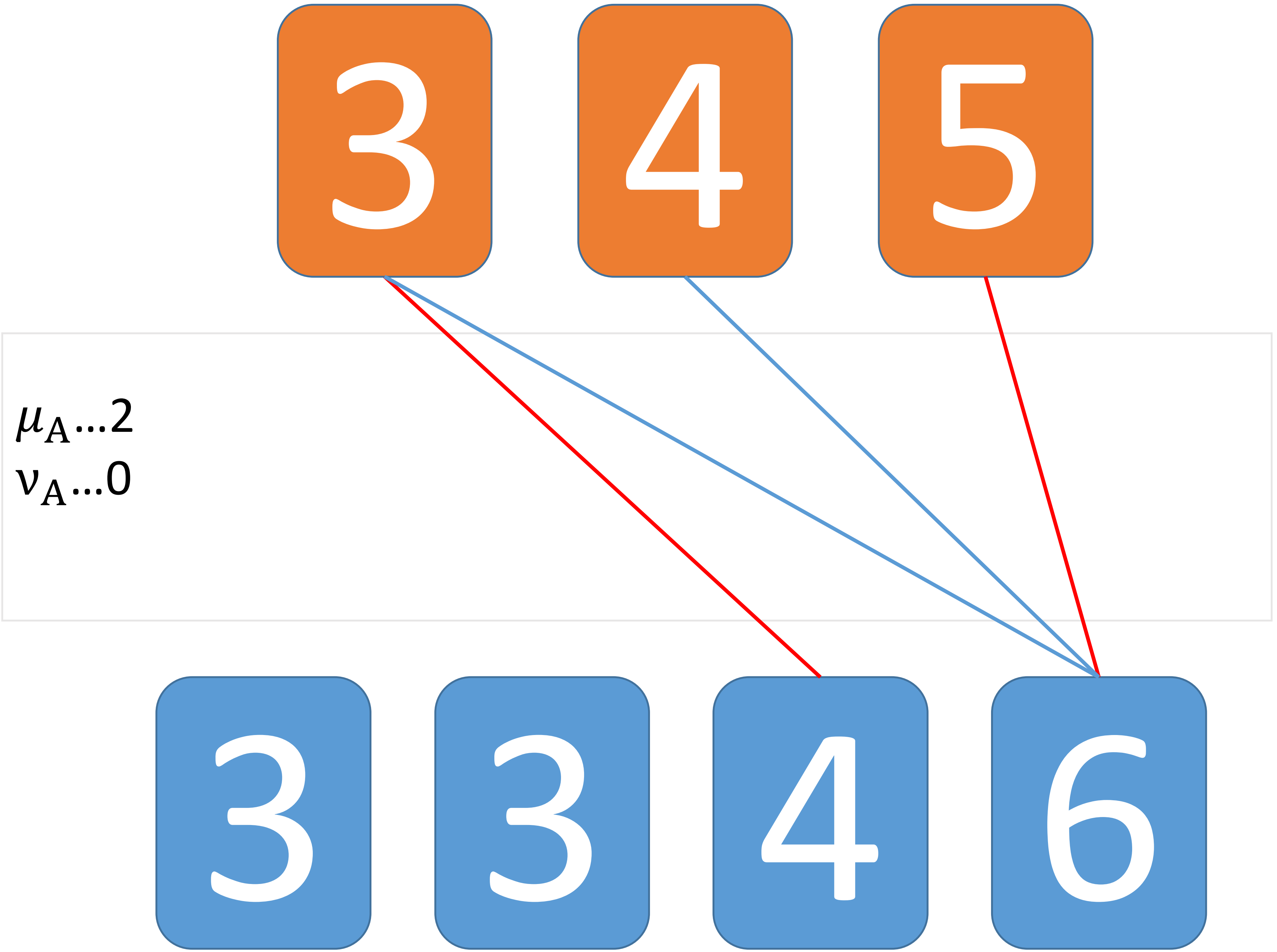
先手必勝！

4 6 6 6 8

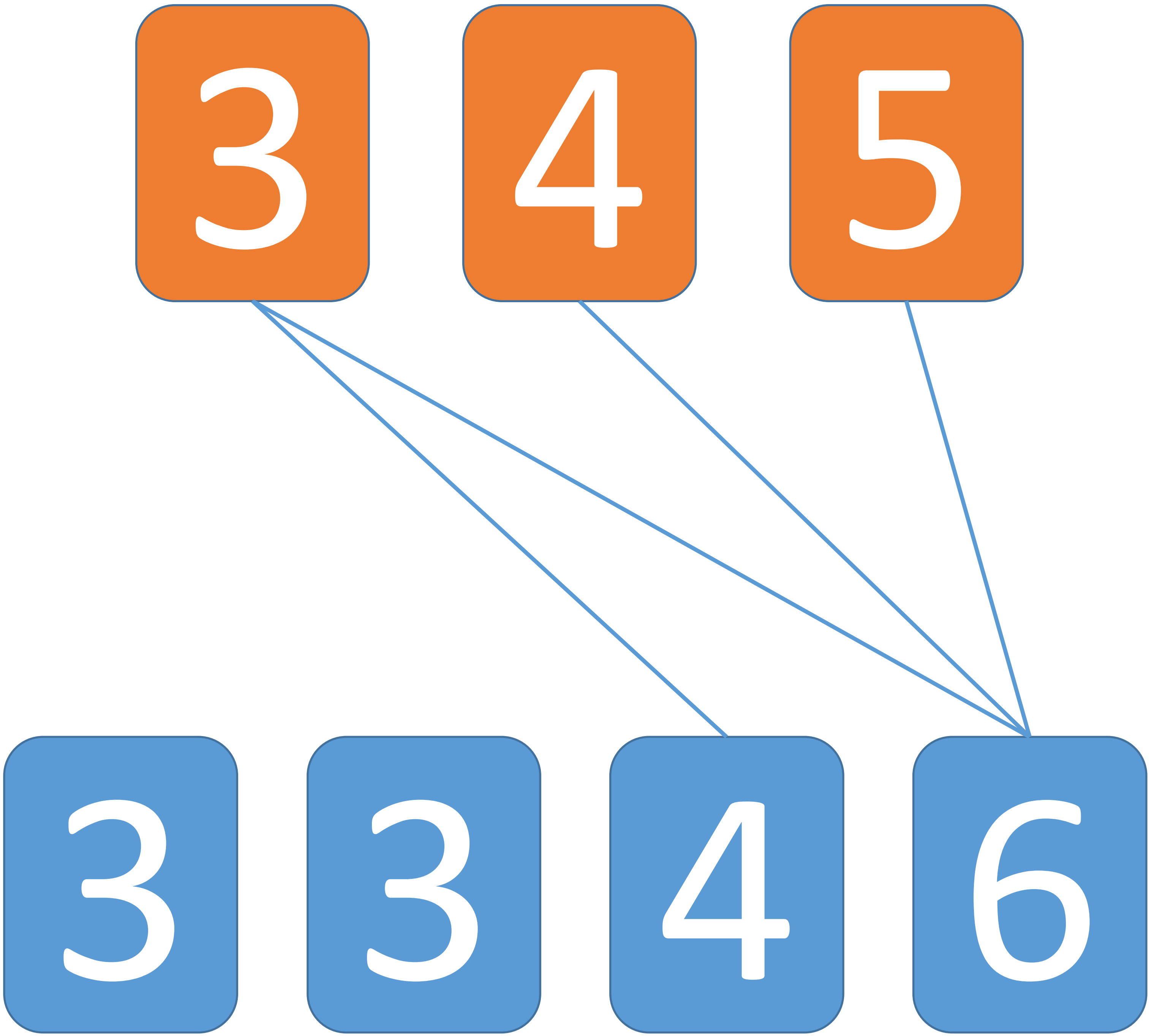

3
4
5
後手の手札
先手の手札
3
3
4
6

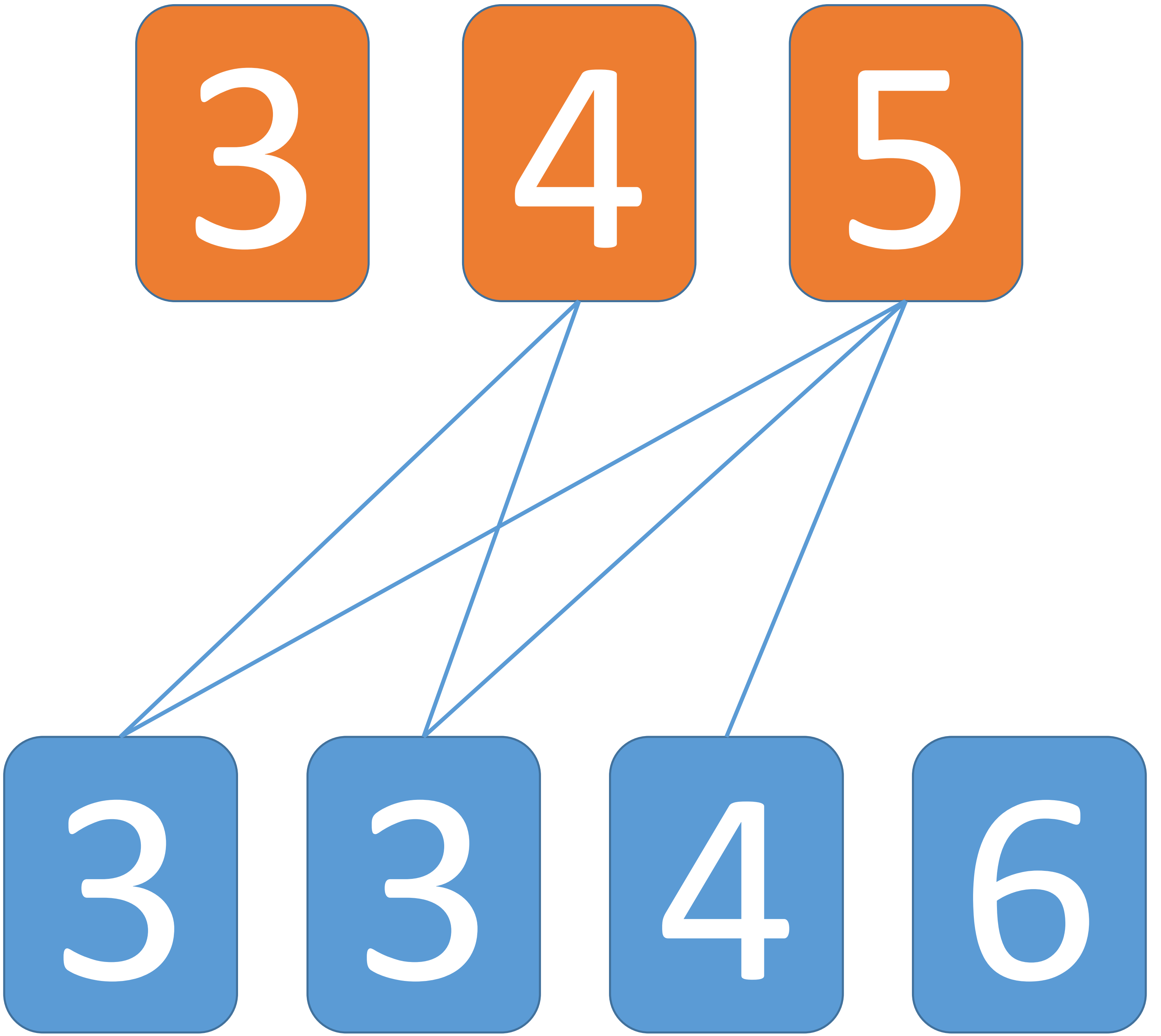

3
4
5
3
3
4
6

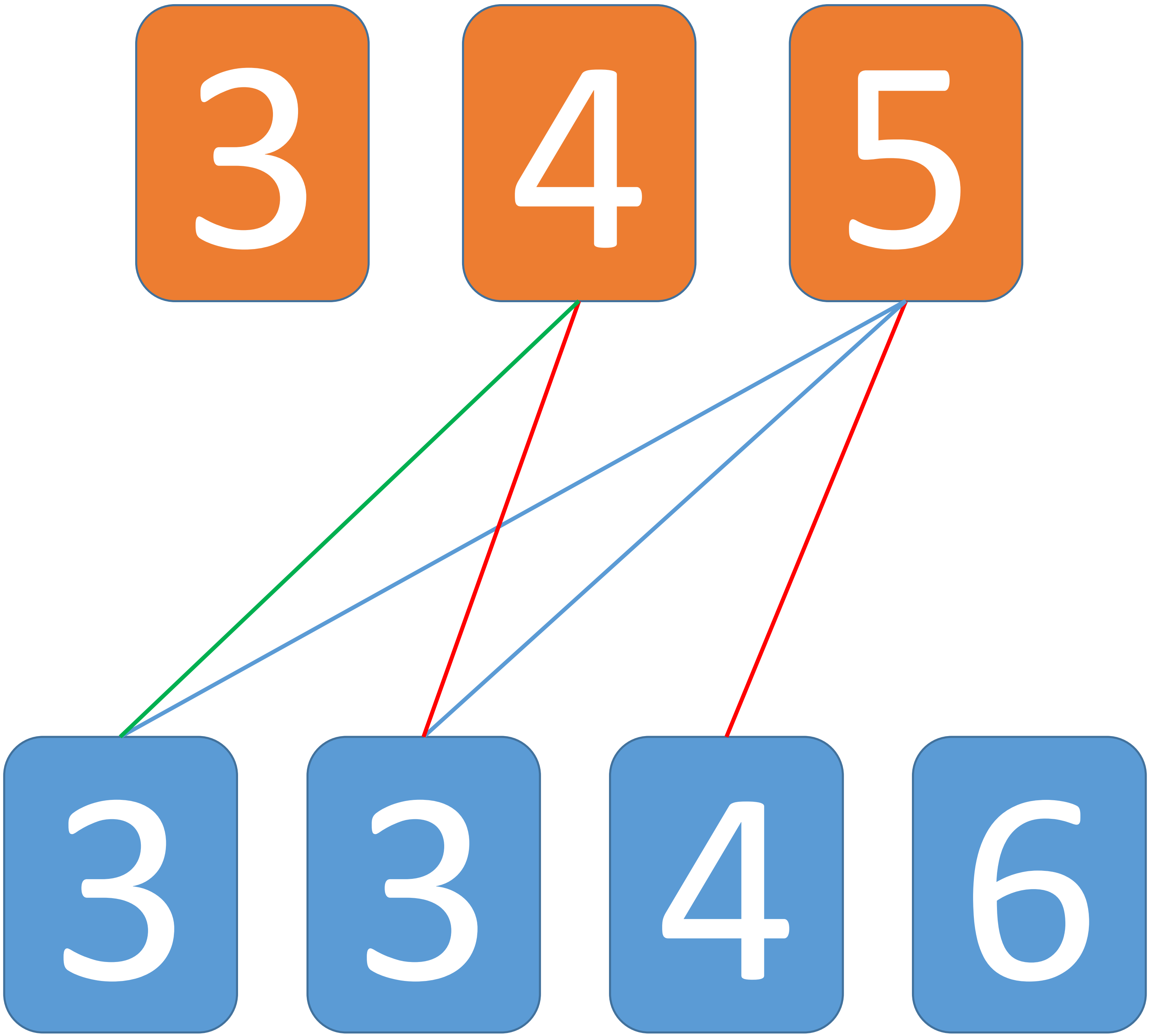

3
4
5
3
3
4
6

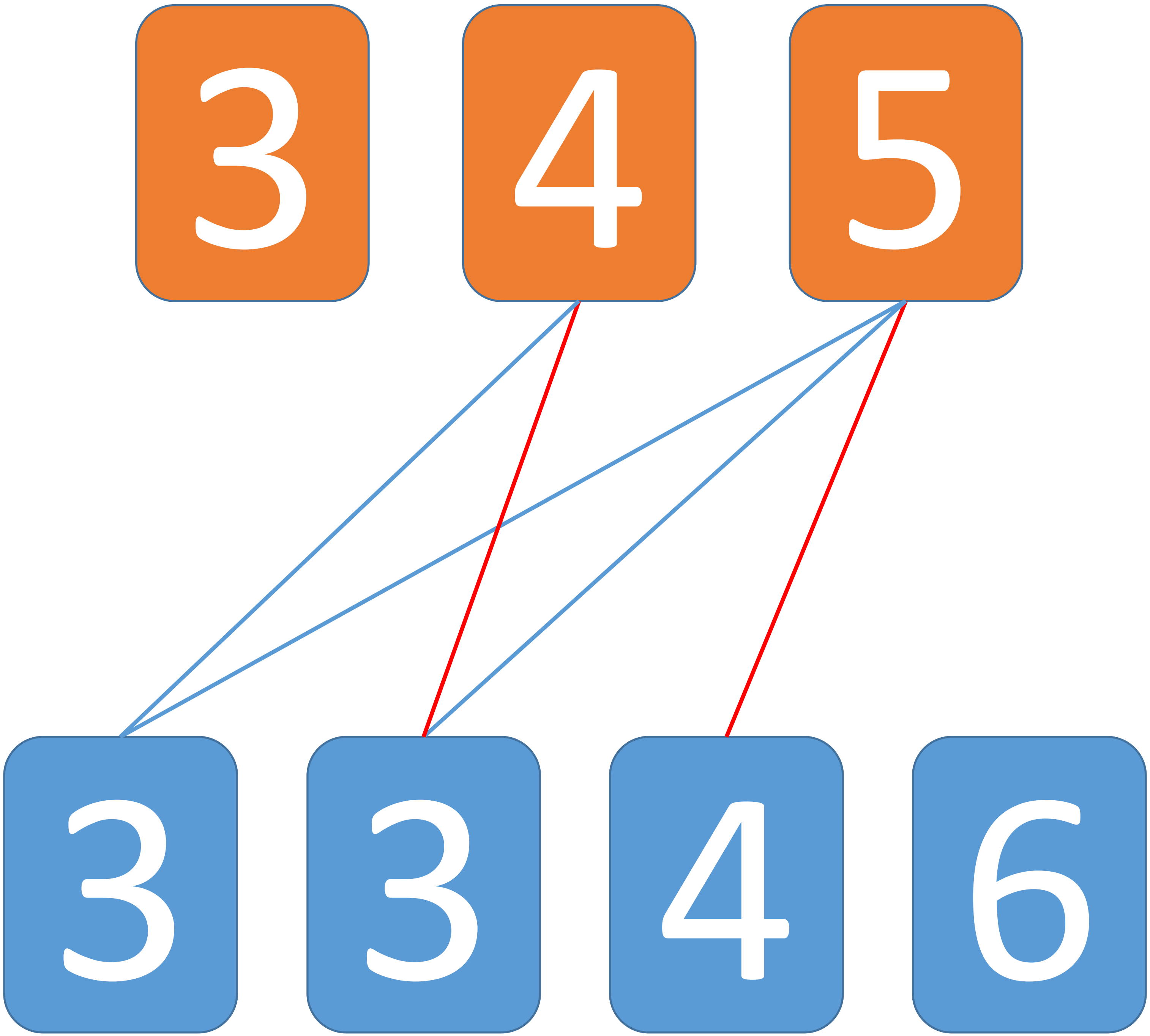


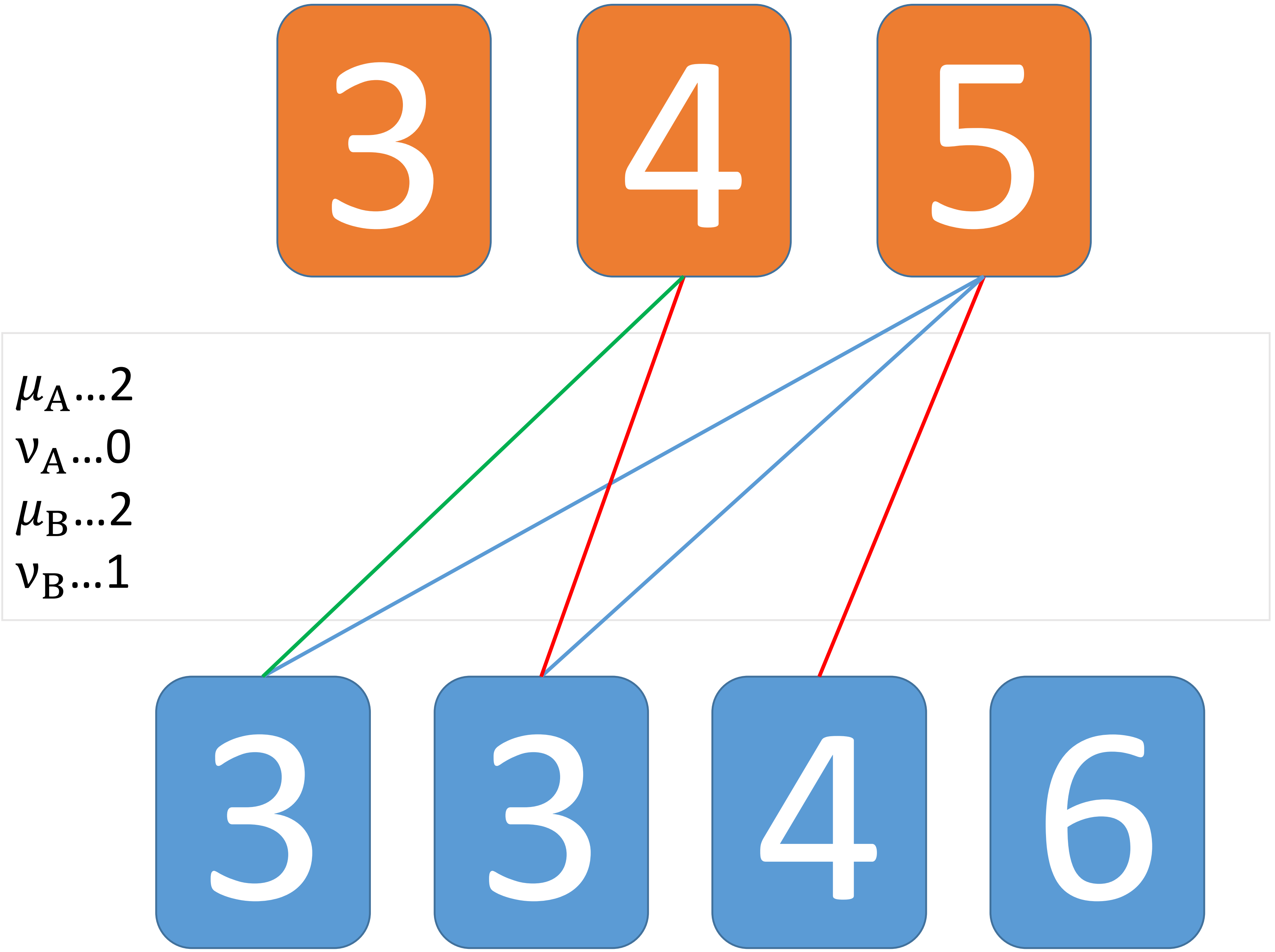
3
4
5
$\mu_A \ldots 2$
$\nu_A \ldots 0$
3
3
4
6


3
4
5
3
3
4
6


3
4
5
3
3
4
6


3
4
5
3
3
4
6


3
4
5
3
3
4
6


3
4
5
μ_A…2
ν_A…0
μ_B…2
ν_B…1
3
3
4
6

	$\mu_X[t] > \mu_{\bar{X}}[t]$	$\mu_X[t] = \mu_{\bar{X}}[t]$	$\mu_X[t] = \mu_{\bar{X}} + 1$	$\mu_X[t] < \mu_{\bar{X}} + 1$
$\nu_X[t]=0$, $\nu_{\bar{X}}[t]=0$	先手必勝	先手必勝	後手必勝	後手必勝
$\nu_X[t]>0$, $\nu_{\bar{X}}[t]=0$	先手必勝	先手必勝	先手必勝	後手必勝
$\nu_X[t]=0$, $\nu_{\bar{X}}[t]>0$	先手必勝	後手必勝	後手必勝	後手必勝
$\nu_X[t]>0$, $\nu_{\bar{X}}[t]>0$	先手必勝	先手必勝	後手必勝	後手必勝

3 4 5

先手必勝！

3 3 4 6

証明の方針

状態推移を利用して帰納的に証明する.

ある局面から

その次の空場において手番をもった状態で

手番プレイヤー必勝である場面

or

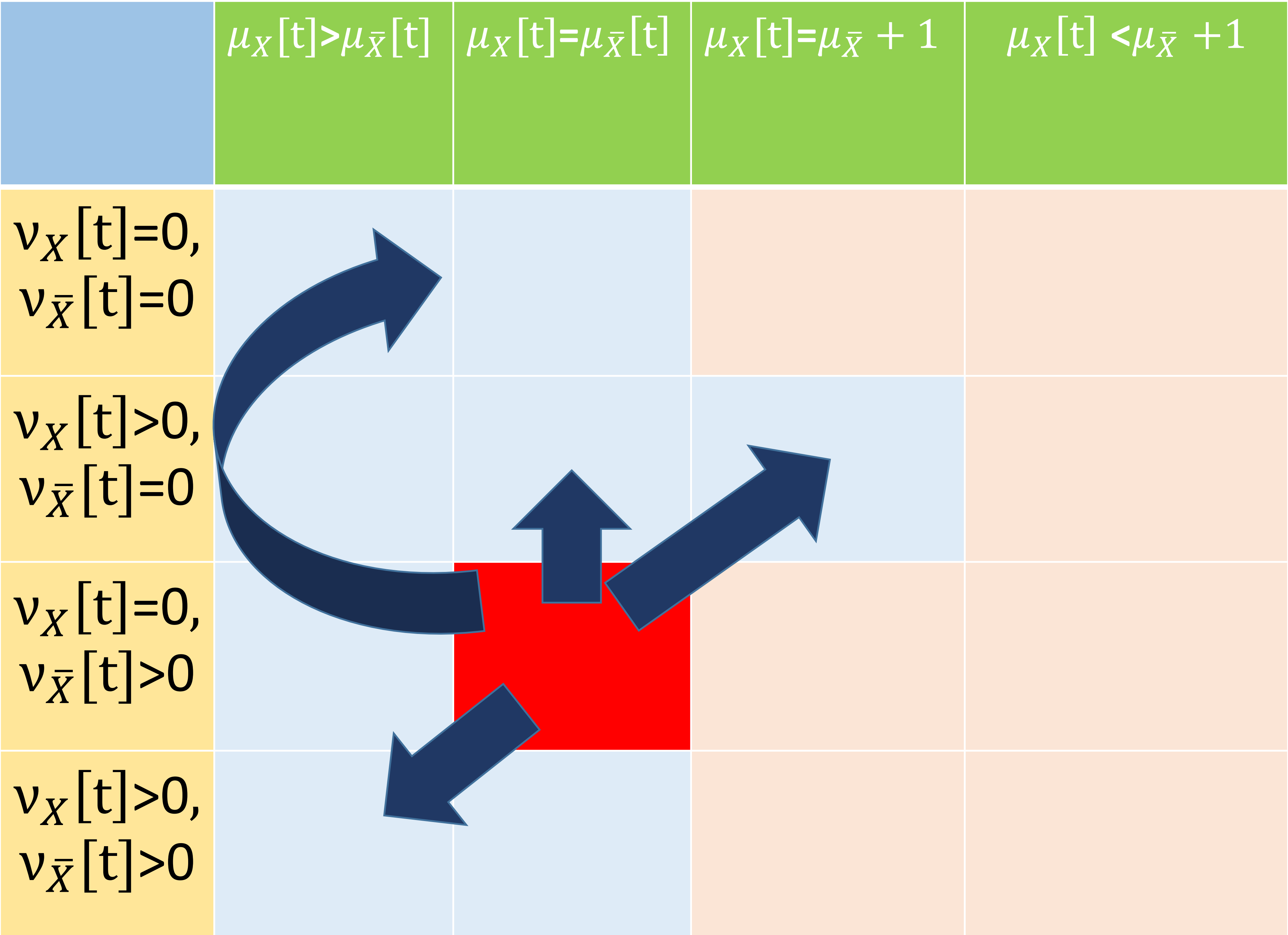
手番でない状態で

手番でないプレイヤー必勝である場面

にしか推移しない.

→その局面において必勝.

	$\mu_X[t] > \mu_{\bar{X}}[t]$	$\mu_X[t] = \mu_{\bar{X}}[t]$	$\mu_X[t] = \mu_{\bar{X}} + 1$	$\mu_X[t] < \mu_{\bar{X}} + 1$
$\nu_X[t]=0$, $\nu_{\bar{X}}[t]=0$				
$\nu_X[t]>0$, $\nu_{\bar{X}}[t]=0$				
$\nu_X[t]=0$, $\nu_{\bar{X}}[t]>0$				
$\nu_X[t]>0$, $\nu_{\bar{X}}[t]>0$				


$\mu_X[t] > \mu_{\bar{X}}[t]$
$\mu_X[t] = \mu_{\bar{X}}[t]$
$\mu_X[t] = \mu_{\bar{X}} + 1$
$\mu_X[t] < \mu_{\bar{X}} + 1$
$\nu_X[t]=0$, $\nu_{\bar{X}}[t]=0$
$\nu_X[t]>0$, $\nu_{\bar{X}}[t]=0$
$\nu_X[t]=0$, $\nu_{\bar{X}}[t]>0$
$\nu_X[t]>0$, $\nu_{\bar{X}}[t]>0$

	$\mu_X[t]>\mu_{\bar{X}}[t]$	$\mu_X[t]=\mu_{\bar{X}}[t]$	$\mu_X[t]=\mu_{\bar{X}}+1$	$\mu_X[t]<\mu_{\bar{X}}+1$
$\nu_X[t]=0$, $\nu_{\bar{X}}[t]=0$				
$\nu_X[t]>0$, $\nu_{\bar{X}}[t]=0$				
$\nu_X[t]=0$, $\nu_{\bar{X}}[t]>0$				
$\nu_X[t]>0$, $\nu_{\bar{X}}[t]>0$				

今日の流れ

1. 大貧民と単貧民
2. 単貧民における必勝手順
3. 本研究
4. 今後の展望

まとめと今後の展望

本研究では, 二人単貧民の必勝プレイヤー判定とその必勝戦略導出を扱い, ソート後O(n)時間で必勝判定可能であることを示した.

今後はより大貧民に近づけたゲーム（半順序構造に拡張した単貧民、複数枚同時出しを認める単貧民、）において必勝プレイヤーを求めるアルゴリズムを構築していく.