

手数が少ない場合における グリッド上のボロノイゲームの解析

神戸大学工学部電気電子工学科

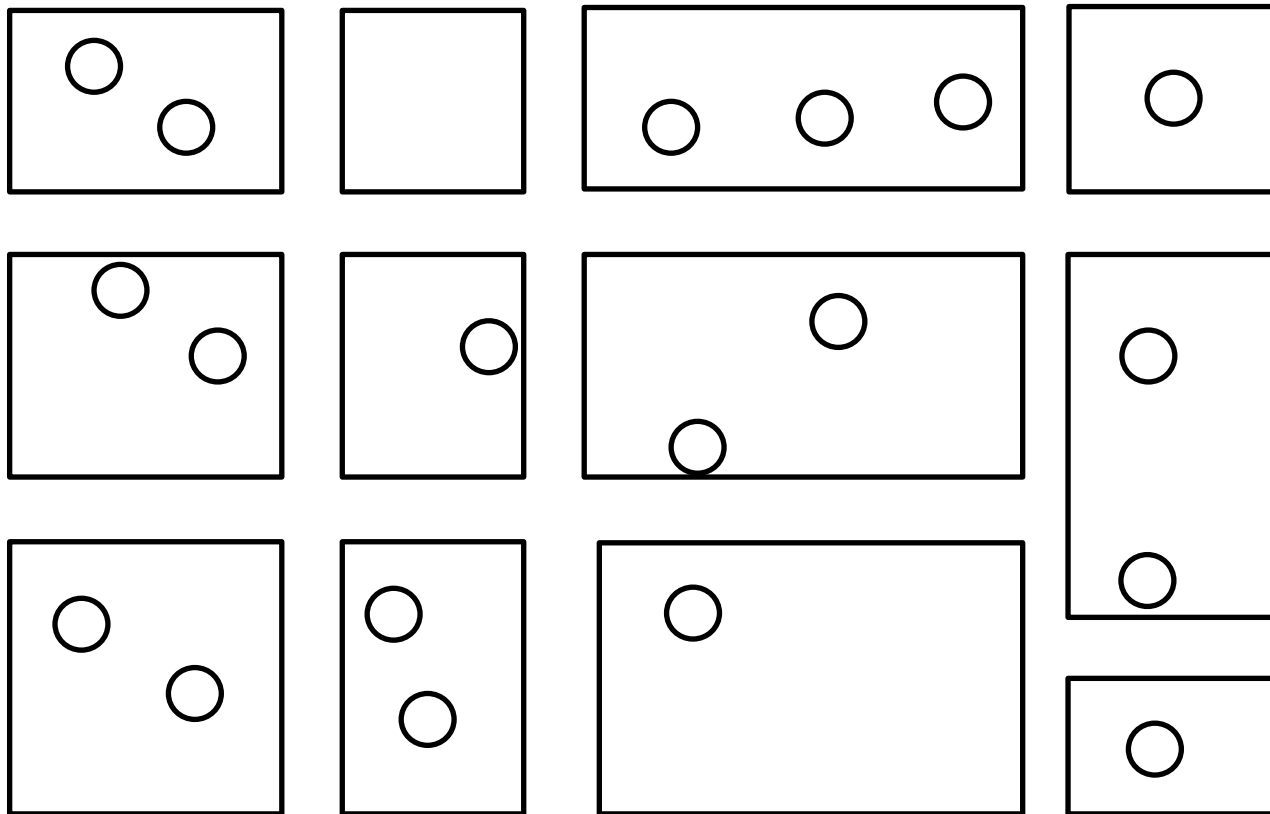
杉本晃弘 斎藤寿樹

山口一章 増田澄男

研究内容

店舗出店シュミレーション

↓地図



○ : 民家

研究内容

コンビニのL店とS店が交互に出店する。



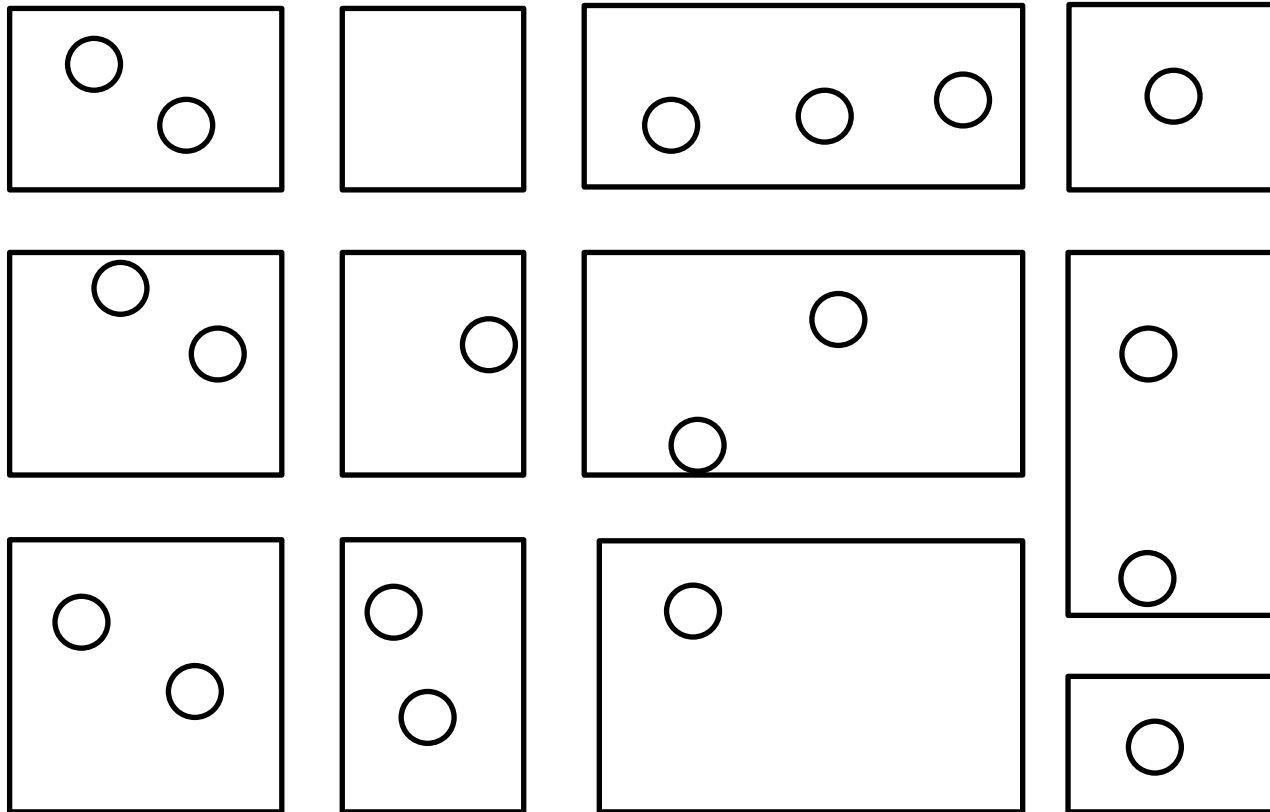
○ : 民家



: L店



: S店



研究内容

コンビニのL店とS店が交互に出店する。



先手必勝!



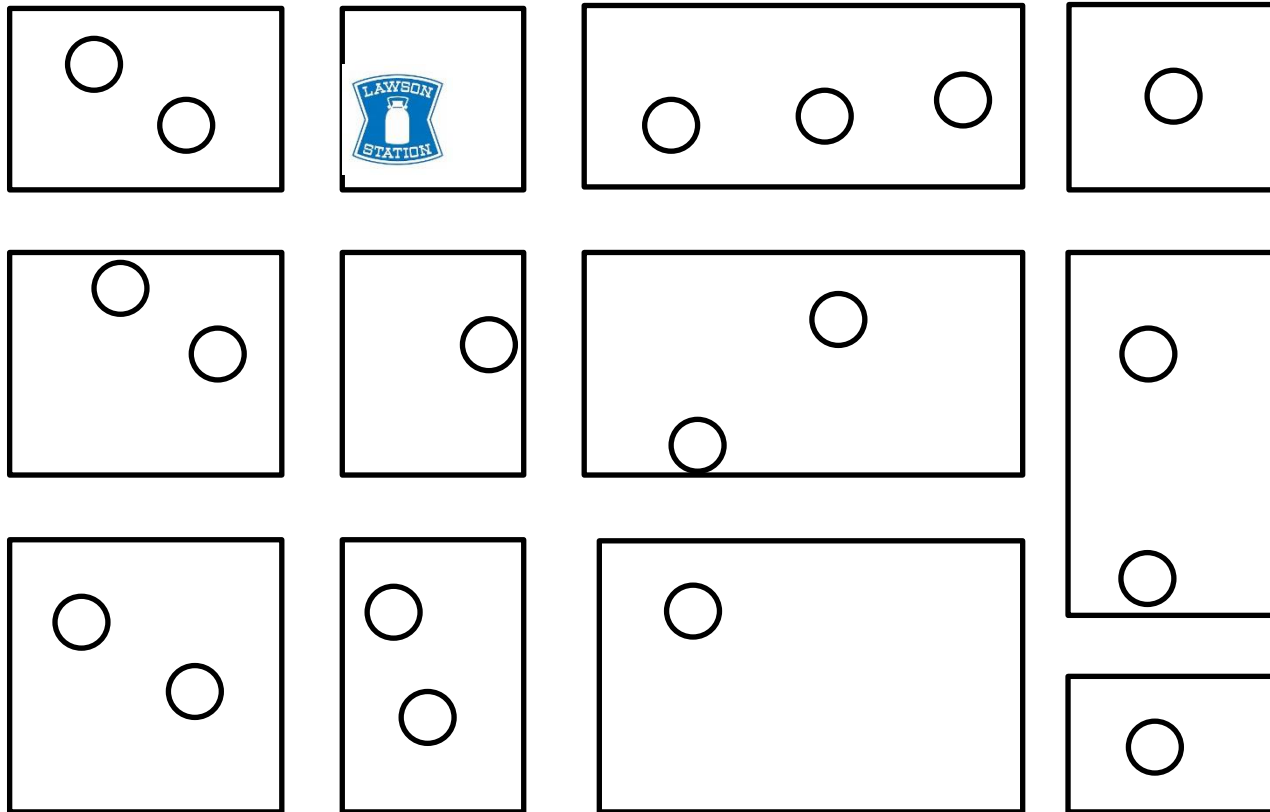
○ : 民家



: L店



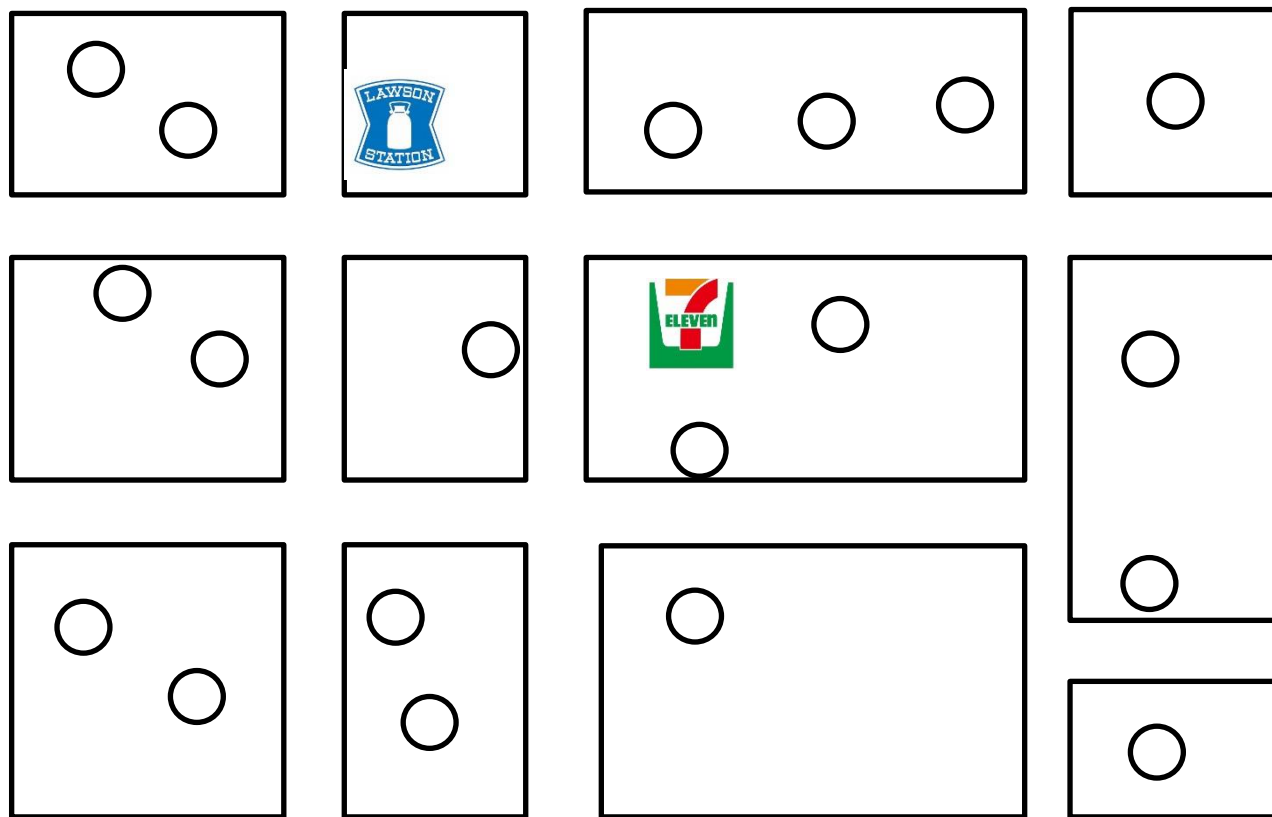
: S店



研究内容

次は俺の番

コンビニのL店とS店が交互に出店する。



○ : 民家

 : L店

 : S店

研究内容

コンビニのL店とS店が交互に出店する。



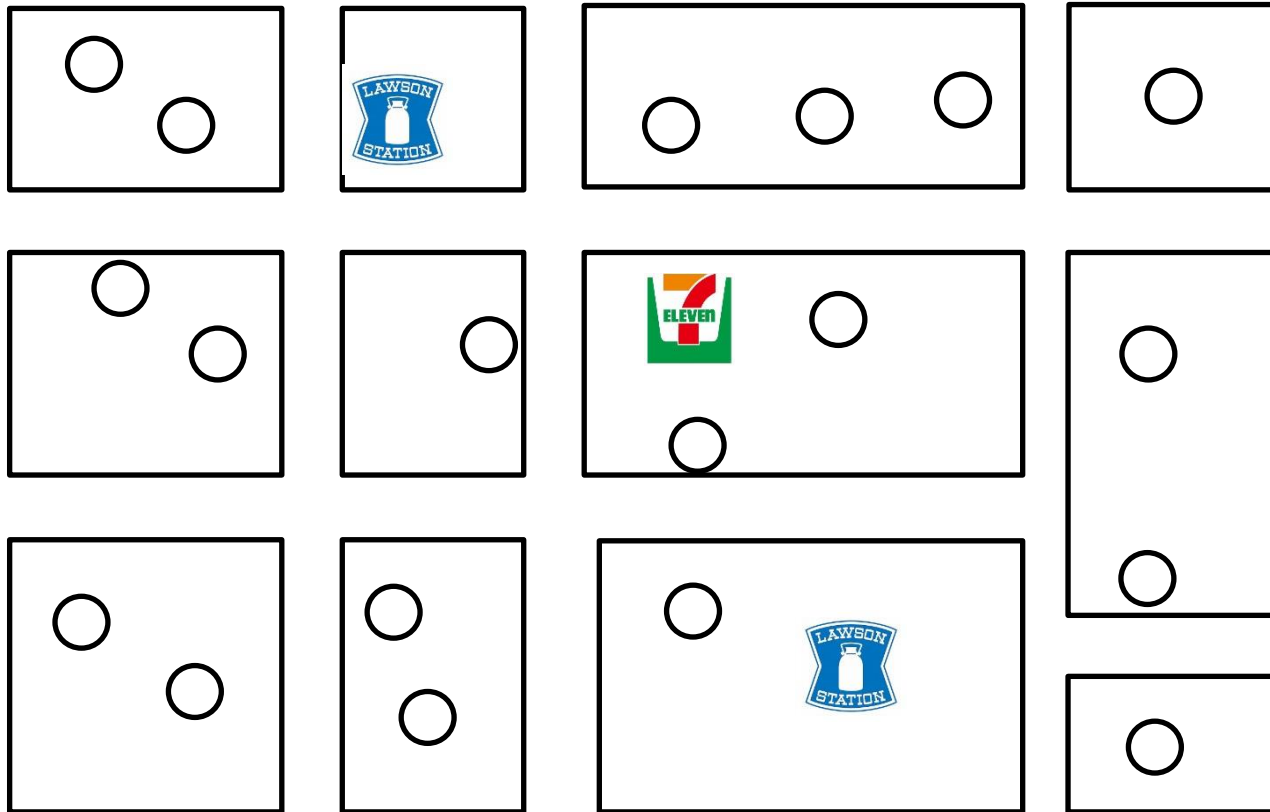
○ : 民家



: L店



: S店

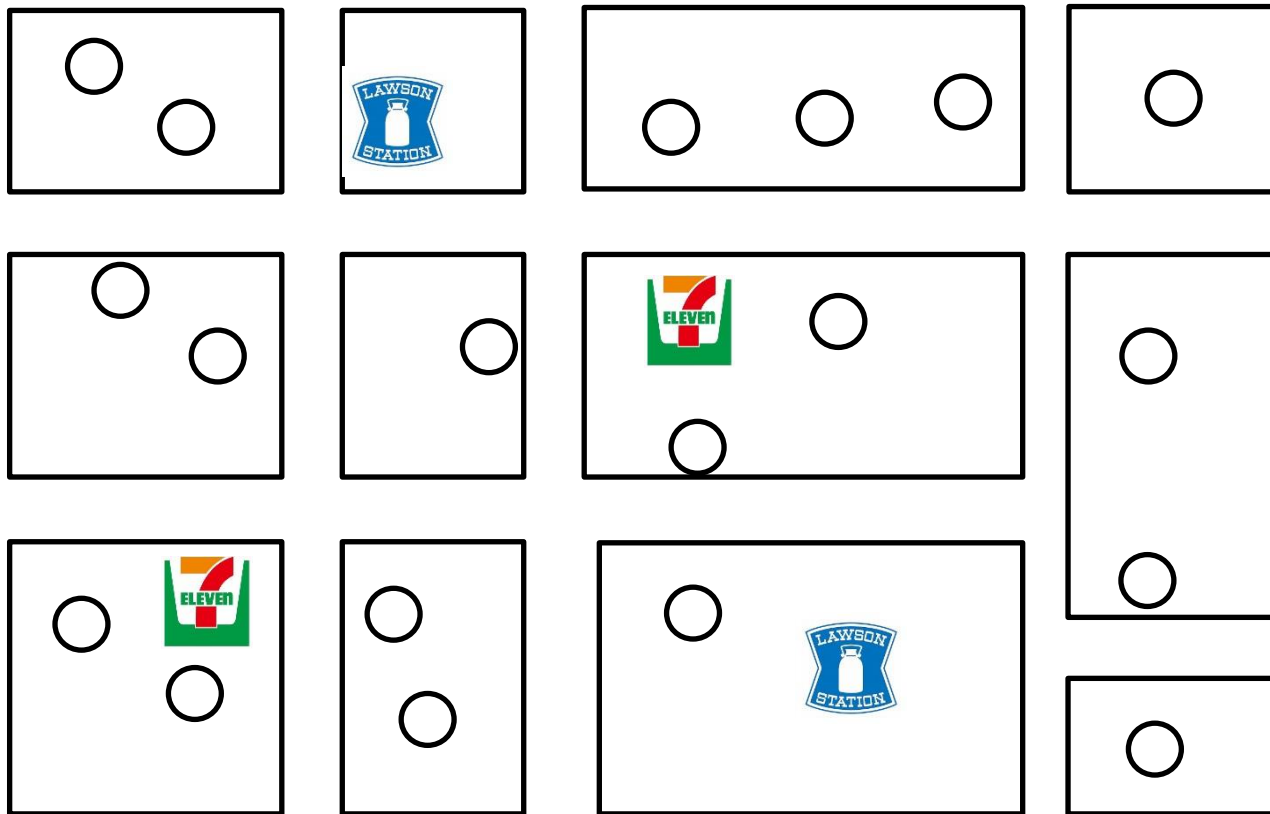


研究内容

コンビニのL店とS店が交互に出店する。



○ : 民家



研究内容

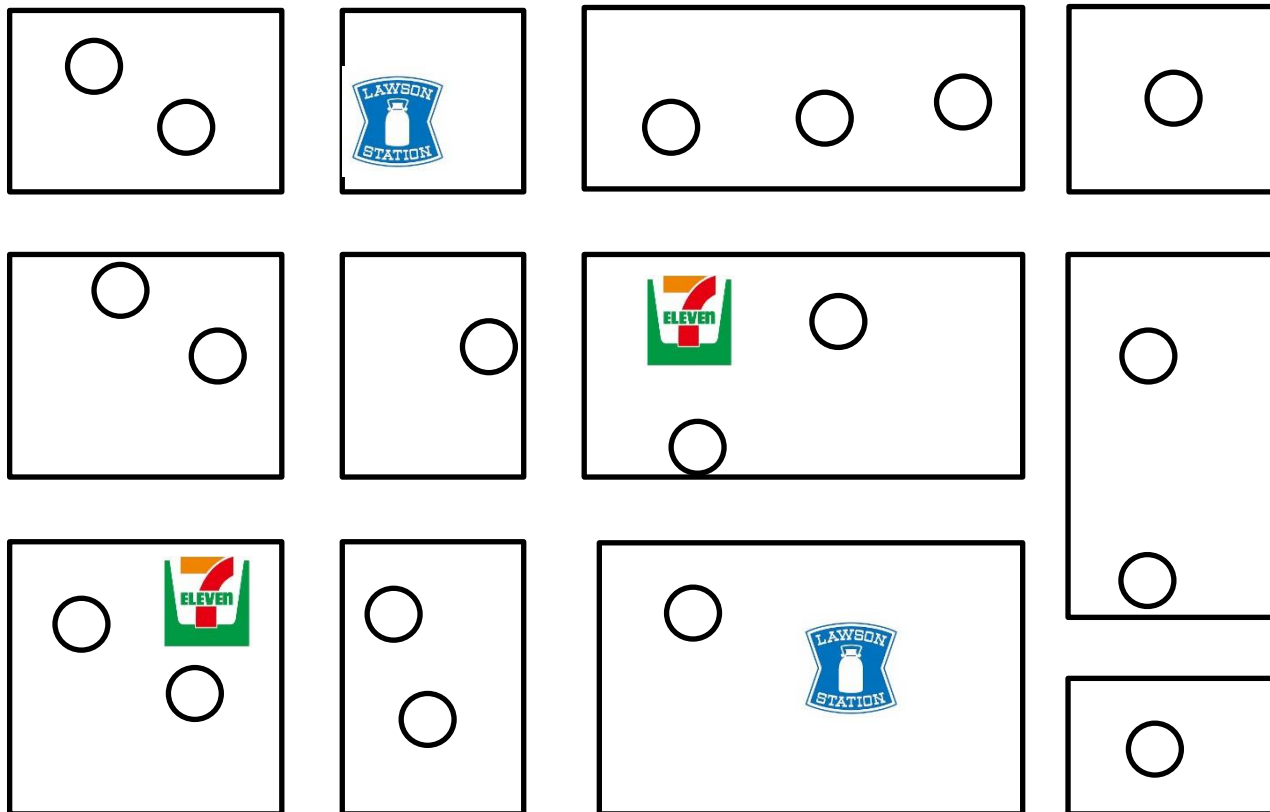
より多くの客を呼ぶことを考えると・・・？



○ : 民家

 : L店

 : S店



研究内容

距離の近い民家が多い方が有利！

ククク・・・俺の勝ちだな



何だと！？



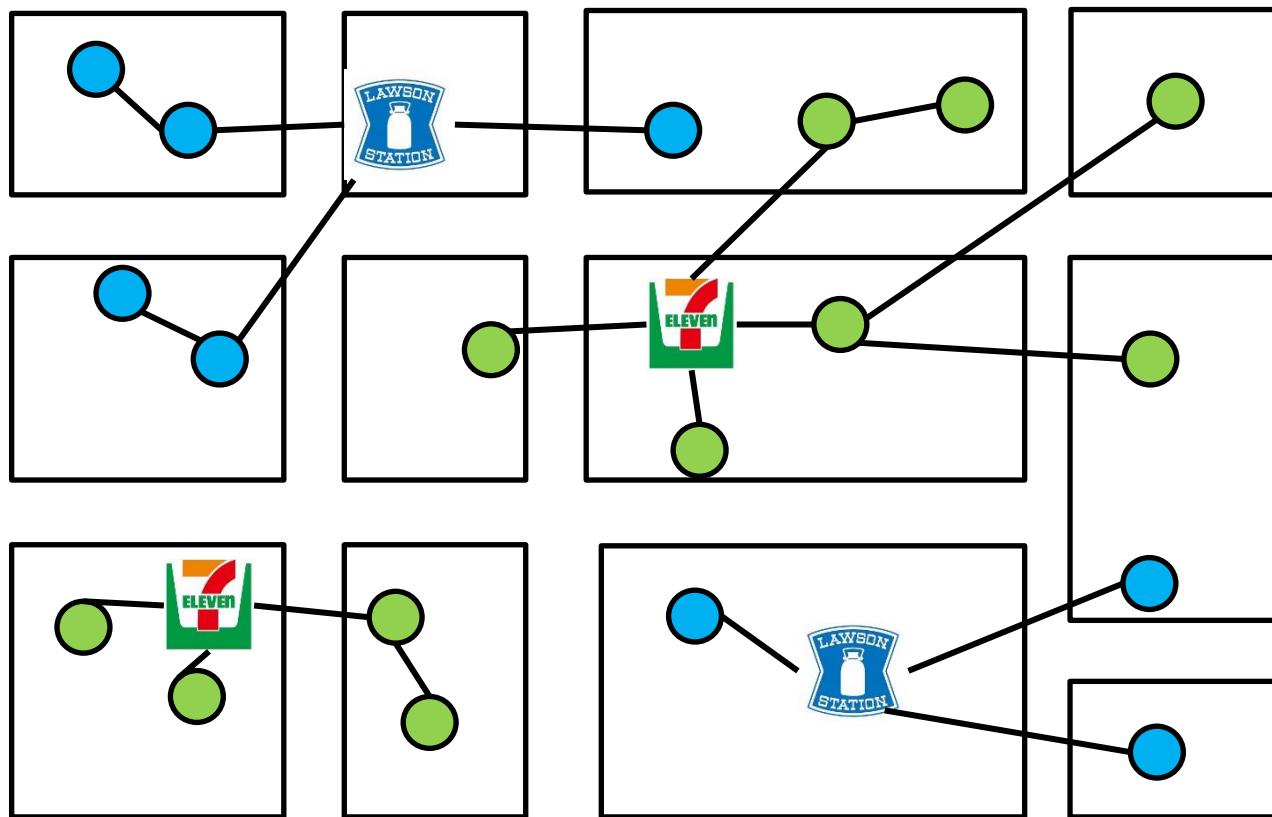
○：民家



：L店



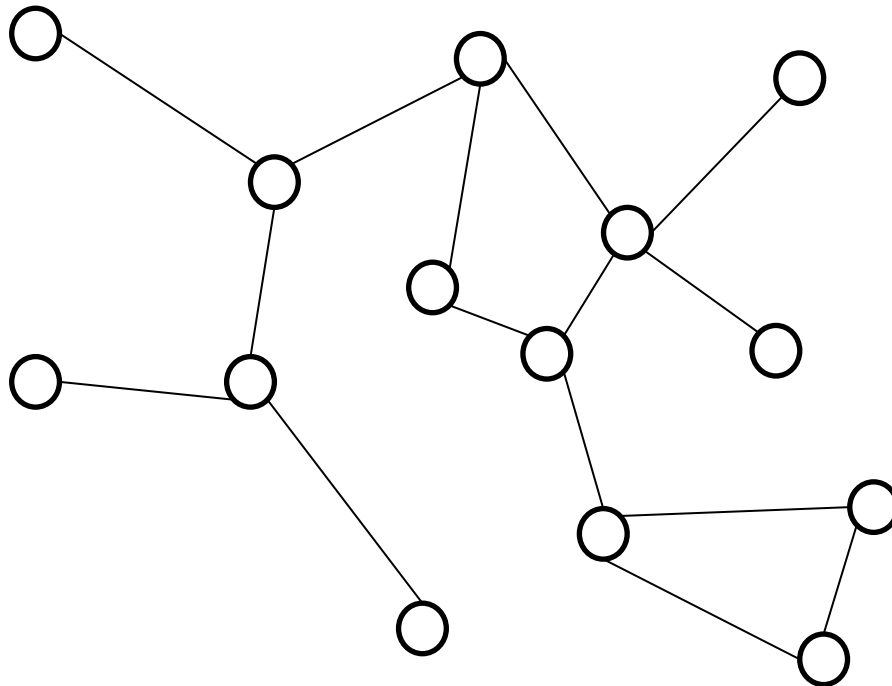
：S店



グラフ上のボロノイゲーム

プレイヤー二人で行う陣取りゲーム。

無向グラフの頂点を陣地とみなし、先手と後手で陣地の数を競う



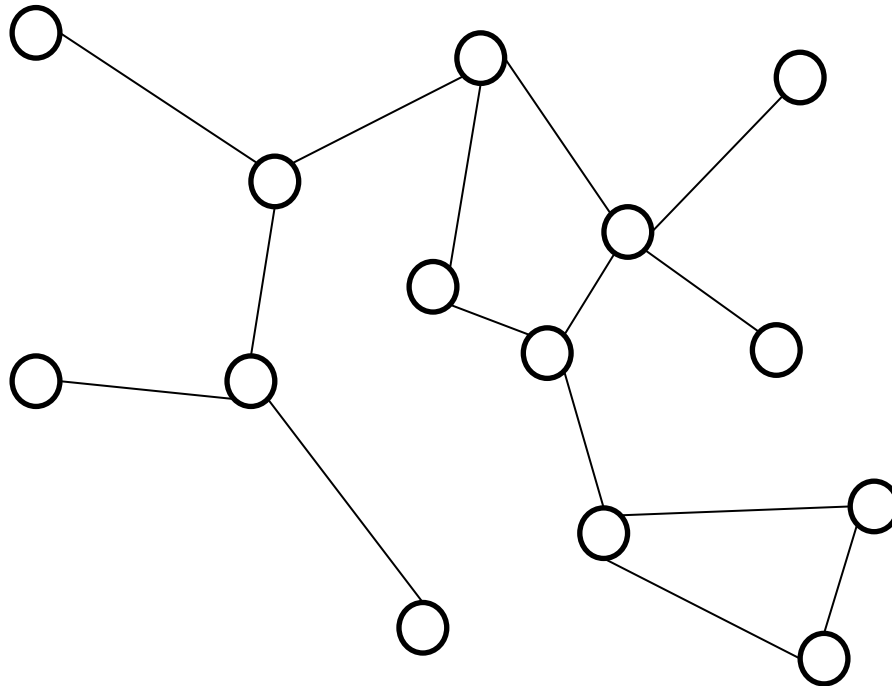
入力:

無向グラフ G

手数(店舗数) k

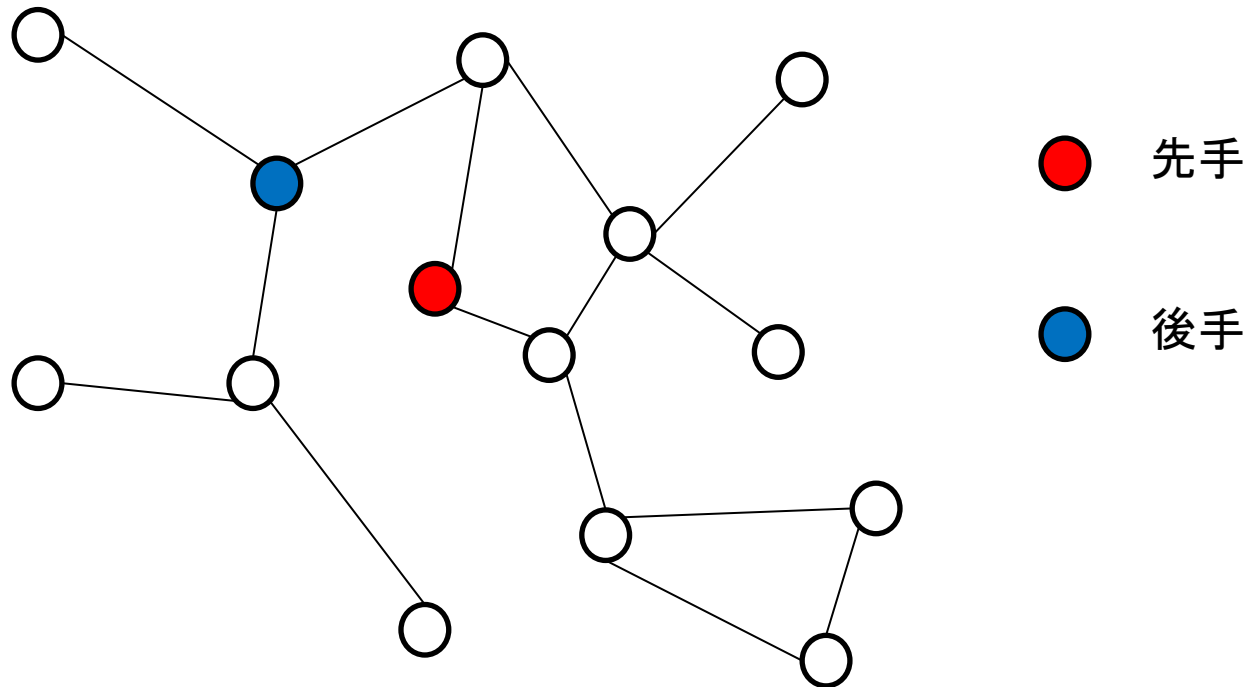
グラフ上のボロノイゲーム

- 1.先手と後手が交互に一つずつ陣地を選ぶ
- 2.これを手数 k 回だけ繰り返す(下の例は $k=2$ の場合)
- 3.残りの頂点については、最も距離が近い方の陣地とする
- 4.陣地の数が多い方が勝ち



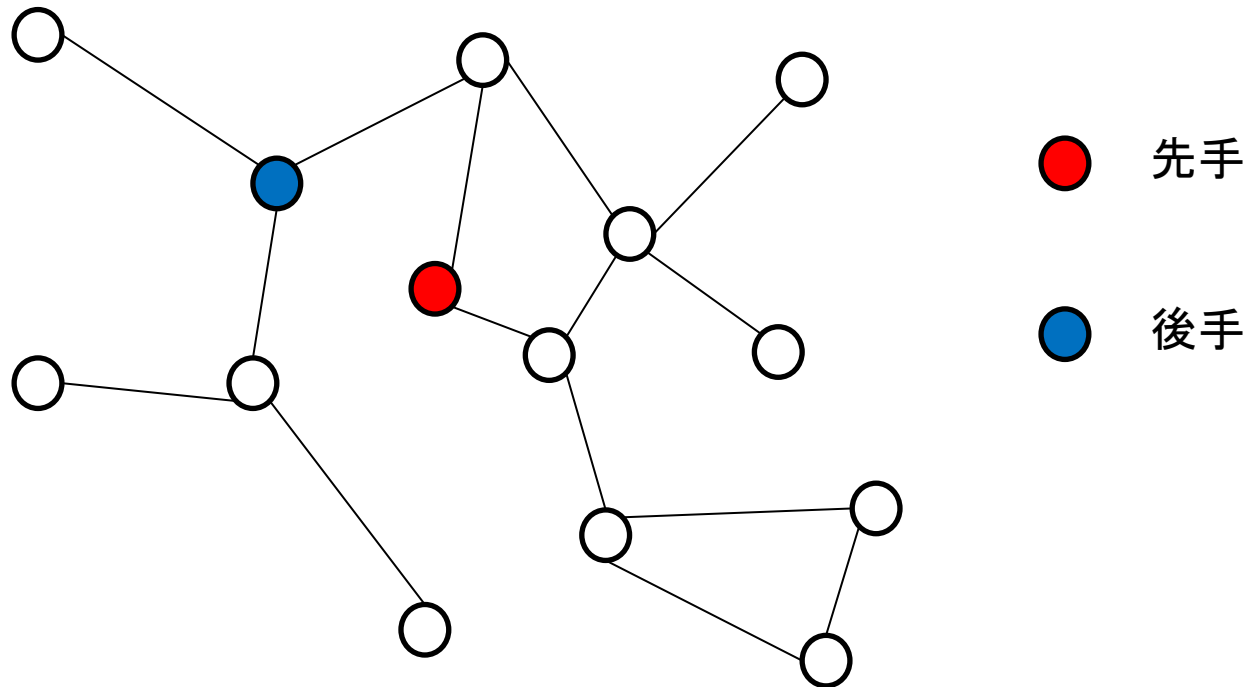
グラフ上のボロノイゲーム

- 1.先手と後手が交互に一つずつ陣地を選ぶ
- 2.これを手数 k 回だけ繰り返す(下の例は $k=2$ の場合)
- 3.残りの頂点については、最も距離が近い方の陣地とする
- 4.陣地の数が多い方が勝ち



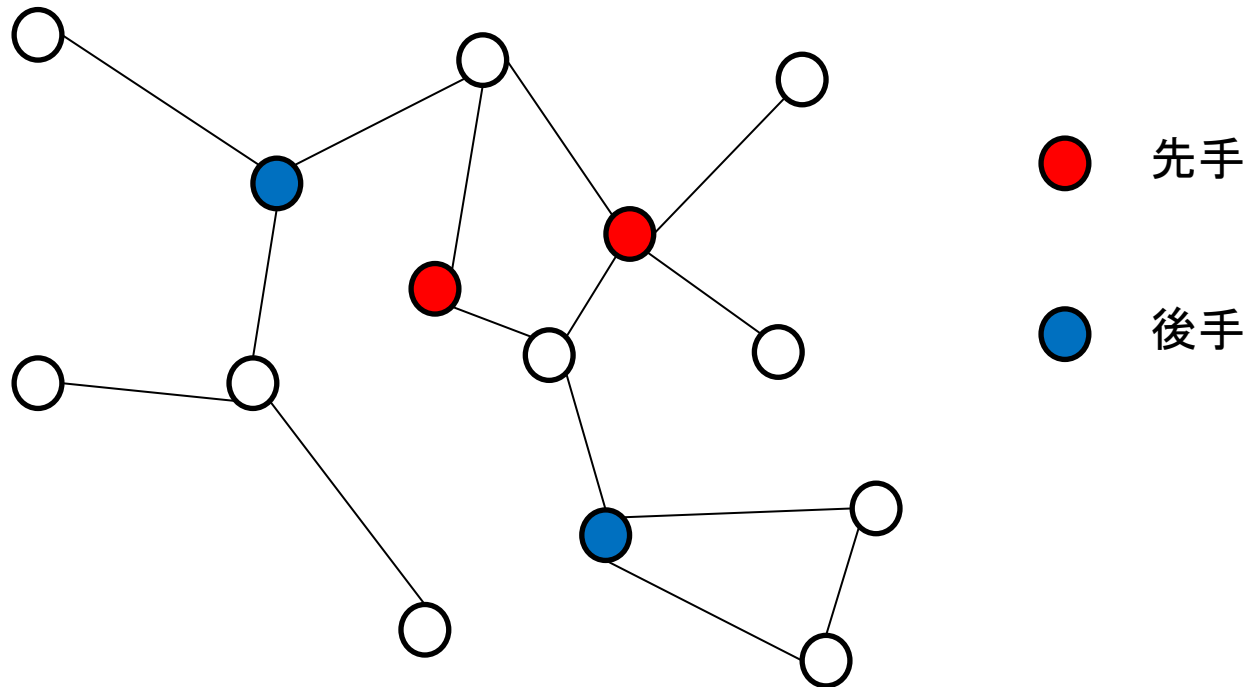
グラフ上のボロノイゲーム

1. 先手と後手が交互に一つずつ陣地を選ぶ
2. これを手数 k 回だけ繰り返す(下の例は $k=2$ の場合)
3. 残りの頂点については、最も距離が近い方の陣地とする
4. 陣地の数が多い方が勝ち



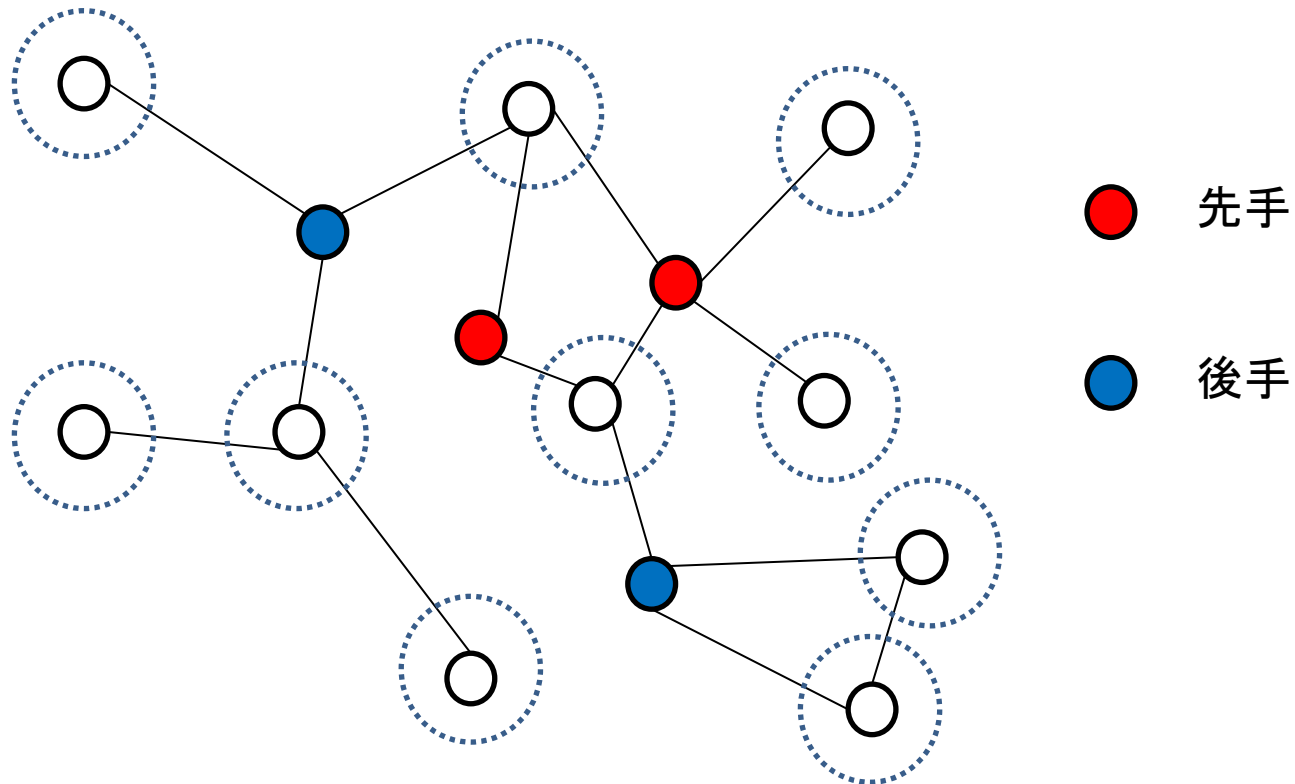
グラフ上のボロノイゲーム

1. 先手と後手が交互に一つずつ陣地を選ぶ
2. これを手数 k 回だけ繰り返す(下の例は $k=2$ の場合)
3. 残りの頂点については、最も距離が近い方の陣地とする
4. 陣地の数が多い方が勝ち



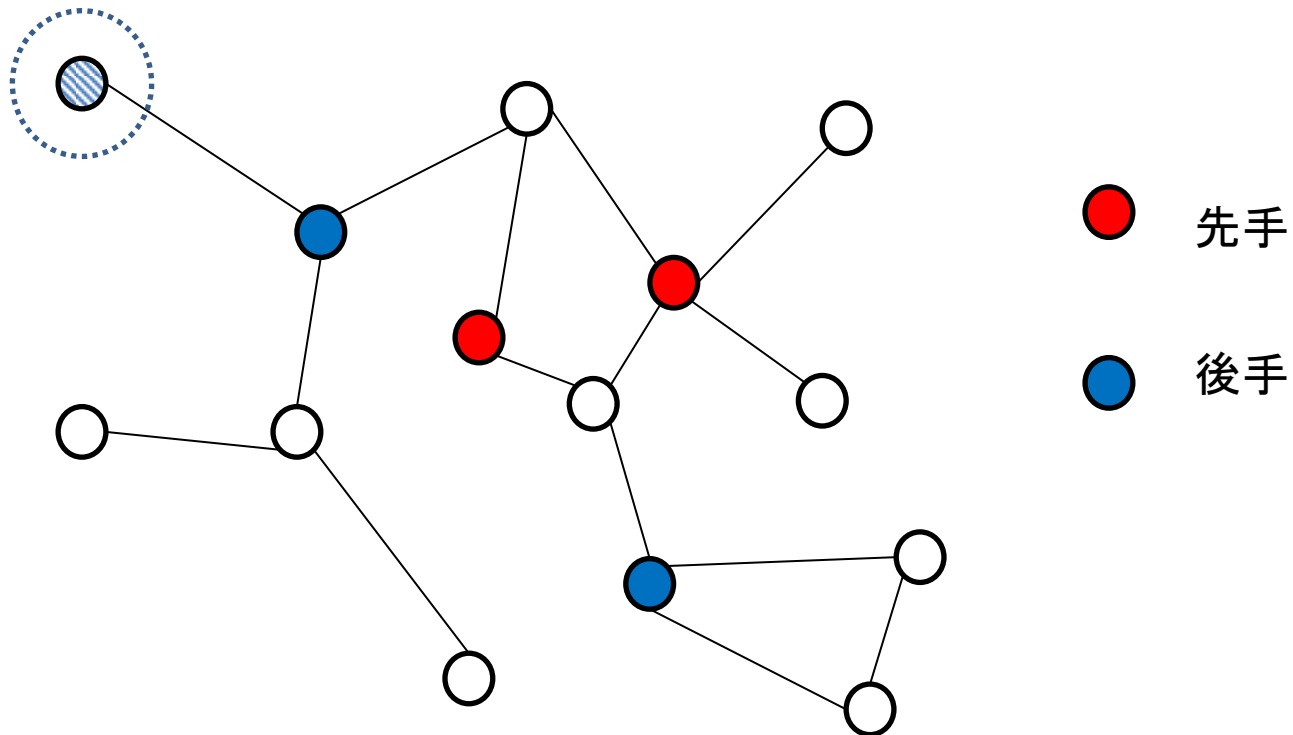
グラフ上のボロノイゲーム

1. 先手と後手が交互に一つずつ陣地を選ぶ
2. これを手数 k 回だけ繰り返す(下の例は $k=2$ の場合)
3. 残りの頂点については、最も距離が近い方の陣地とする
4. 陣地の数が多い方が勝ち



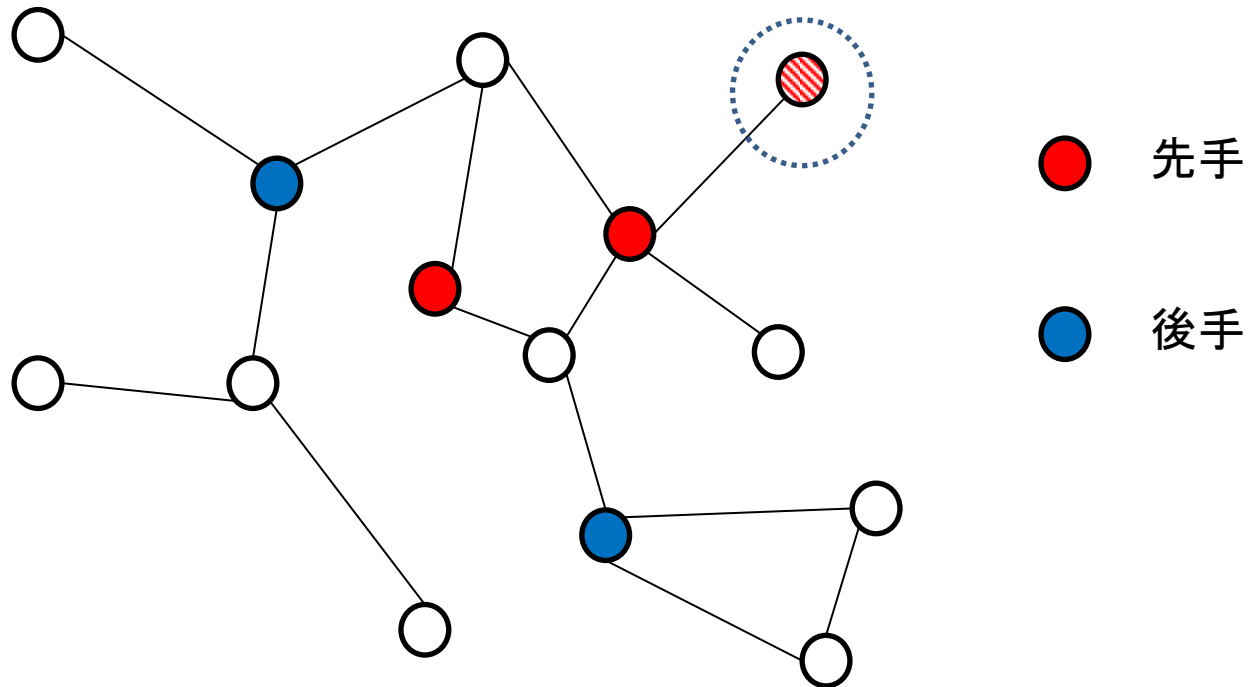
グラフ上のボロノイゲーム

1. 先手と後手が交互に一つずつ陣地を選ぶ
2. これを手数 k 回だけ繰り返す(下の例は $k=2$ の場合)
3. 残りの頂点については、最も距離が近い方の陣地とする
4. 陣地の数が多い方が勝ち



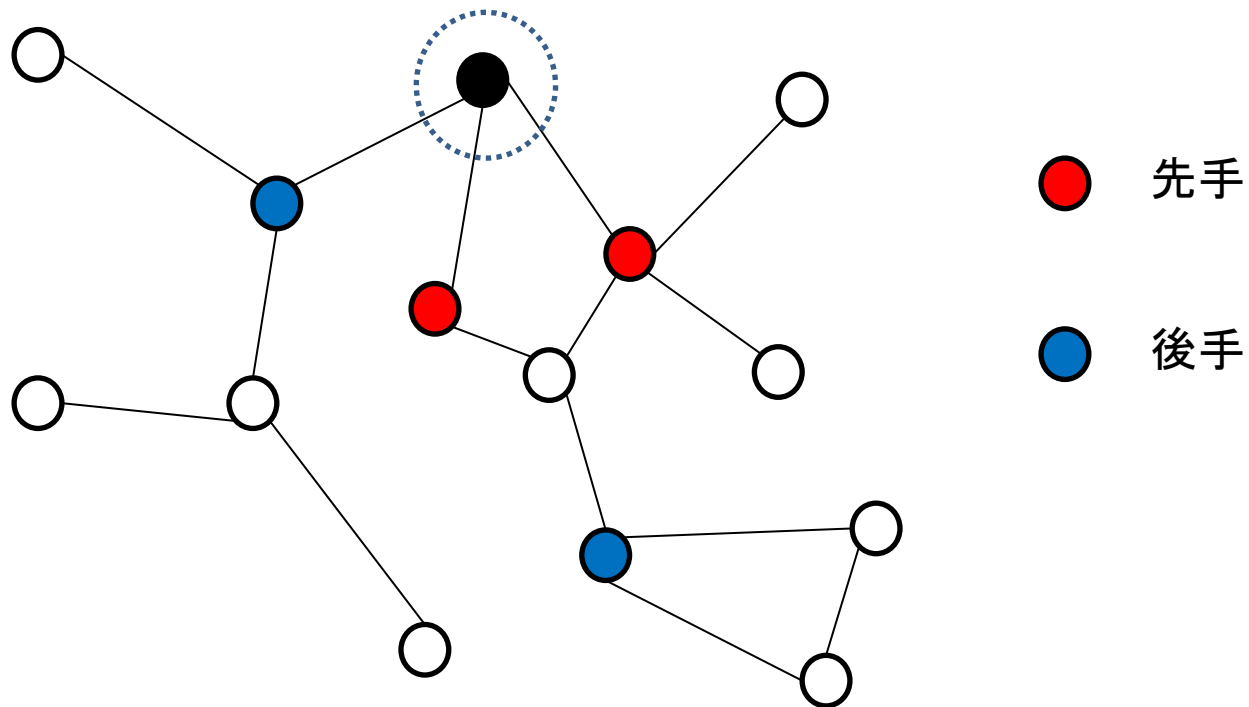
グラフ上のボロノイゲーム

1. 先手と後手が交互に一つずつ陣地を選ぶ
2. これを手数 k 回だけ繰り返す(下の例は $k=2$ の場合)
3. 残りの頂点については、最も距離が近い方の陣地とする
4. 陣地の数が多い方が勝ち



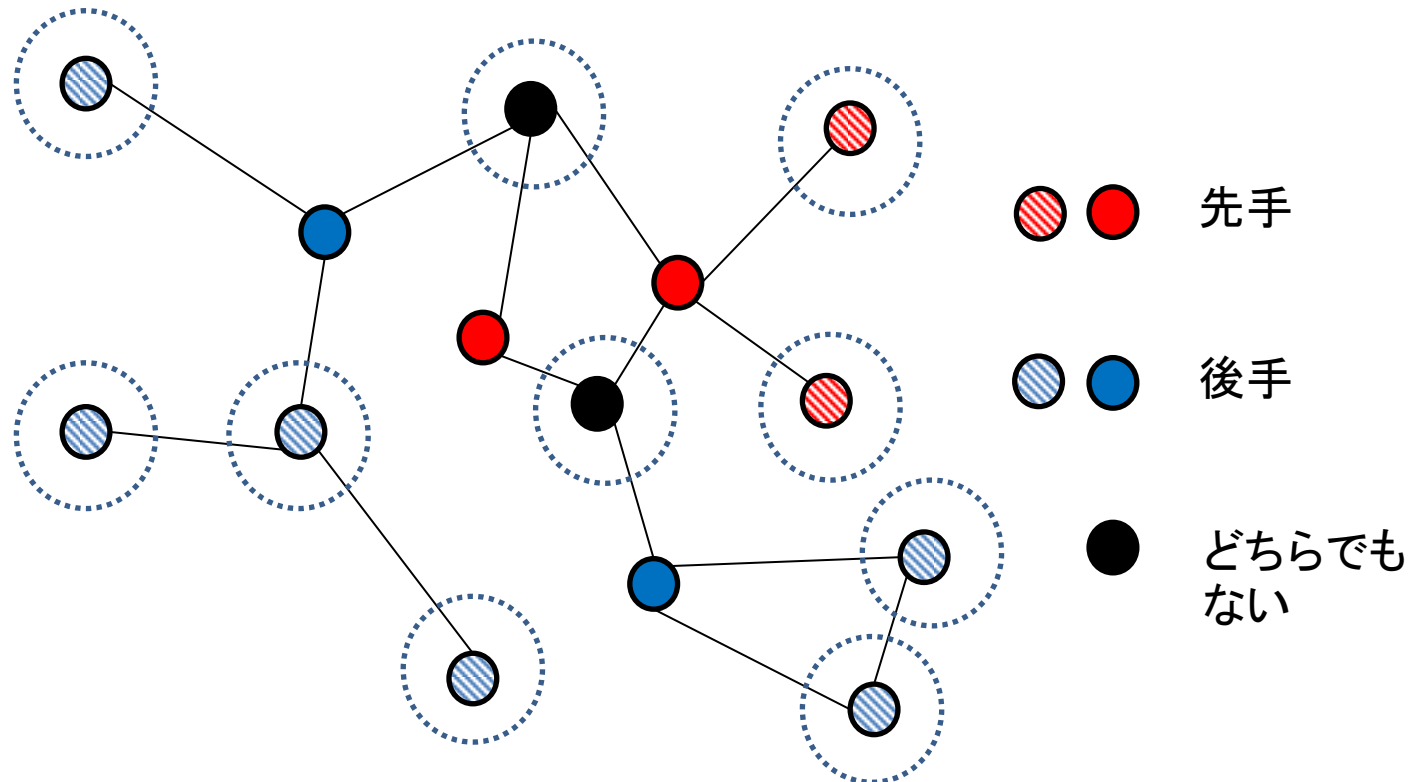
グラフ上のボロノイゲームとは？

1. 先手と後手が交互に一つずつ陣地を選ぶ
2. これを手数 k 回だけ繰り返す(下の例は $k=2$ の場合)
3. 残りの頂点については、最も距離が近い方の陣地とする
4. 陣地の数が多い方が勝ち



グラフ上のボロノイゲーム

1. 先手と後手が交互に一つずつ陣地を選ぶ
2. これを手数 k 回だけ繰り返す(下の例は $k=2$ の場合)
3. 残りの頂点については、最も距離が近い方の陣地とする
4. 陣地の数が多い方が勝ち



現在分かっていること

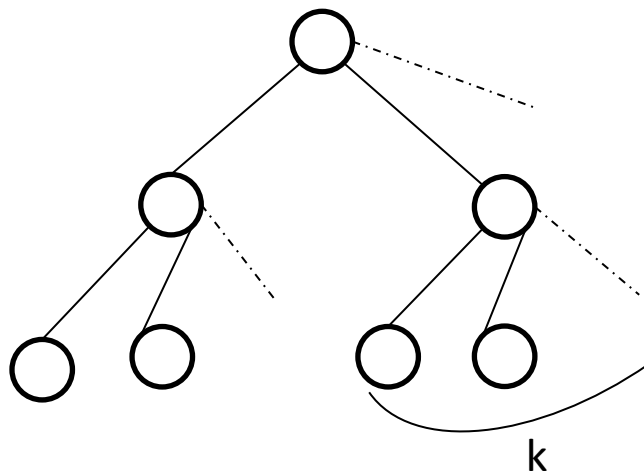
- パスの場合は自明なとき(下図)を除いて引き分け

[清見ら, 2010]



手数1で頂点数が奇数なら先に真ん中とったら勝ち！

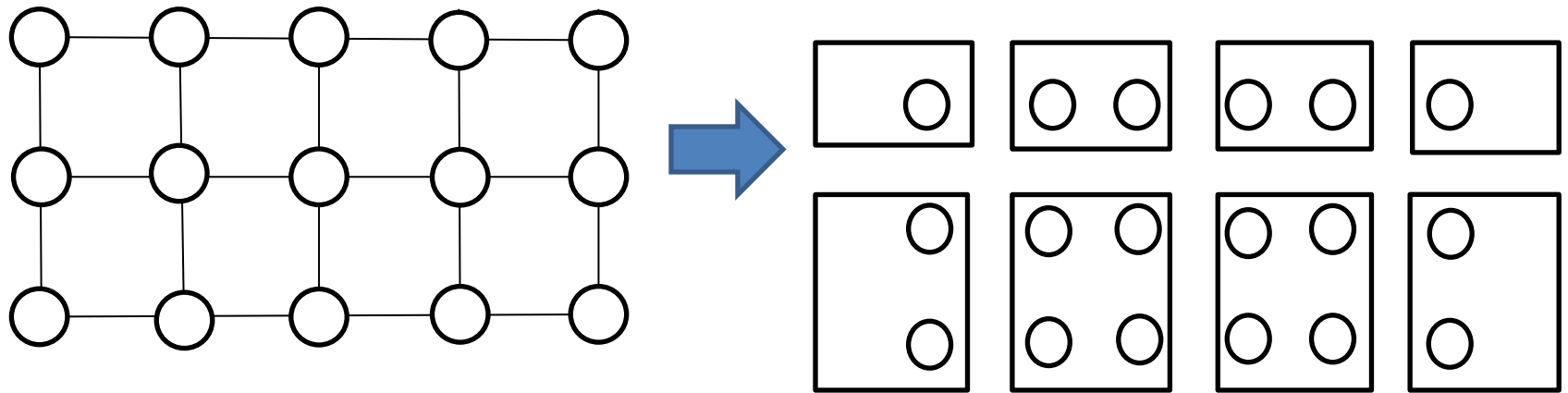
- 完全k分木の場合は先手有利 [寺本ら, 2006]



※互いが最善手を打つと仮定

本研究で扱うグラフ

グリッドはパスを一般化したものと考えることができる



パスや完全k分木よりもより現実的なモデルといえる

互いが最善手を打つ場合どうなるか？

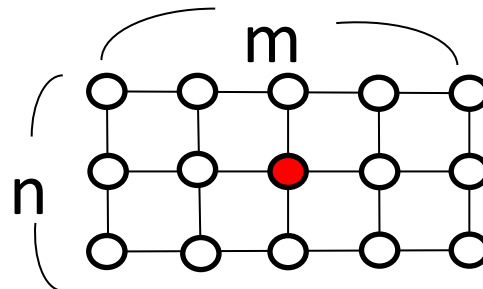
今回分かったこと

手数1の場合

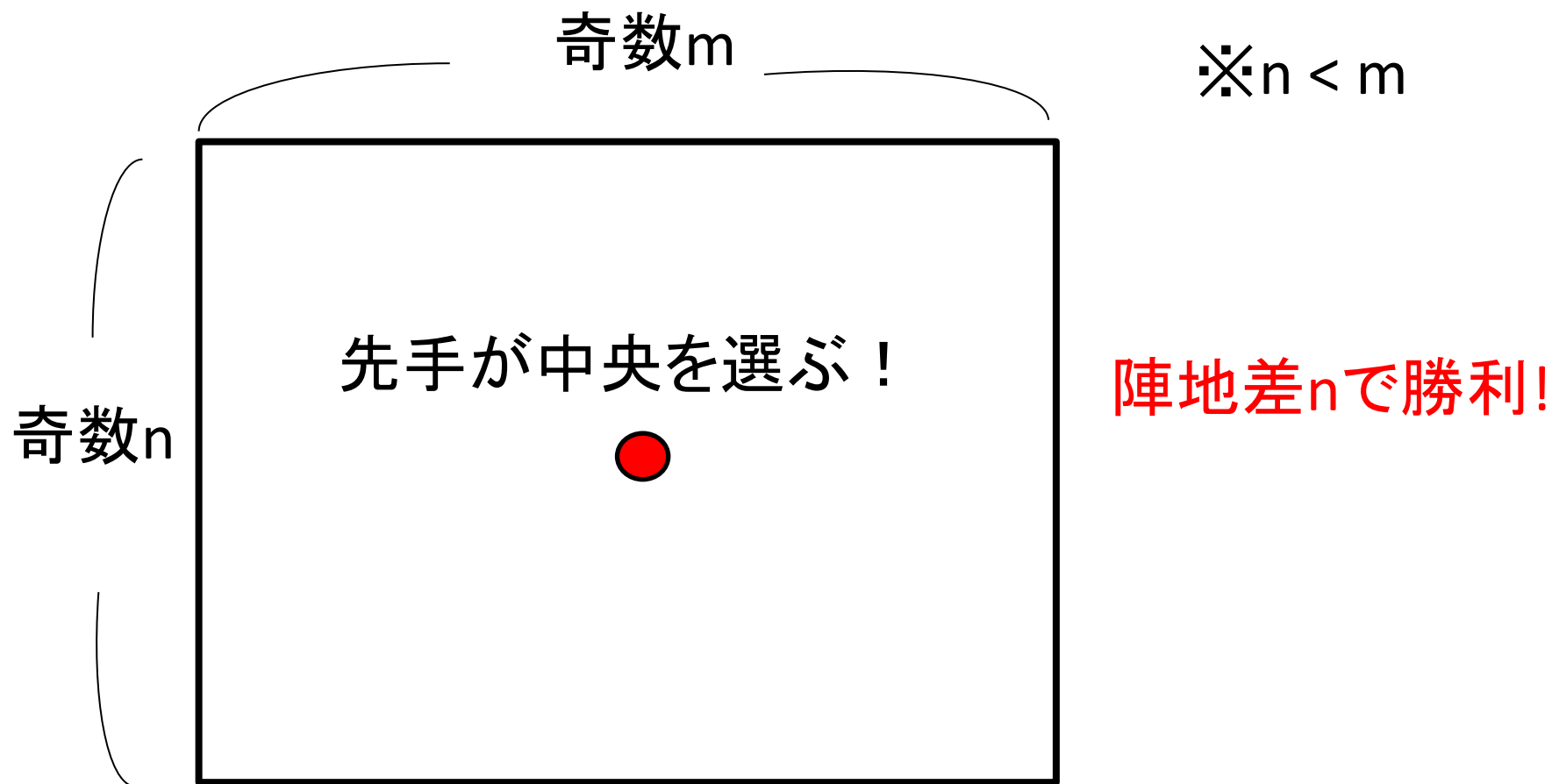
1. **奇数 × 奇数**のときは先手が中央の陣地を選ぶと陣地差 n で先手が勝利する
2. **奇数 × 偶数**または**偶数 × 偶数**のとき引き分け

手数2の場合

奇数 × 奇数のときに先手が1手目に中央の陣地を選ぶと先手が負ける

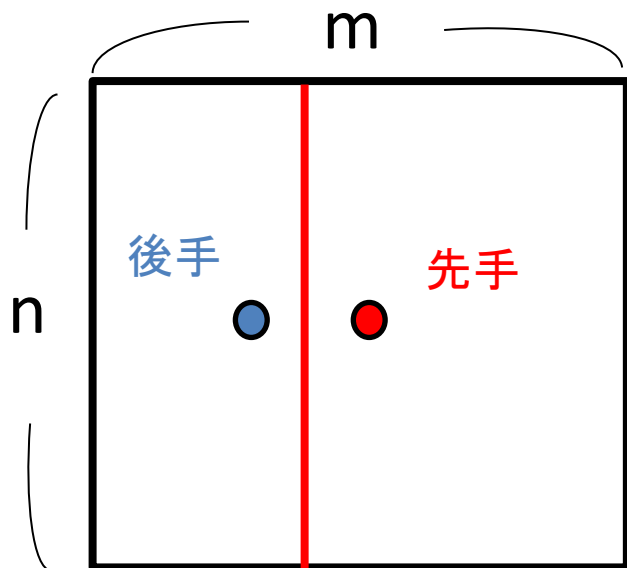


1.手数1,奇数×奇数のときは先手が勝利

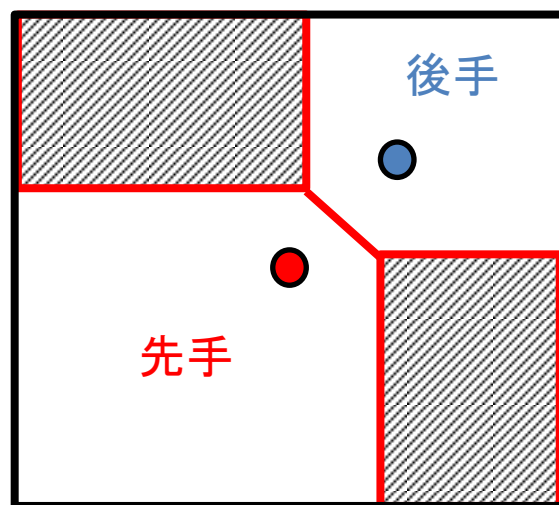


1.手数1,奇数×奇数のときは先手が勝利

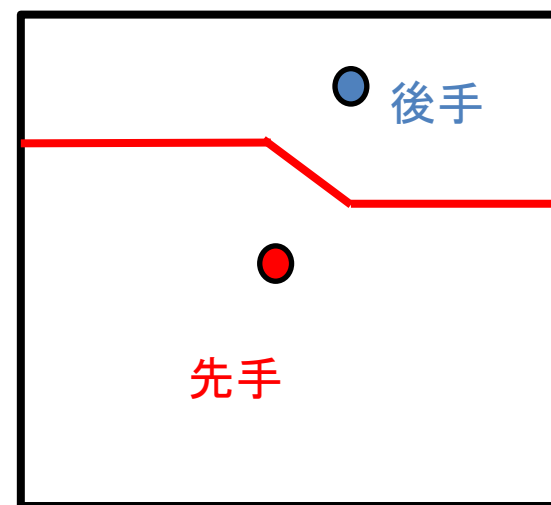
先手が中央を選んだ場合、陣地の境界線は3通り



1.直線

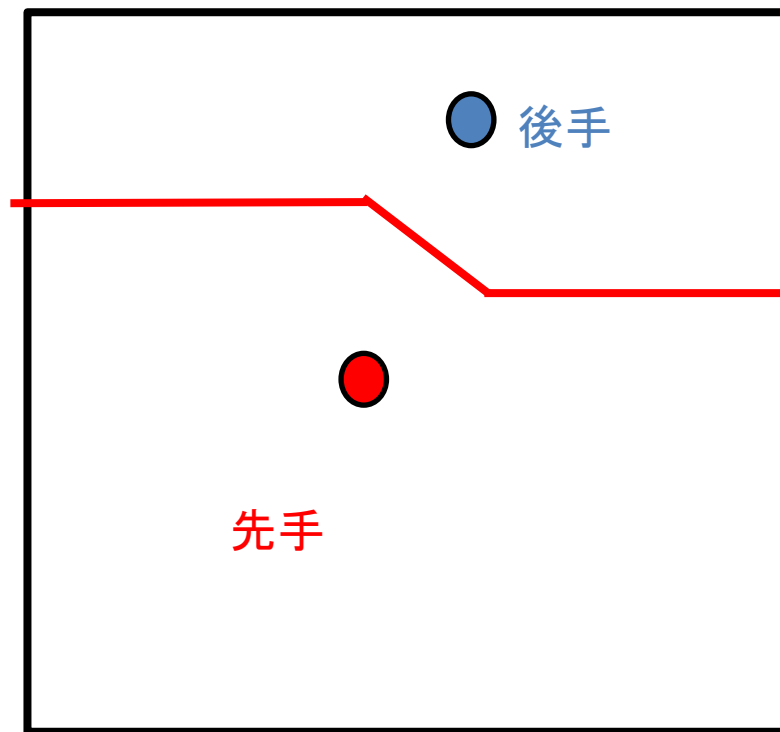
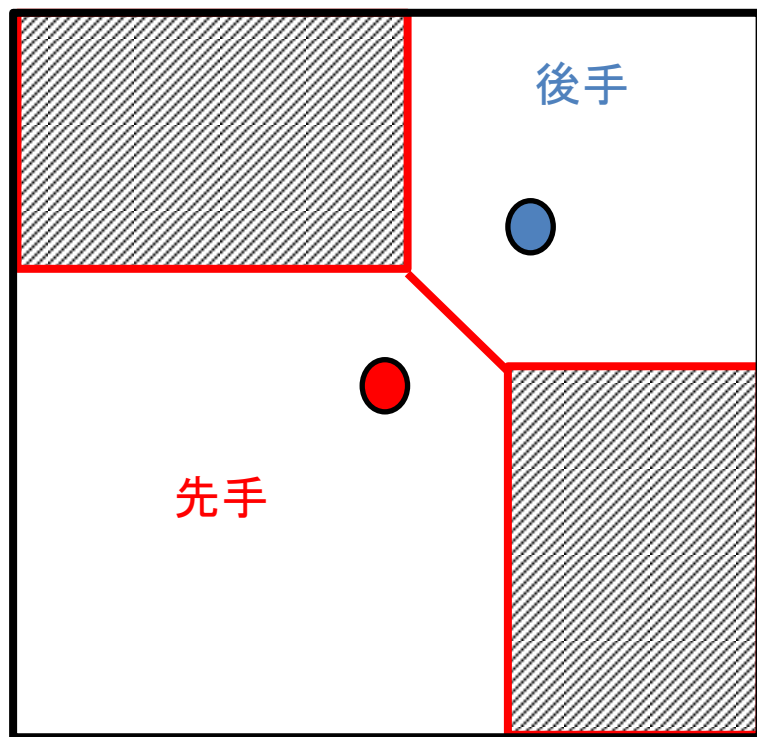


2.垂直二等分線と長方形



3.折れ線

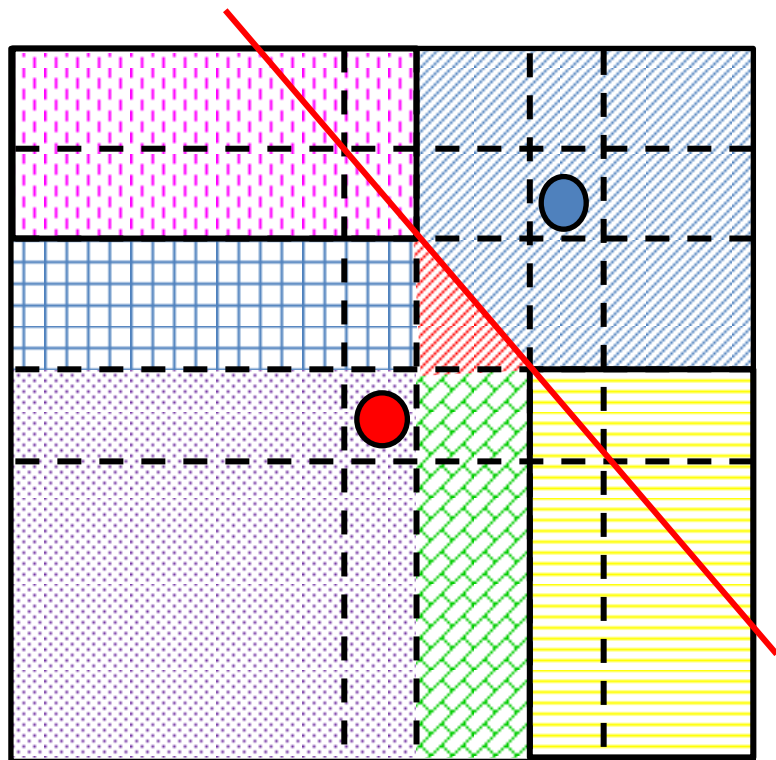
1.手数1,奇数×奇数のときは先手が勝利



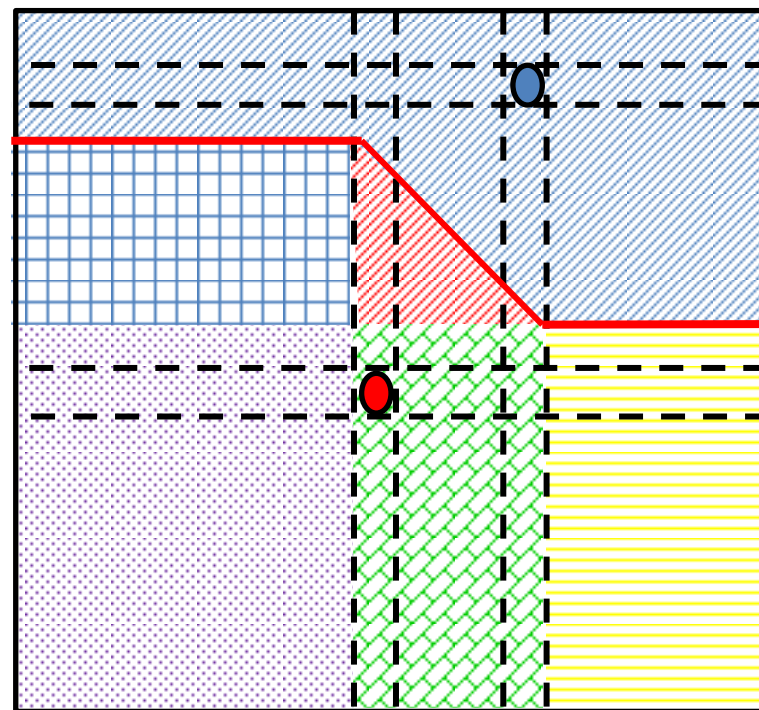
2.垂直二等分線と長方形

3.折れ線

1.手数1,奇数×奇数のときは先手が勝利

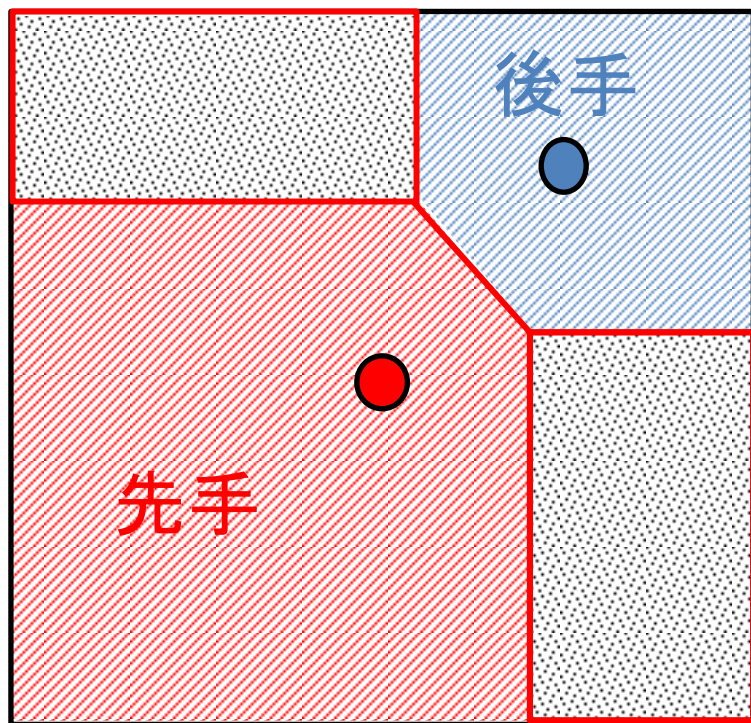


2.垂直二等分線と長方形

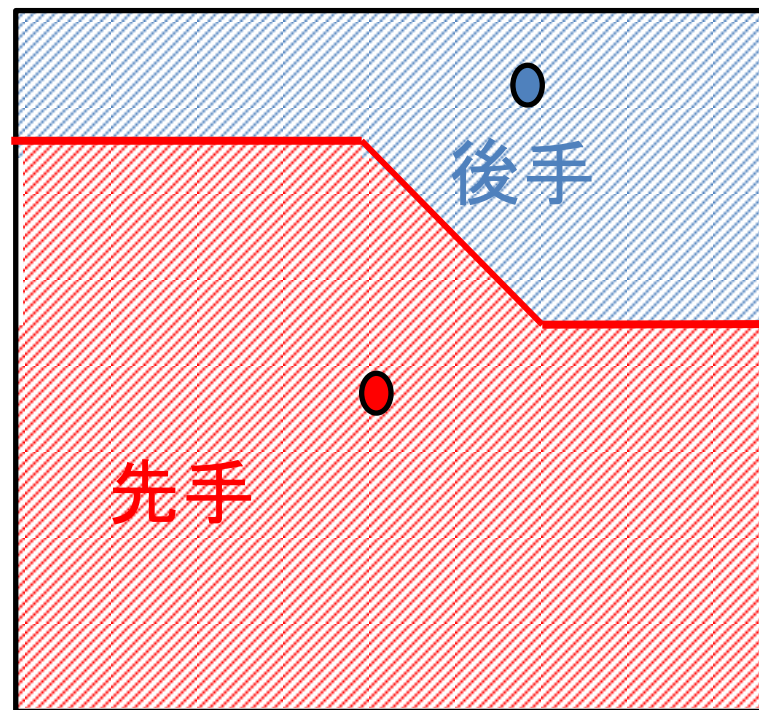


3.折れ線

1.手数1,奇数×奇数のときは先手が勝利

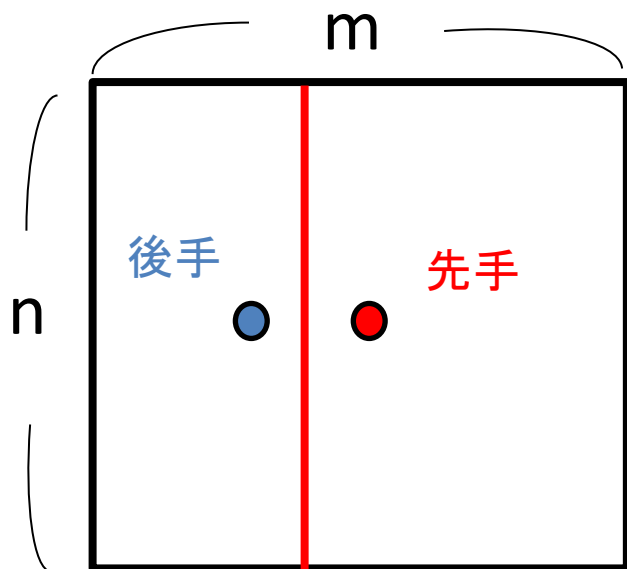


2.垂直二等分線と長方形

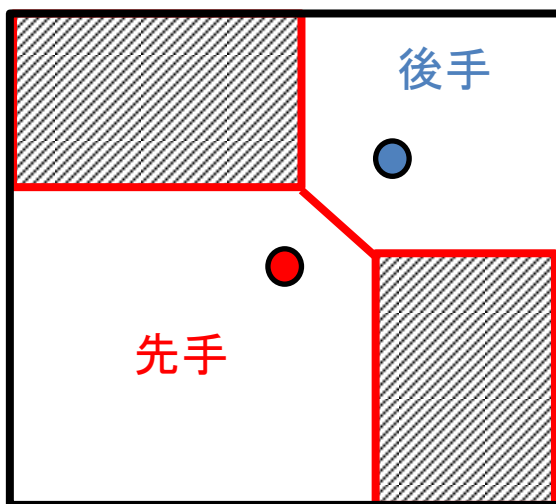


3.折れ線

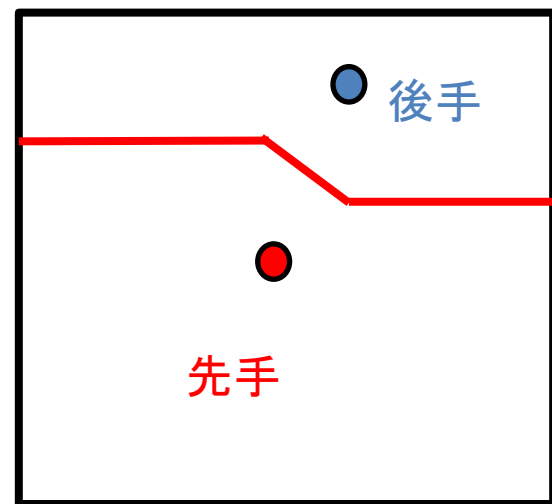
1.手数1,奇数×奇数のときは先手が勝利



1.直線



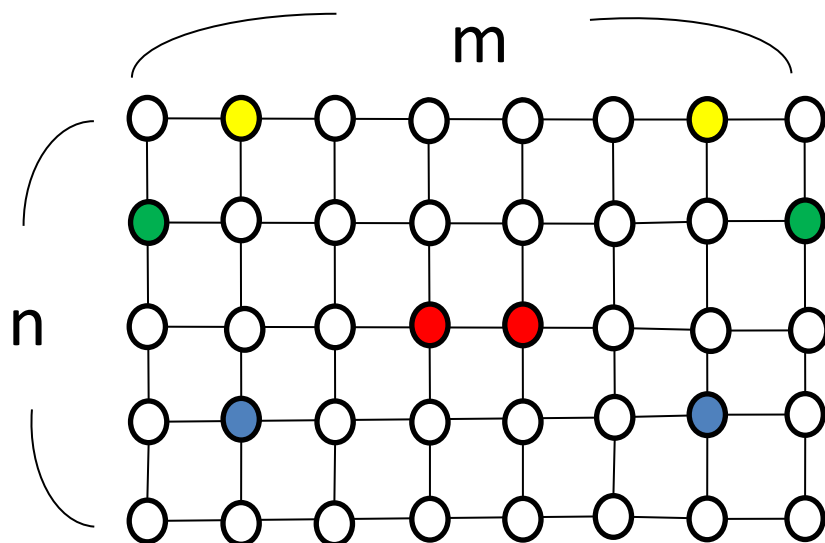
2.垂直二等分線と長方形



3.折れ線

どの場合も先手が陣地差n以上で勝利

2. 偶数を含む場合は引き分け



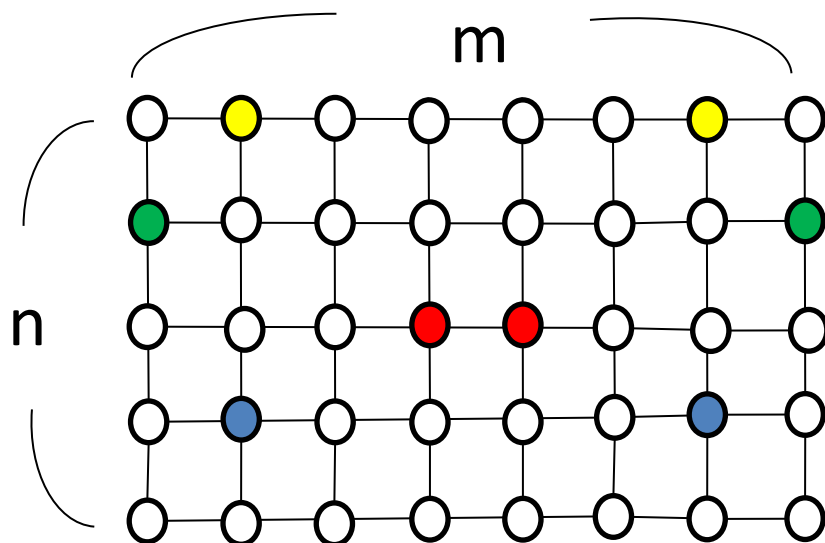
nとmに偶数を含む場合、任意の位置に対称な点が存在



後手は先手と常に対称な手を打つことで引き分けにすることができる

先手の最善手は引き分けに持ち込むこと！

2. 偶数を含む場合は引き分け



n と m に偶数を含む場合、任意の位置に対称な点が存在

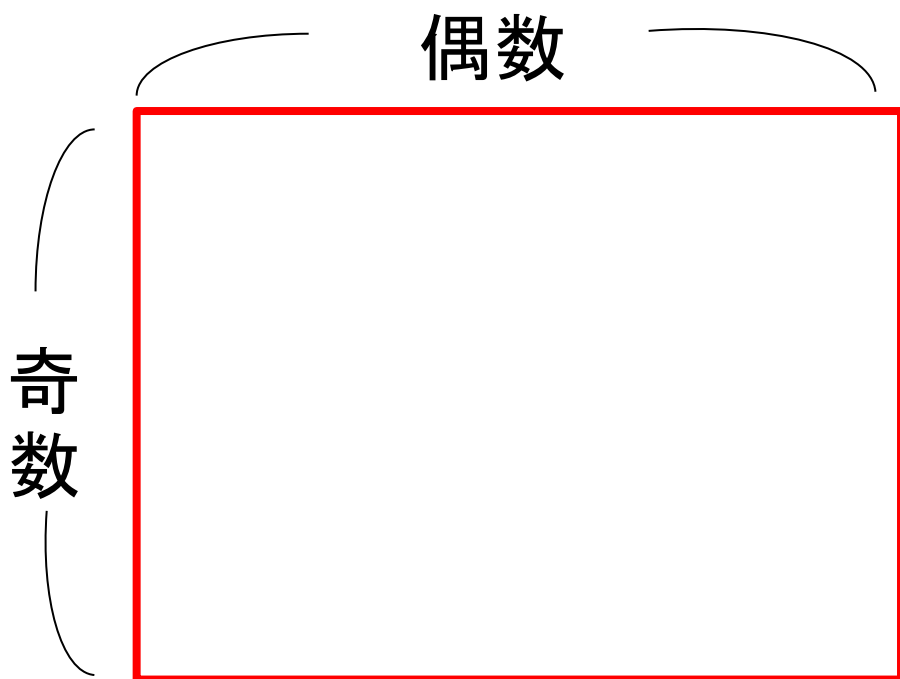


後手は先手と常に対称な手を打つことで引き分けにすることができる

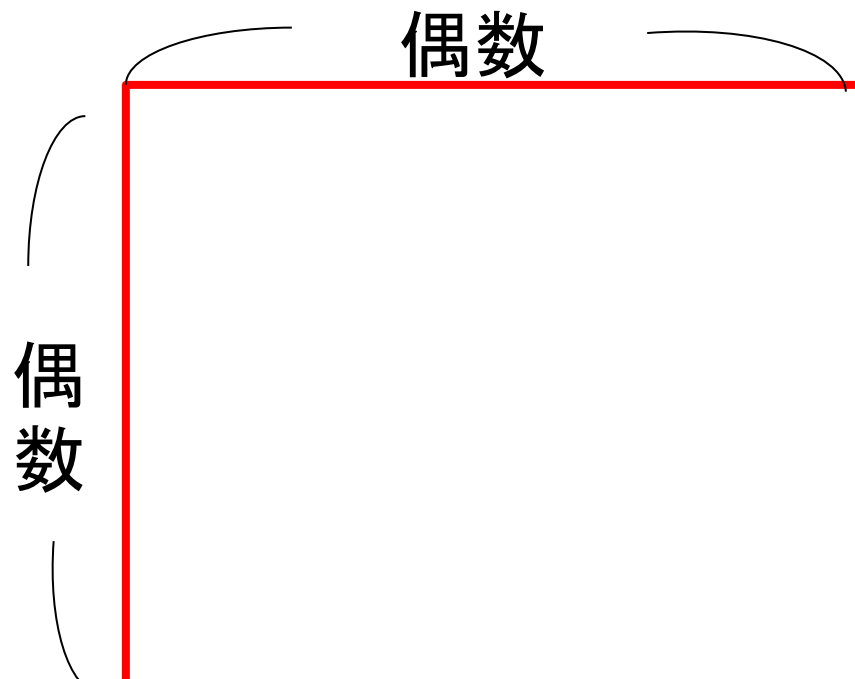
先手の最善手は引き分けに持ち込むこと！

手数1のときに先手が引き分けに持ち込む戦略を示す

2.手数1,偶数を含む場合は引き分け

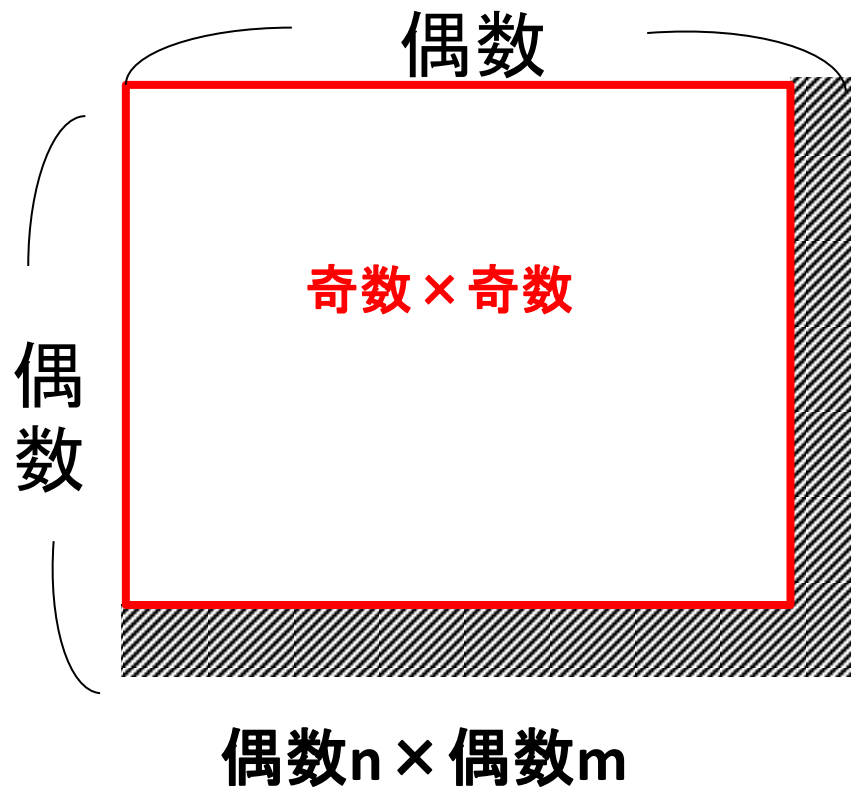
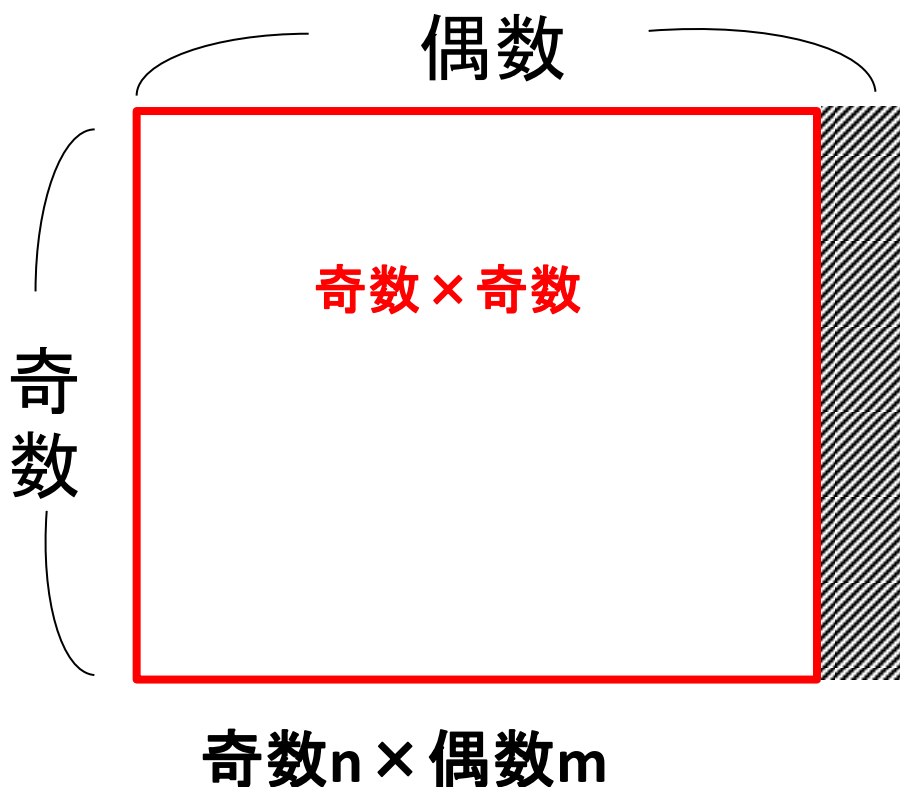


奇数 $n \times$ 偶数 m

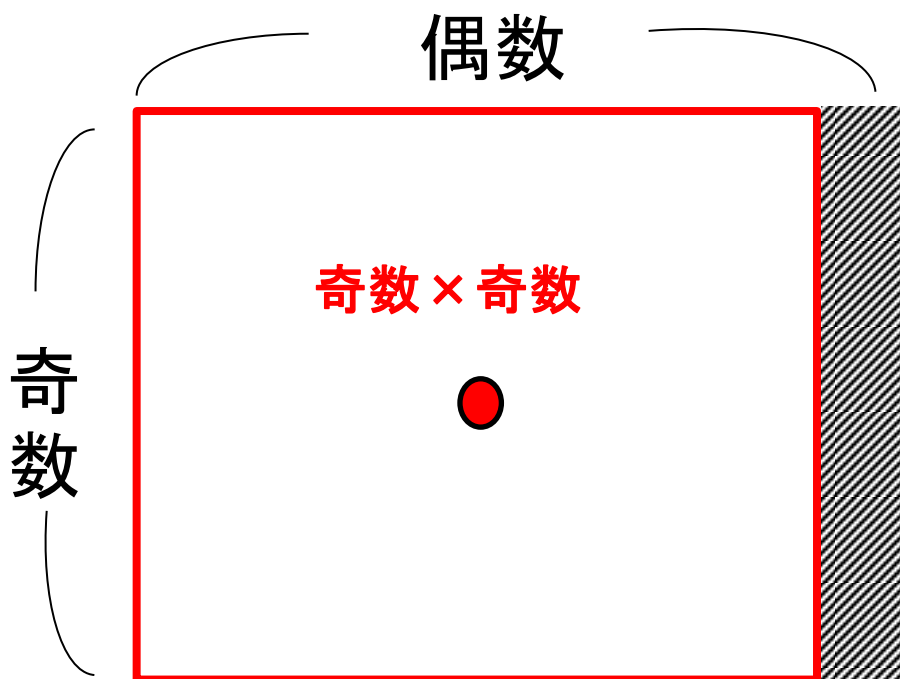


偶数 $n \times$ 偶数 m

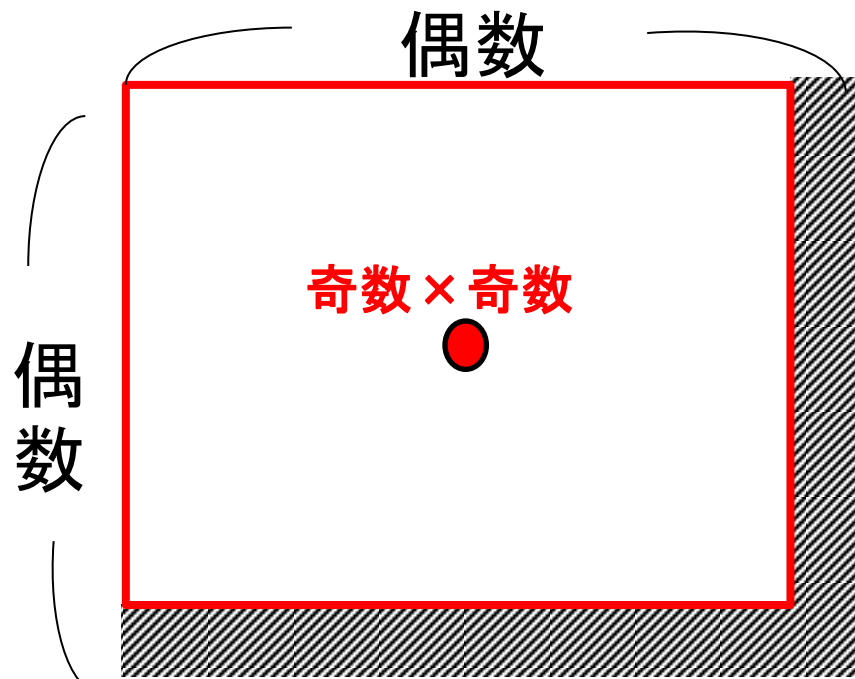
2.手数1,偶数を含む場合は引き分け



2.手数1,偶数を含む場合は引き分け



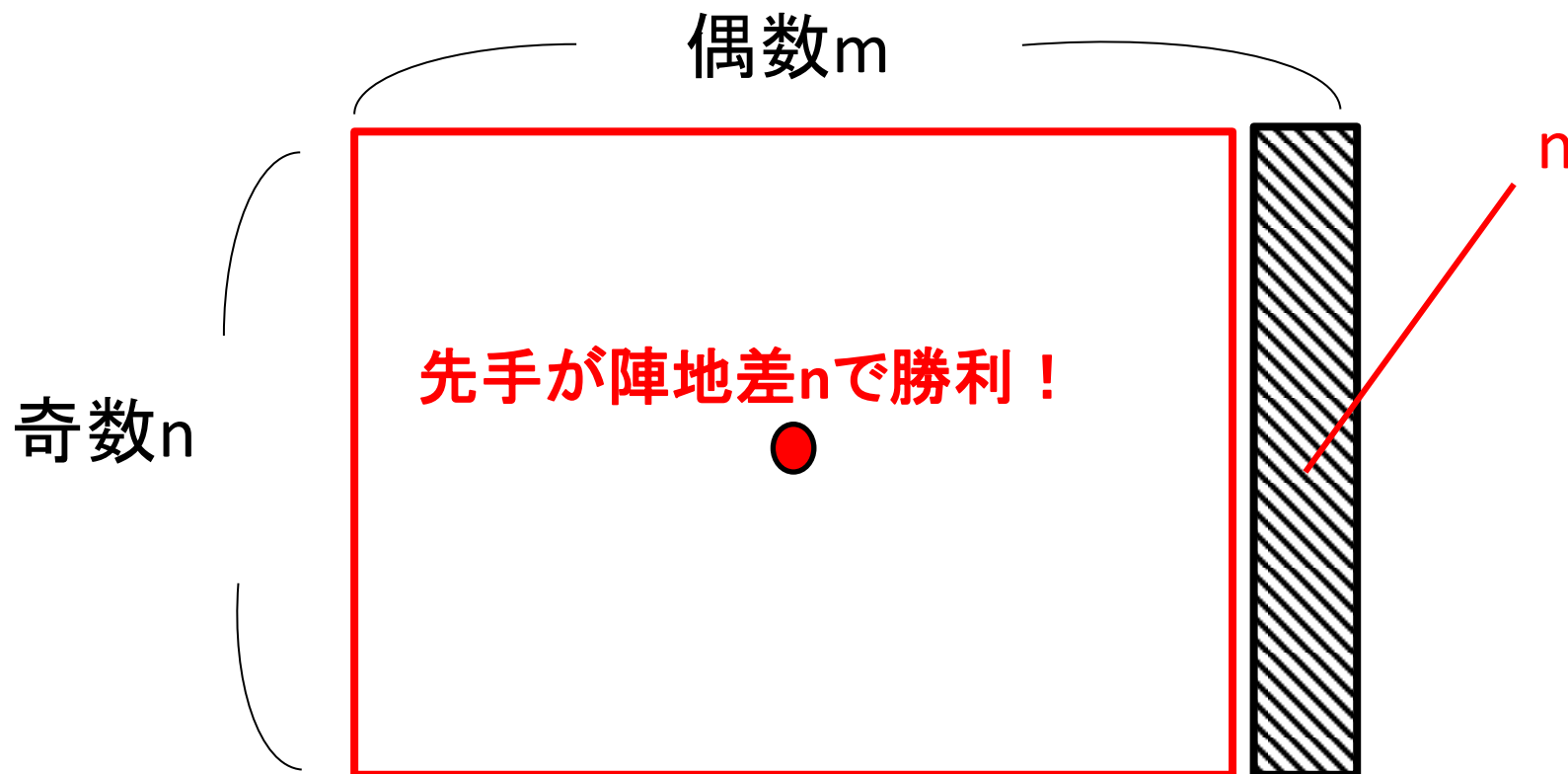
奇数 n × 偶数 m



偶数 n × 偶数 m

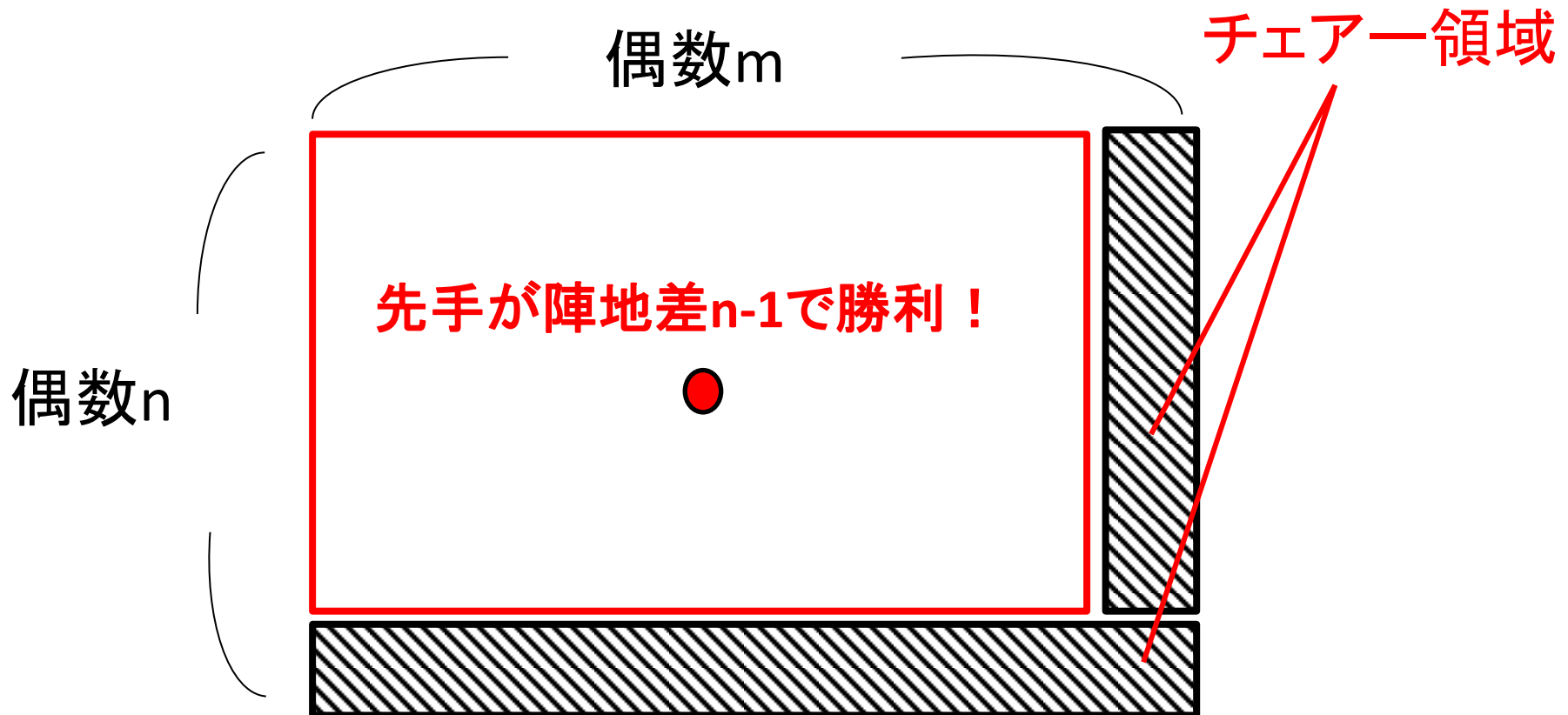
先手の最善手は赤枠の中央に陣地を選ぶこと

2.手数1,奇数×偶数のとき



斜線部分が全て後手の陣地だとしても引き分け

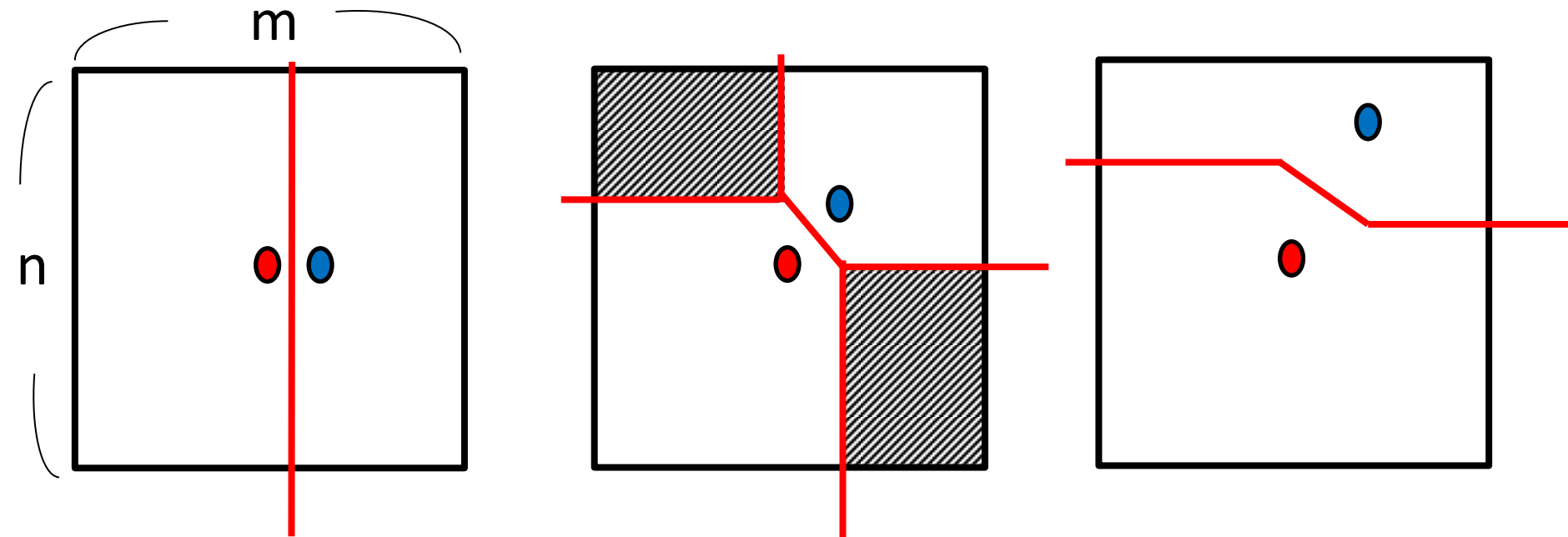
2.手数1,偶数 $\times$ 偶数のとき



先手はチェアー領域で陣地差 n 以上で負けなければよい

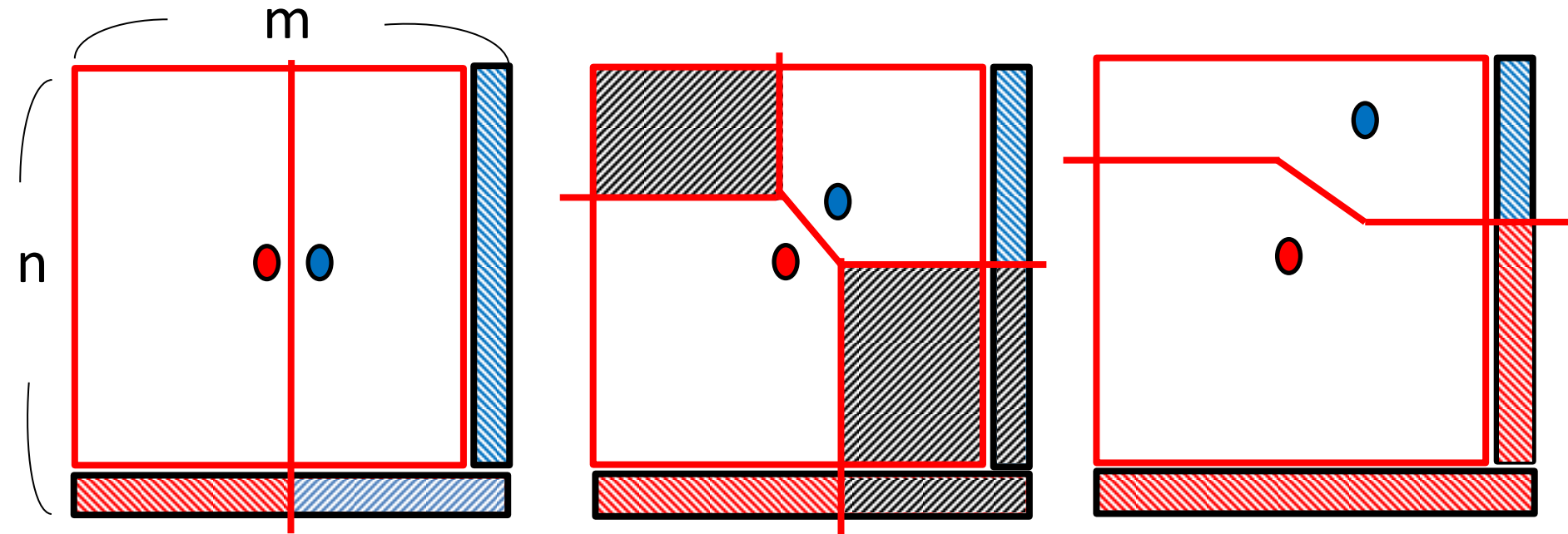
2.手数1,偶数 × 偶数のとき

先手はチェアー領域で陣地差 n 以上で負けなければよい



2.手数1,偶数 × 偶数のとき

先手はチェアー領域で陣地差 n 以上で負けなければよい



境界線によってチェアー領域内の陣地差が分かる

2.手数1,偶数 × 偶数のとき

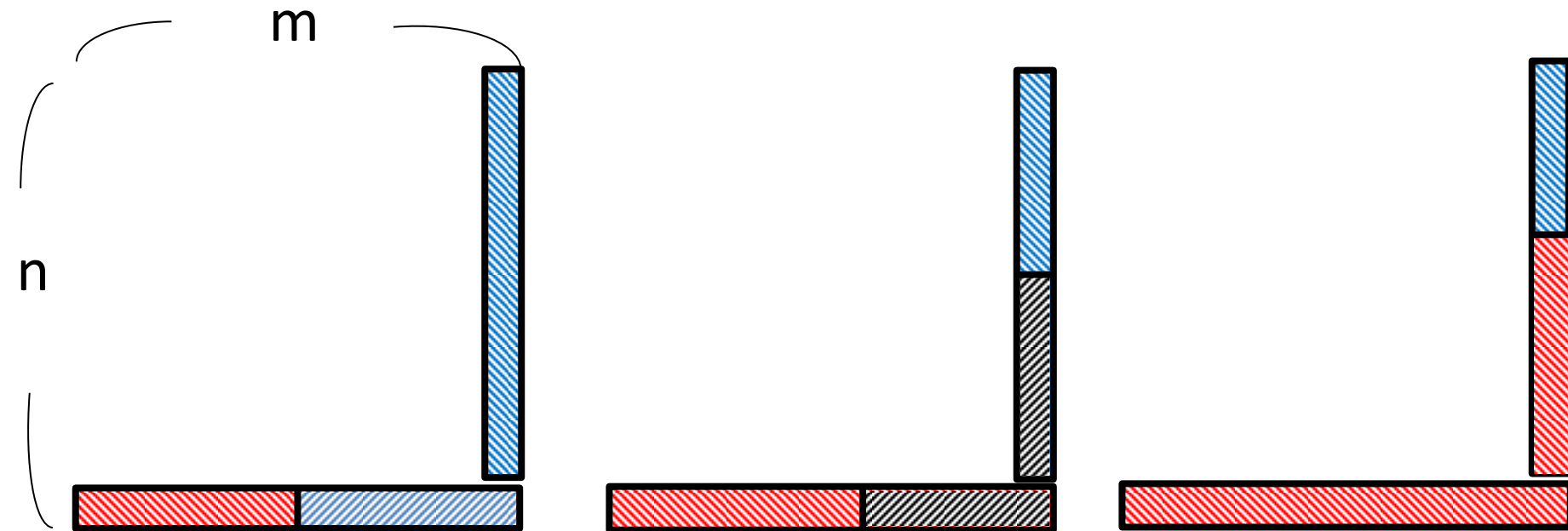
先手はチェアー領域で陣地差 n 以上で負けなければよい



境界線によってチェアー領域内の陣地差が分かる

2.手数1,偶数 × 偶数のとき

先手はチェアー領域で陣地差 n 以上で負けなければよい



境界線によってチェアー領域内の陣地差が分かる

どの場合もチェアー領域で先手が陣地差 n 以上で負けることはない

手数2の場合

計算機を使ってミニマックス探索による全探索を行い、最善手を全て列挙

・いくつかの盤面において後手が勝利！

・奇数×奇数かつ $n \neq m$ のときに規則性が見られた

縦のサイズn	横のサイズm	勝者(陣地差)
5	5	引き分け
5	6	後手(1)
5	7	引き分け
5	8	引き分け
5	9	引き分け
6	6	引き分け
6	7	引き分け
6	8	引き分け
6	9	引き分け
7	7	後手(1)
7	8	後手(1)
7	9	引き分け
8	8	後手(2)
8	9	引き分け
9	9	後手(3)

手数2, 奇数 × 奇数の場合

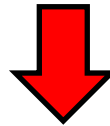
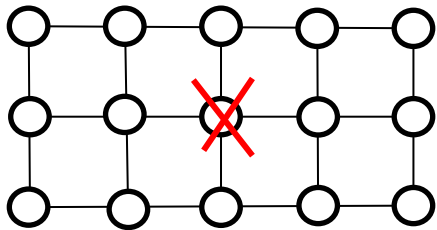
- ・先手は中央を選ばない限り、後手に対称な位置を選ばれて引き分け



- ・先手が勝つためには、必ず中央を選ばなければならない



- ・しかし先手の最善手は常に中央を避けて引き分けになっている



中央を選んだら先手は負ける

手数2, 奇数 × 奇数の場合

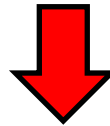
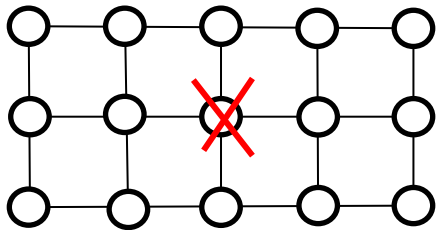
- ・先手は中央を選ばない限り、後手に対称な位置を選ばれて引き分け



- ・先手が勝つためには、必ず中央を選ばなければならない



- ・しかし先手の最善手は常に中央を避けて引き分けになっている

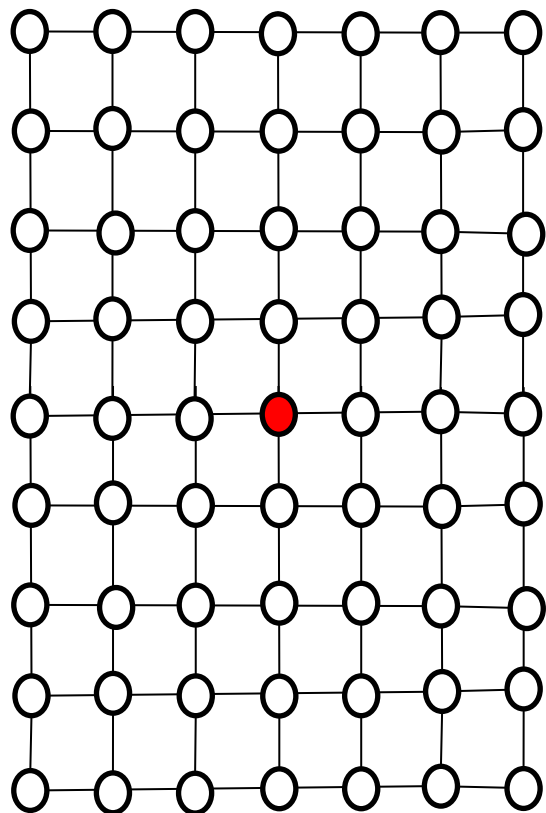


中央を選んだら先手は負ける

先手の1手目を中央に選ぶと負けることを示す

手数2, 奇数 × 奇数の場合

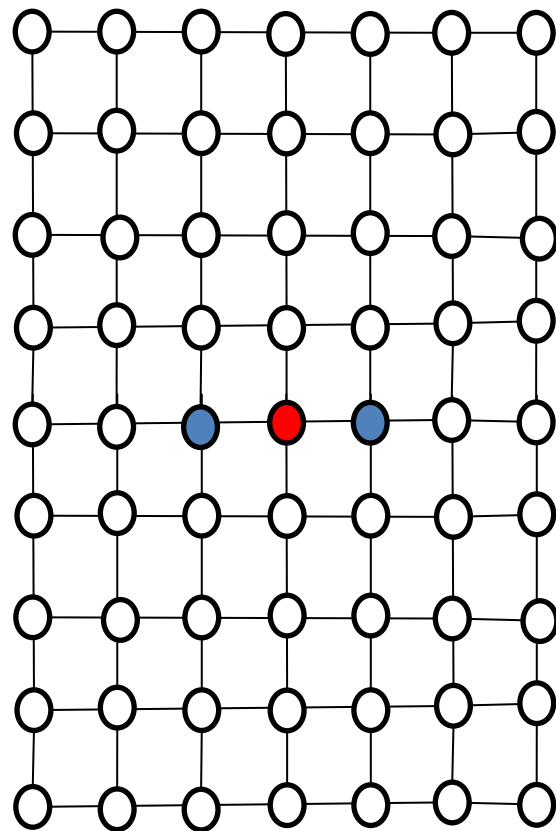
先手が1手目に中央を選んだ場合



後手の必勝戦略は先手の1手目を挟むこと！

手数2, 奇数 × 奇数の場合

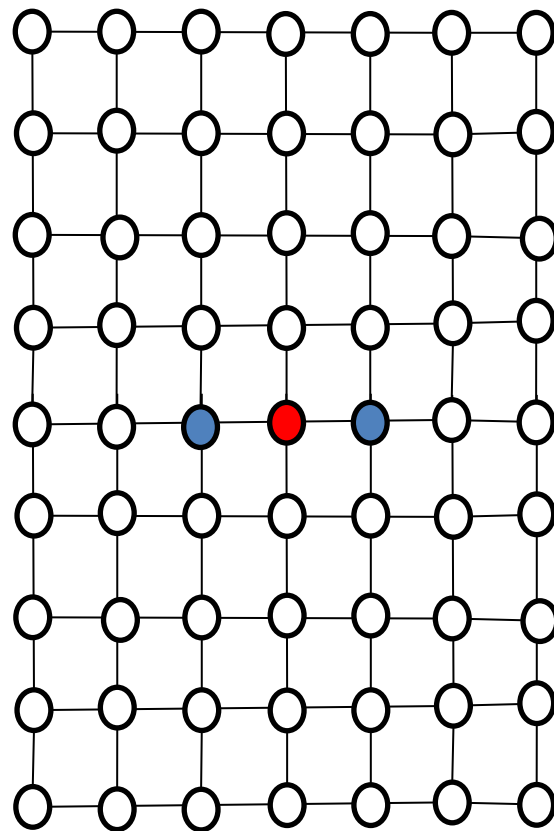
先手が1手目に中央を選んだ場合



後手の必勝戦略は先手の1手目を挟むこと！

手数2, 奇数 × 奇数の場合

先手が1手目に中央を選んだ場合

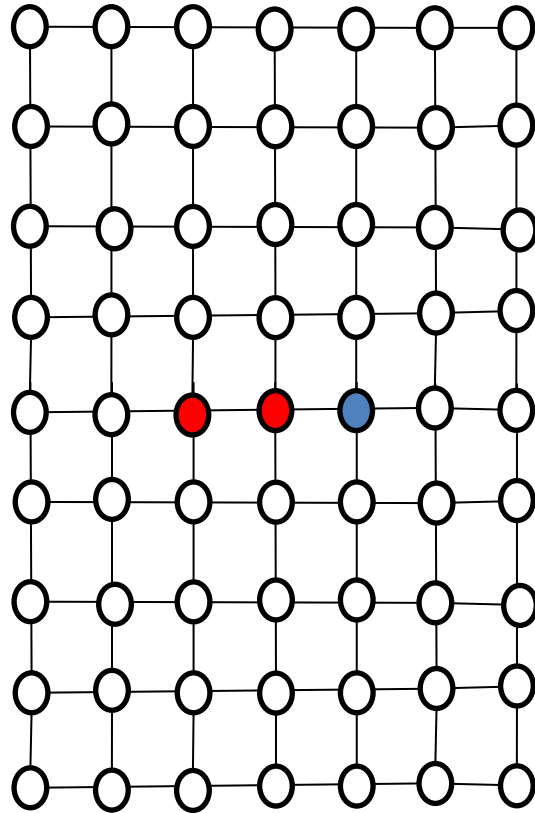


先手の2手目がどこであったとしても後手が勝つ

後手の必勝戦略は先手の1手目を挟むこと！

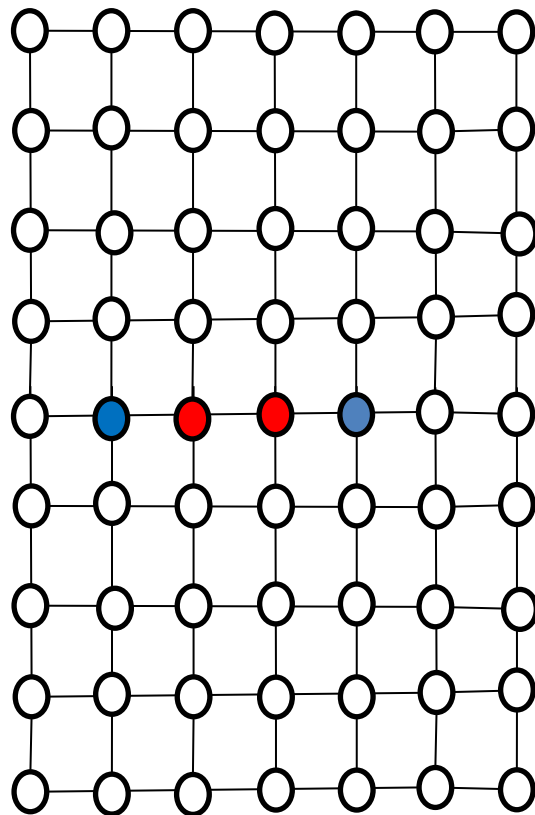
手数2, 奇数 × 奇数の場合

先手が1手目を挟まれないように選ぶと・・・？



手数2, 奇数 × 奇数の場合

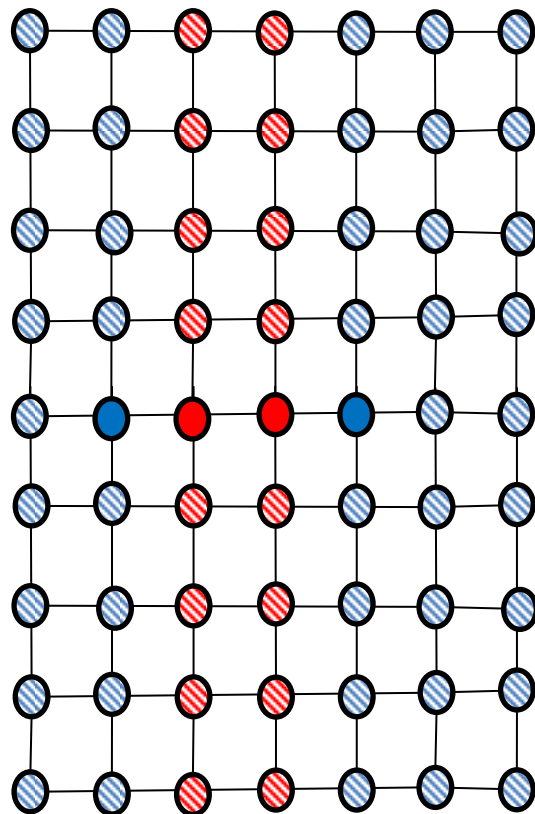
先手が1手目を挟まれないように選ぶと・・・？



先手の1, 2手目を挟んで後手が勝つ

手数2, 奇数 × 奇数の場合

先手が1手目を挟まれないように選ぶと・・・？



先手の1, 2手目を挟んで後手が勝つ

最後に

今回のまとめ

グリッド上のボロノイゲームにおいて、互いに最善手を打つと、

- ・手数1の場合は奇数 × 奇数のとき先手勝利。それ以外は引き分け
- ・手数2の場合は奇数 × 奇数のとき先手が1手目に中央を選んだら負け

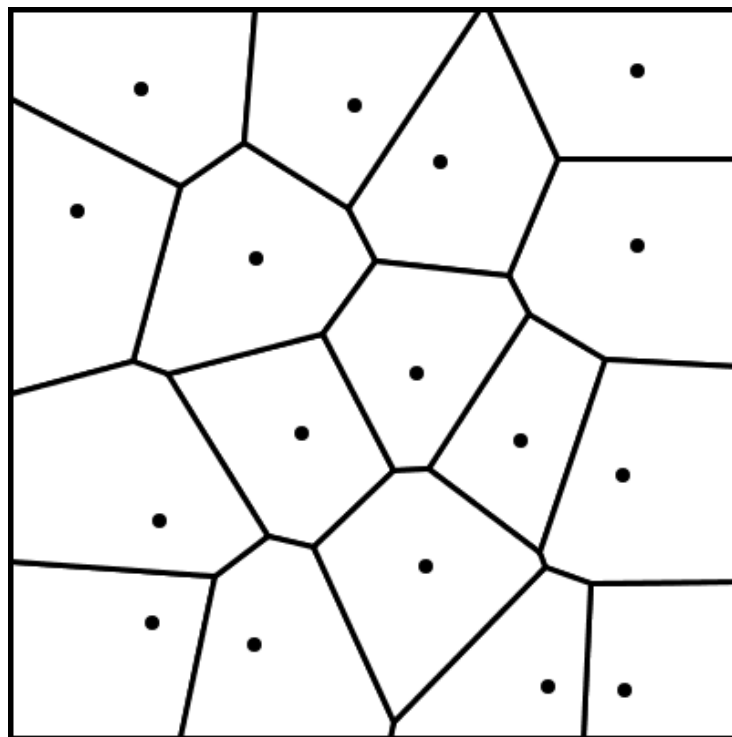
今後の課題

- ・グリッド上のボロノイゲームにおいて、手数が2以上の場合の完全解析
- ・プレイヤーが先手と後手の二人だけではなく、3人以上になった場合の解析

参考文献、論文

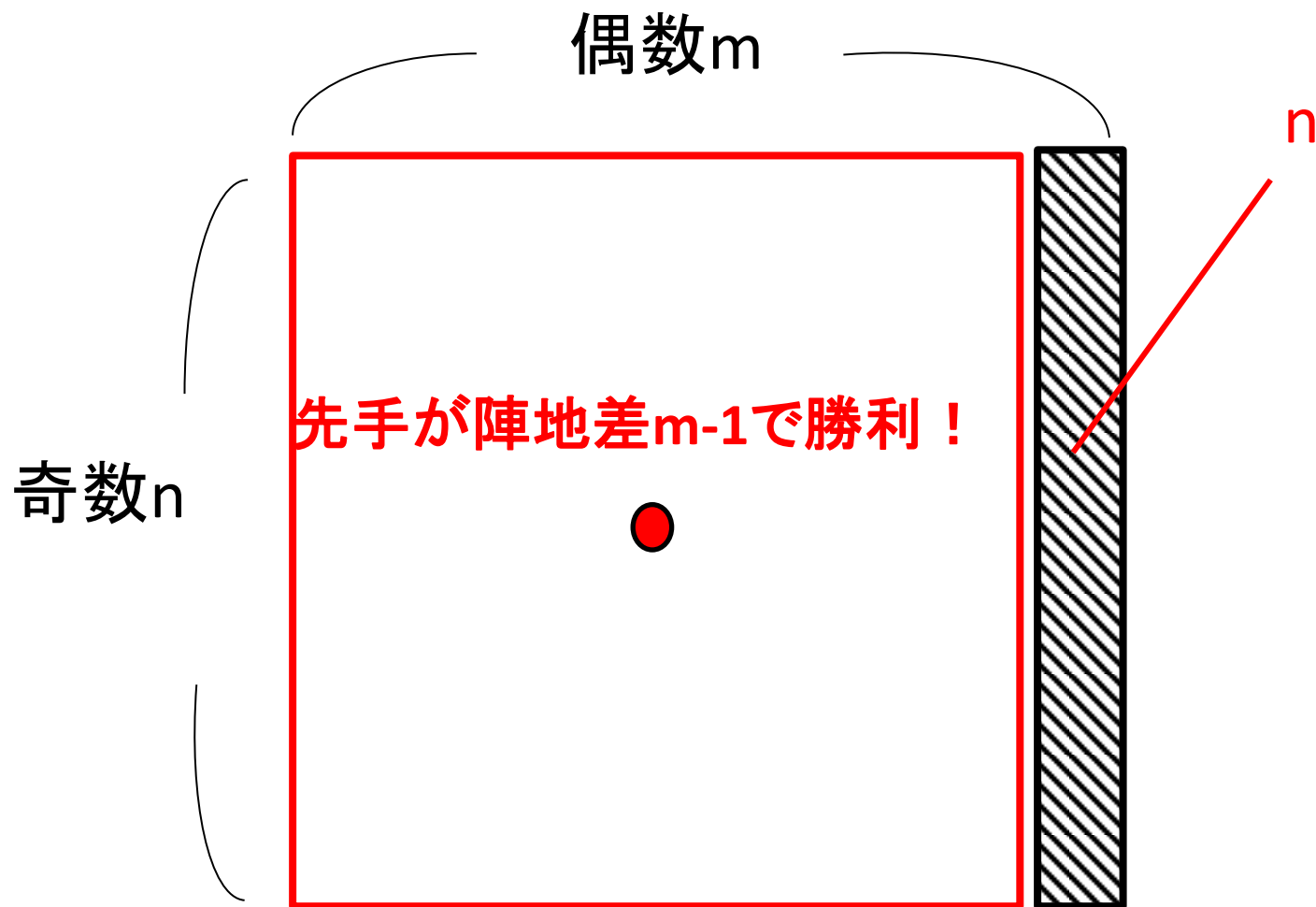
- 「グリッド上のボロノイゲームの解析」
著：後藤裕貴
- 「パス上のボロノイゲーム」
著：清見礼、斉藤寿樹、上原隆平
- 「グラフ上のボロノイゲームとその困難性」
著：寺本幸生、上原隆平

補足:ボロノイ図

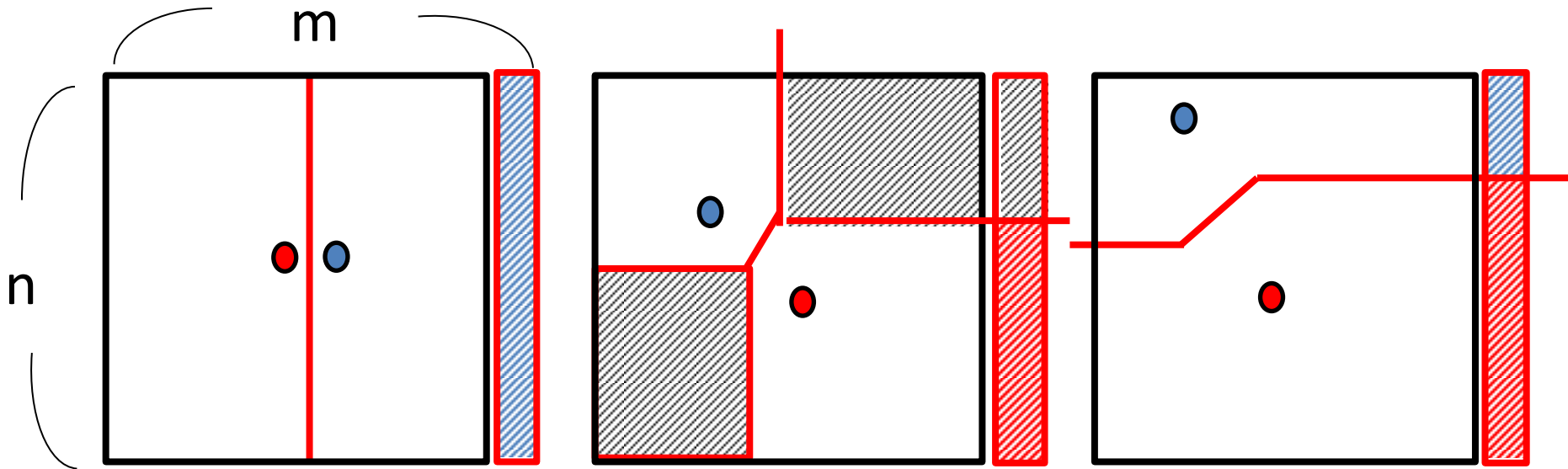


出典: <http://d.hatena.ne.jp/kaiseh/20091010/1255198573>

補足 $n > m$ の場合



補足 $n > m$ の場合



この場合も先手は負けることはない