

$N$  面サイコロを用いた  
Liar's Dice および  
Bluff における  
最適戦略の  
導出アルゴリズム

岡本研

1111052 栢沼 凌汰

2016 年 3 月 7 日

# Contents

- 1 Liar's Dice
  - Liar's Dice の説明
  - 研究
  - 実験
- 2 Bluff
  - Bluff の説明
  - 研究
  - 実験
- 3 まとめ

# Liar's Dice の説明

Liar's Dice とは、2 人のプレイヤーが  
1 つのサイコロを使って遊ぶゲームである。  
16 世紀頃から存在したとされ、  
ルールにも複数の亜種が存在する。

先手



後手



初めに、先手と後手を決めます。  
ここでは、左の人を先手、  
右の人を後手とします。

先手  
宣言者

ターン1

後手  
推測者



1ターン目を始めます。  
先手は「宣言者」、後手は  
「推測者」という役になります。

先手  
宣言者

ターン1

後手  
推測者

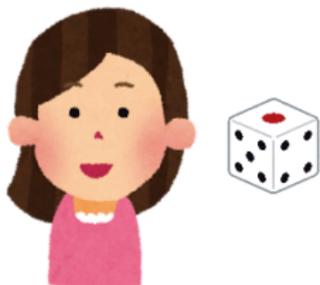


宣言者は、1つのサイコロを振ります（今回は6面サイコロを使います）。

先手  
宣言者

ターン1

後手  
推測者

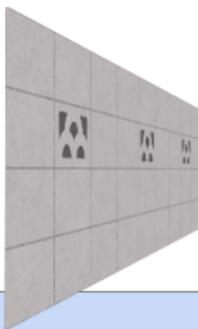


宣言者は、1つのサイコロを  
振ります（今回は6面サイコロを  
使います）。  
振りました。

先手  
宣言者

ターン1

後手  
推測者



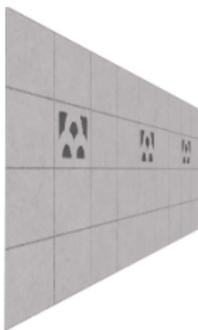
宣  
振  
使  
振りよした。

推測者は、何が出たかを  
確認できません。

先手  
宣言者



ターン1



後手  
推測者

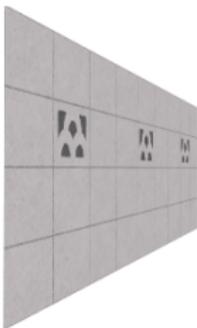


次に、宣言者は何が出たかを  
宣言します。  
嘘をつくこともできます。

先手  
宣言者



ターン1



後手  
推測者

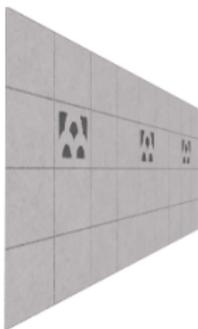


次に、宣言者は何が出たかを  
宣言します。  
嘘をつくこともできます。

先手  
宣言者



ターン1



後手  
推測者

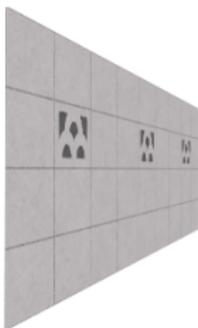


推測者は、実際の出目が  
3以上と推測するなら「Accept」、  
2以下と推測するなら「Bluff」と  
宣言します。

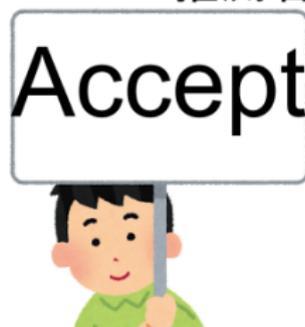
先手  
宣言者



ターン1



後手  
推測者



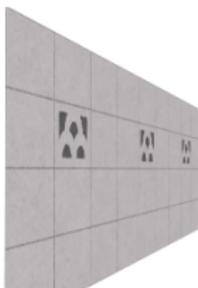
推測者は、実際の出目が  
3以上と推測するなら「Accept」、  
2以下と推測するなら「Bluff」と  
宣言します。

先手  
宣言者

3



ターン1



後手  
推測者

Accept

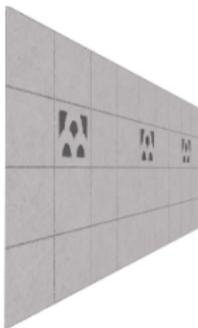
推測  
3以上  
2以上  
宣言しよ。

Acceptが宣言されると、  
次のターンに進みます。

先手  
推測者



ターン2  
前回の宣言:3



後手  
宣言者

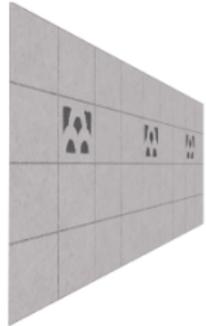


2ターン目です。  
役割を入れ替えます。  
前のターンでの出目の宣言を  
覚えておきます。

先手  
推測者



ターン2  
前回の宣言:3



後手  
宣言者

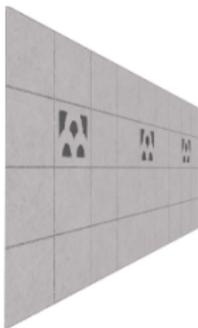


宣言者はサイコロを振り、

先手  
推測者



ターン2  
前回の宣言:3



後手  
宣言者

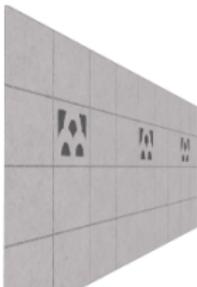


宣言者はサイコロを振り、  
出目の宣言をします。

先手  
推測者



ターン2  
前回の宣言:3



後手  
宣言者



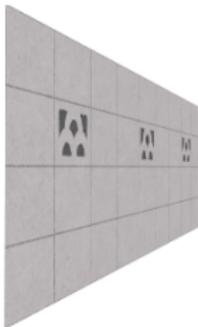
宣言  
出目

2ターン目以降は、前回  
よりも高い出目を宣言  
しなければなりません。

先手  
推測者



ターン2  
前回の宣言:3



後手  
宣言者



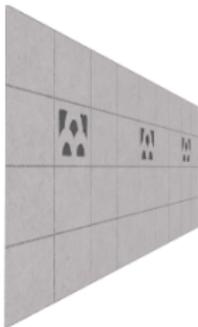
推測者は5以上だと  
推測するなら「Accept」、  
4以下なら「Bluff」を宣言します。

先手  
推測者

Bluff



ターン2  
前回の宣言:3



後手  
宣言者

5

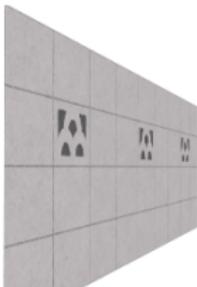


推測者は5以上だと  
推測するなら「Accept」、  
4以下なら「Bluff」を宣言します。

先手  
推測者

Bluff

ターン2  
前回の宣言:3



後手  
宣言者

5



Bluffが公開されたら、サイコロを公開して、勝敗の判定を行います。

先手  
推測者

Bluff



ターン2  
前回の宣言:3



後手  
宣言者

5



出目が公開されました。  
推測者は予想を外したこと  
になります。

先手  
推測者



ターン2  
前回の宣言:3



後手  
宣言者



よって、  
推測を外した推測者の敗北、  
宣言者の勝利となります。

# 先行研究

先行研究<sup>1</sup>では、6面のサイコロにおける

- 最適戦略
- 最適戦略を用いた場合の先手の勝率
- それらの証明

が示されていた。

---

<sup>1</sup>C. P. Ferguson, T. S. Ferguson, Models for the Game of Liar's Dice. In: T. E. S. Raghavan, T. S. Ferguson, T. Parthasarathy, O. J. Vrieze (eds.), *Stochastic Games and Related Topics*, Springer Netherlands, 1991, pp. 15–28.

# 本研究

任意の数の面のサイコロにおける

- 最適戦略

- 最適戦略を用いた場合の先手の勝率

を求めるアルゴリズムを構成した。

# アルゴリズムの流れ

「1つ前の出目の宣言」に対応する1回のターンを部分ゲームとしてモデル化して、最適化問題を作成した。各部分ゲームの利得をターンの後ろから順番に求めていき、最終的に先手プレイヤーの勝率や最適となるナッシュ均衡戦略を求められる。

# 実験 LD-1

自分の作成したアルゴリズムで、サイコロの面の数が 1 から 100 までの範囲での先手の勝率の変化を調べた。

# 結果

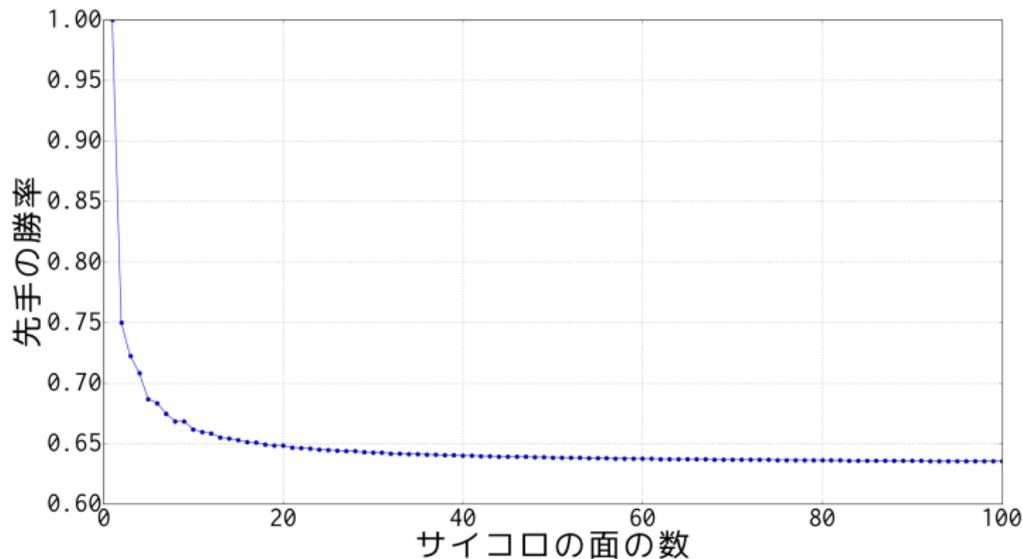


Figure: 1 面から 100 面までのサイコロの先手勝率の変化

# 実験 LD-2

自分の手法で導出した最適戦略 (戦略 K) と、先行研究で提示されていた最適戦略 (戦略 T) について、シミュレーションを行って比較する。

各戦略が先手、後手である 4 種類の組合せについて、それぞれ 1 億回ずつゲームを行い勝率を出した。

# 結果

先手 \ 後手	戦略 T	戦略 K
戦略 T	68.332%	68.334%
戦略 K	68.333%	68.336%

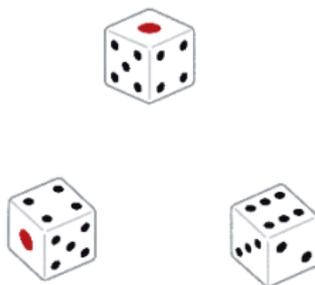
全ての組み合わせについて、  
先行研究で示されていた先手の勝率  
( $\frac{41}{60} = 68.3333\dots$ ) と同程度の  
結果が得られた

# Bluff の説明

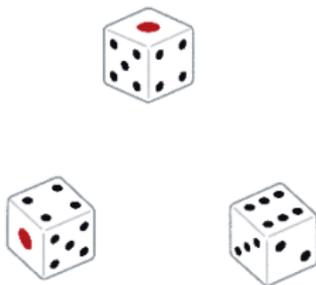
Bluff とは、  
Liar's Dice をベースに、  
ルールを複雑にして  
商品化されたものである。  
本研究では 2 人で  
遊ぶ場合を取り扱う。



<http://sgrk.blog53.fc2.com/?no=151>



Bluffでは、  
N面サイコロにおけるNの出目を  
「ワイルドの出目」として  
扱います。

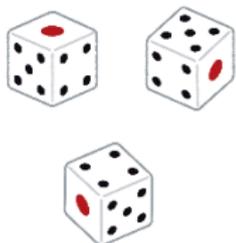


あるサイコロの出目が  
いくつ出ているか数える時、  
ワイルドの出目もその出目で  
あるとして数えます。



この状態は、  
「1が2つ」、「4が2つ」、  
「6が1つ」出ていると  
見なされます。

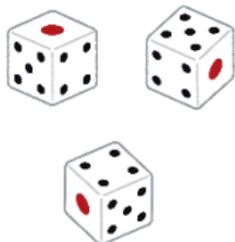
あ  
い  
ワ  
あるとして致んより。



各プレイヤーが3つの  
6面サイコロを使う場合の説明を  
します。

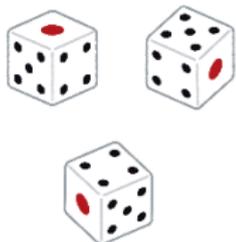
先手

後手



初めに、先手と後手を決めます。  
ここでは、左の人を先手、  
右の人を後手とします。

## 先手 ラウンド1 後手



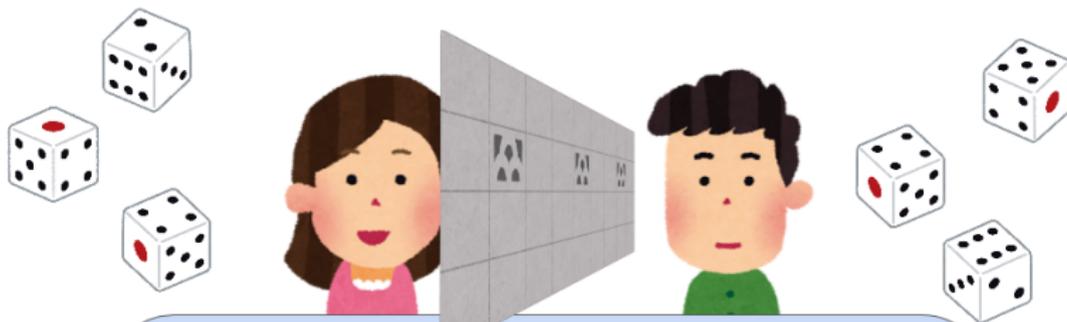
最初のラウンドを開始します。  
各プレイヤーはサイコロを  
振ります。

## 先手 ラウンド1 後手



最初のラウンドを開始します。  
各プレイヤーはサイコロを  
振ります。  
.....振りました。

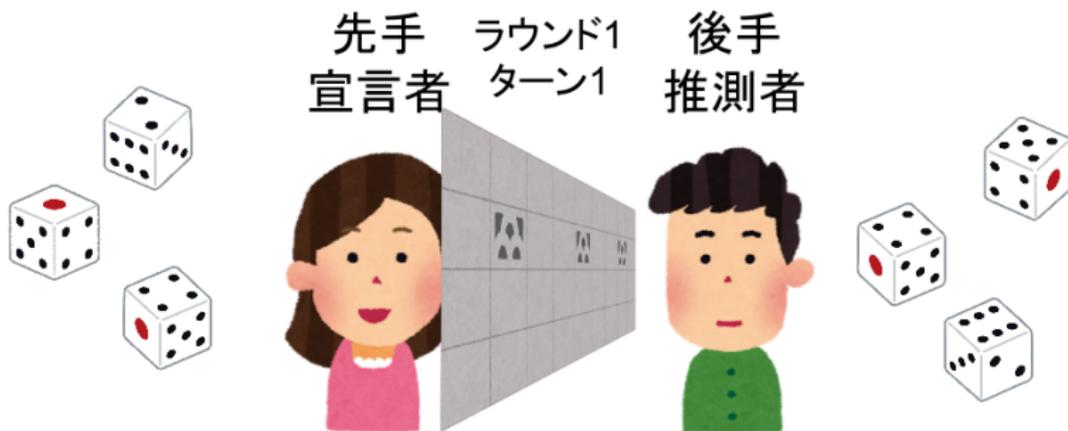
## 先手 ラウンド1 後手



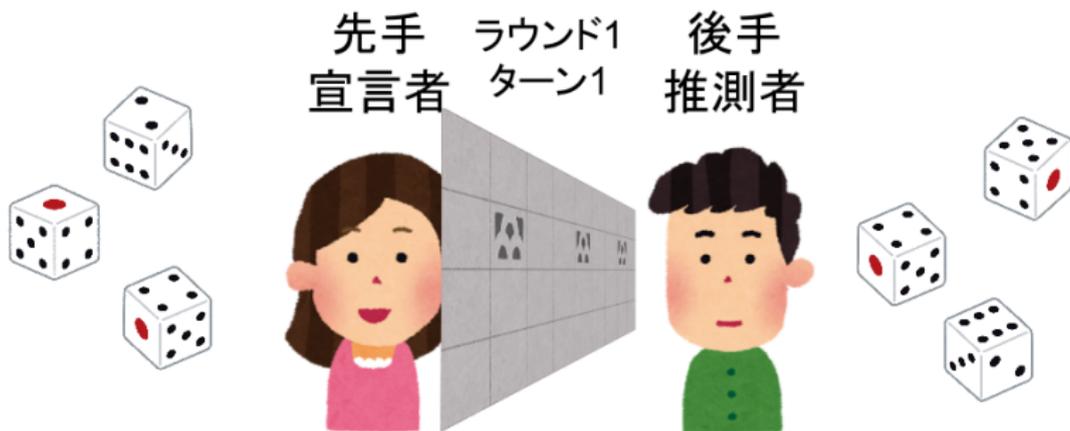
最  
各  
各  
手  
.....

各プレイヤーは、  
自分の出目しか  
確認できません。

.....振りました。



1ターン目を開始します。  
先手は「宣言者」、  
後手は「推測者」という  
役割になります。



まず宣言者が、  
「ある出目は、6個中、いくつ以上  
出ている」という形で  
ビッドの宣言を行います。

先手 ラウンド1 後手  
宣言者 ターン1 推測者



この宣言は、  
実際の自分の出目と  
合わせる必要は  
ありません。

また「あ  
出  
ビットの宣言を行いより。

上

先手 ラウンド1 後手  
 宣言者 ターン1 推測者



この宣言は、  
 実際の自分の出目と  
 合わせる必要は  
 ありません。

まだ  
 「あ  
 出  
 ビットの宣言を行いよう。

上



推測者は、5の面が2つ以上  
出ていると推測するなら  
「Accept」を、さもなくば「Bluff」を  
宣言します。

先手 ラウンド1  
宣言者 ターン1

後手  
推測者

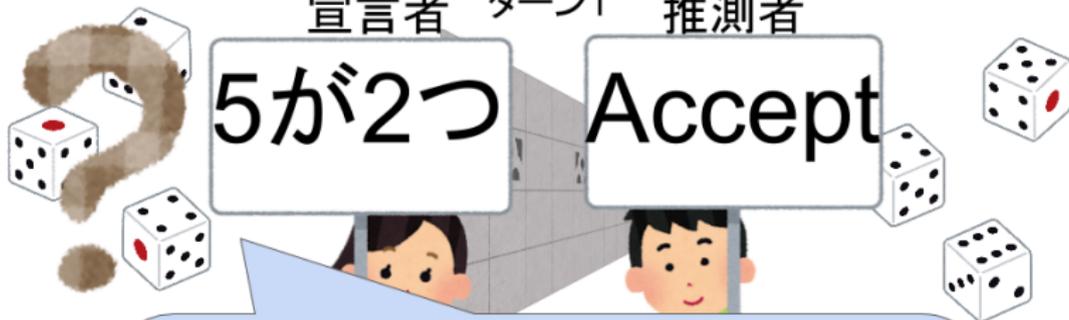


推測者は、相手の出目を推測し、自分の出目と合わせて考えなければなりません。

推測  
出目  
「A」  
宣言しよ。

を

先手 ラウンド1 後手  
 宣言者 ターン1 推測者



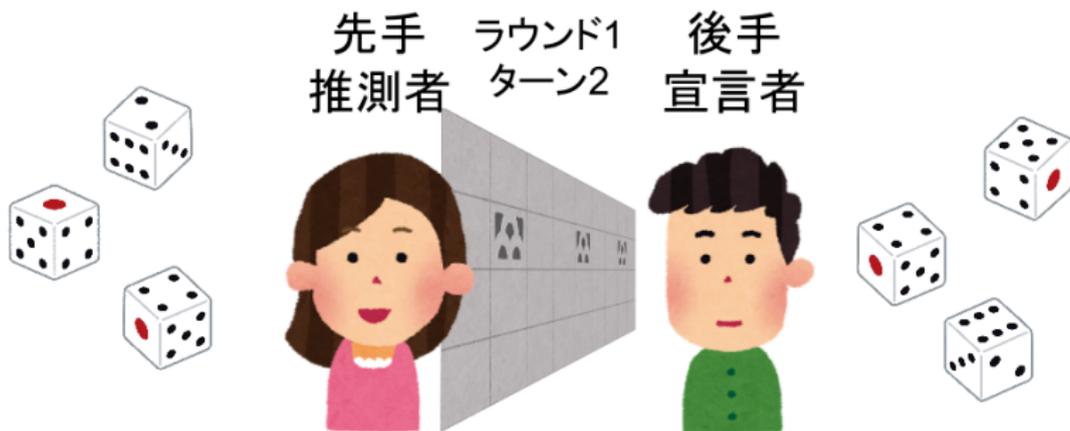
推測  
 出目  
 「A」  
 宣言しよ。

推測者は、相手の出目を推測し、自分の出目と合わせて考えなければなりません。

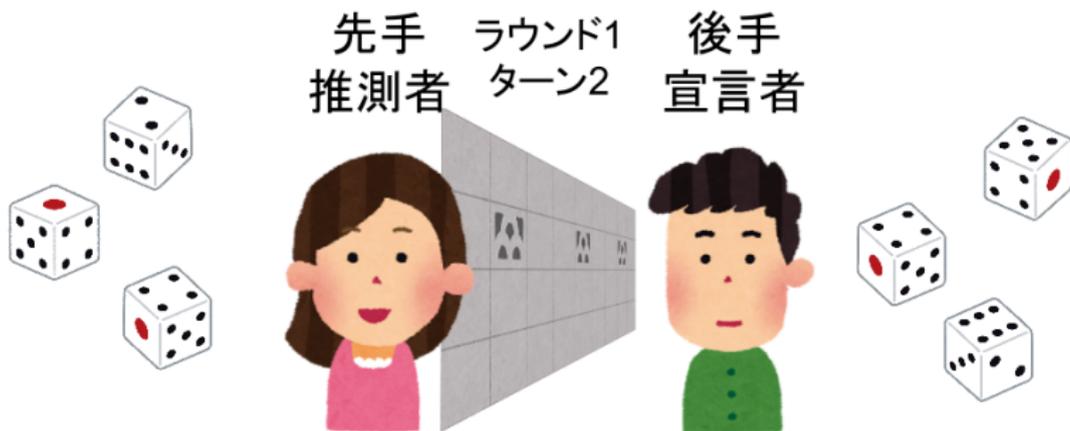
を



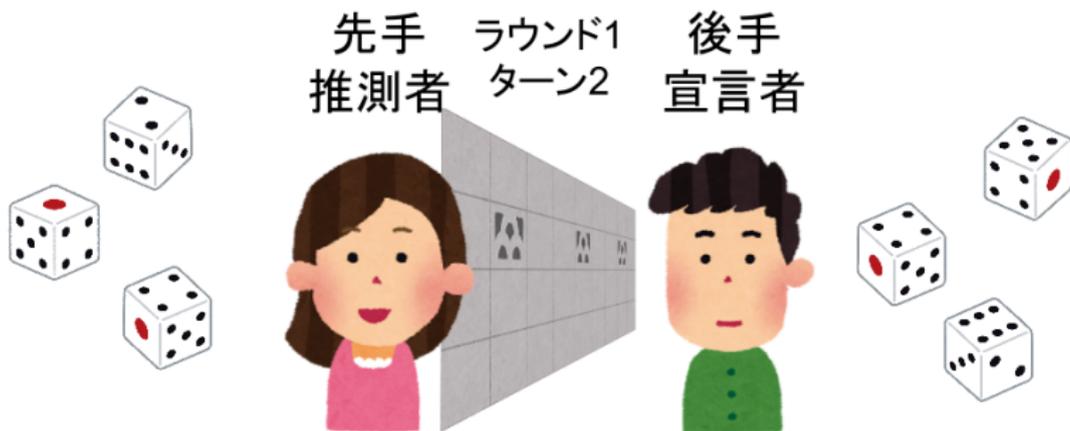
Acceptが宣言された場合、  
次のターンになります。



2ターン目です。  
役割を入れ替えます。



2ターン目以降では、宣言者は  
1つ前よりも高い宣言を  
する必要があります。



ビッドの大小については  
分かりにくいので、  
この発表では割愛します。

先手      ラウンド1      後手  
推測者    ターン2      宣言者



ビ  
分  
こ

「数が大きい方が大きい」  
との認識で大丈夫です。



推測者は、5の面が3つ以上  
出ていると推測するなら  
「Accept」を、さもなくば「Bluff」を  
宣言します。



Bluffが宣言されたら、



Bluffが宣言されたら、  
全てのサイコロを公開し、  
実際のビッドとの比較を  
行います。



Bluff  
全  
実  
行い

全体では、5が  
全部で2つあります。



宣言者は、実際より高いビッドを宣言したので、サイコロを差分の1つ取り除かれます。



宣言者は、実際より高いビッドを  
宣言したので、サイコロを  
差分の1つ取り除かれます。  
取り除かれました。

後手 ラウンド2 先手



次のラウンドに進みます。  
先手と後手が入れ替わります。

## 後手 ラウンド2 先手



次のラウンドに進みます。  
先手と後手が入れ替わります。  
サイコロも振り直します。

## 先手 ラウンド3 後手



このようにラウンドを繰り返し、

## 後手 ラウンド4 先手



このようにラウンドを繰り返し、  
最終的に

後手 ラウンド5 先手



このようにラウンドを繰り返し、最終的にサイコロがなくなったプレイヤーの敗北、残っているプレイヤーの勝利となります。

# 先行研究

先行研究<sup>2</sup>では、

- 任意の数の面を持つサイコロを用いて、
- 先手、後手が1つずつサイコロを持つ

という場合についての最適戦略の導出を研究されていた。

<sup>2</sup>Marc Lanctot, Jeff Long, Solving Bluff,  
<http://mlanctot.info/files/675proj/report.pdf>,  
2007.

# 研究したこと

本研究では、

- 任意の数の面を持つサイコロを用いて、
- 先手、後手が**任意の数**のサイコロを持つ

という場合について最適戦略を導出するアルゴリズムを構築、実装し、動かして出力を調べた。

# アルゴリズム

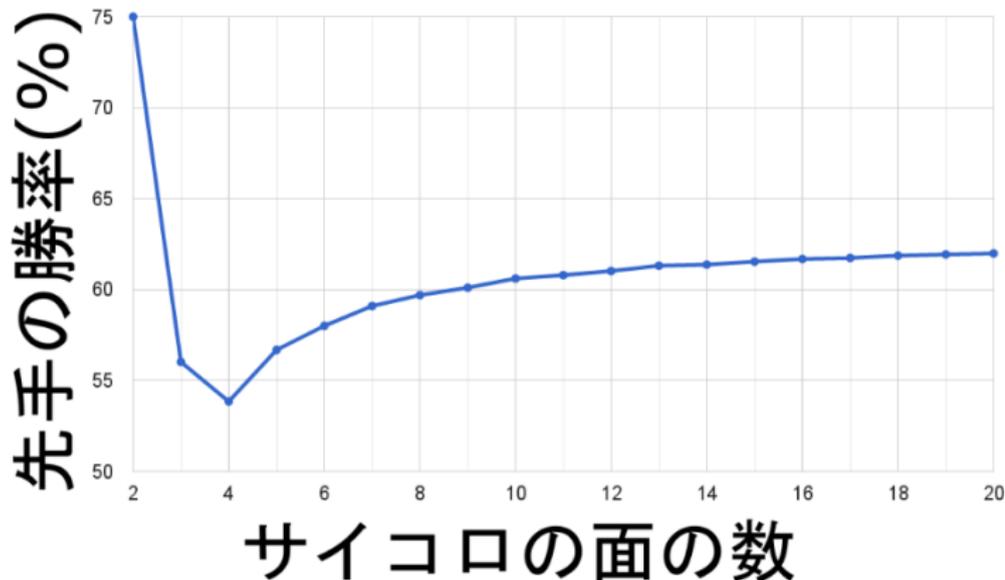
各ラウンドにおける 1 つのターンを  
部分ゲームとみなし、  
宣言者、推測者の最適戦略を求める  
最適化問題を作成して解く。

ただし、各最適化問題では未来の利得が  
必要なので、後ろ向き帰納法で各ターンの  
利得を求めておく。

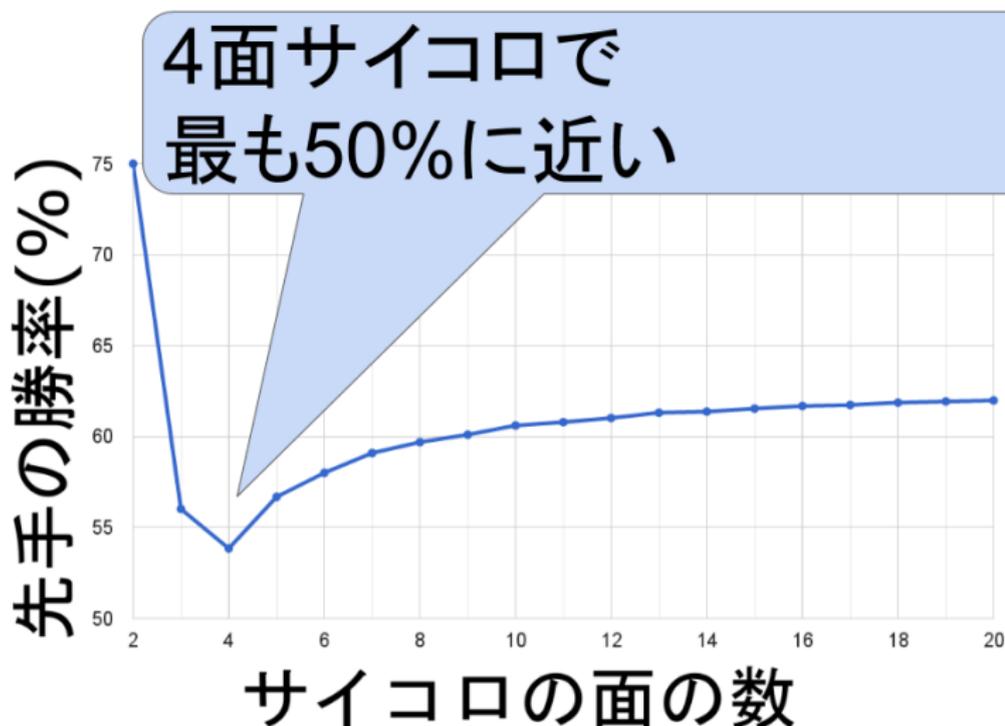
# 実験 Bluff-1

先手、後手が1つずつの  $N$  面サイコロを持つ場合の先手勝率を、  
 $N = 2, \dots, 20$  の範囲で変化させて調べた。

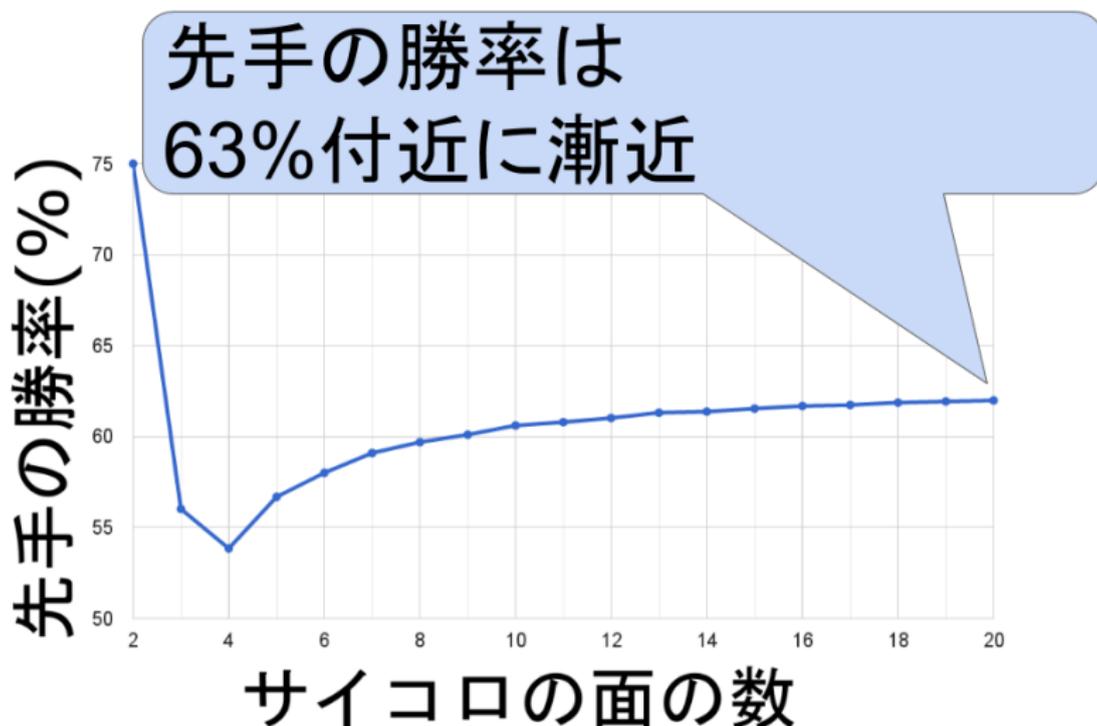
# 実験 Bluff-1 の結果



# 実験 Bluff-1 の結果



# 実験 Bluff-1 の結果



得られた結果について、  
先行研究のものと比較をした。また、  
確認のため、Gambit<sup>3</sup> というゲーム理論に  
おける解析を行うソフトウェアを用いて  
 $N = 3$  の場合まで計算した。

---

<sup>3</sup><http://www.gambit-project.org/>

**Table:** 各導出方法における先手、後手がそれぞれ 1 つずつの  $N$  面サイコロを持つ Bluff における先手勝率 (%)

$N$	本研究	先行研究	Gambit
2	75.00	75.00	75.00
3	56.02	55.56	56.02
4	53.84	53.13	
5	56.68	50.40	
6	58.00	48.64	

# 実験 Bluff-2

サイコロの面の数 ( $N$ ) を固定して、  
先手と後手のサイコロの数を  
変化させた場合の先手の勝率の変化を  
調べた。

# 実験 Bluff-2 の結果

2 面サイコロでは、以下のようになった。

Table: 2 面複数サイコロにおける先手勝率 (%)

先手の数 \ 後手の数	1	2	3	4	5
1	75	25	10	2	1
2	89	72	27	15	5
3	97	84	69	31	19
4	98	94	80	68	33
5	99	96	91	78	66

# 研究成果

Liar's Dice について、

- $N$  面サイコロに一般化した戦略を求めるアルゴリズムを作成した
- 使うサイコロの面の数を大きくしても先手優位であることが分かった
- 上記アルゴリズムが先行研究と同等の戦略であることを示した

Bluff について、

- 先行研究の誤りを発見した
- 1 つずつのサイコロを使う場合、4 面サイコロを使う場合が最も先手と後手の勝率の差が小さくなる
- 複数のサイコロを使う場合は、サイコロを多く持つ方が有利で、同数なら少ないほど先手が有利

# 今後の課題

サイコロの面の数がより多い場合や、より多くのサイコロを用いる場合について、

- プログラム自体の高速化
- 更に時間を掛ける

により、調べる。

また、4面サイコロが最も先手の優位性が低いという結果について、原因を掘り下げて調べる。



$$\begin{aligned}
& \sum_{bid=s+1}^N \left( \sum_{roll=1}^N V_N(bid) x_{roll,bid} y_{bid,Accept} \right. \\
& \quad \left. - \sum_{roll=1}^{bid-1} (x_{roll,bid} y_{bid,Bluff}) \right) \\
& \quad + \sum_{roll=bid}^N (x_{roll,bid} y_{bid,Bluff}) \tag{1}
\end{aligned}$$

$$\sum_{bid \in next\_bids} x_{roll,bid} = 1 \quad (roll = 1, \dots, N) \tag{2}$$

$$x_{roll,bid} \geq 0 \quad (roll = 1, \dots, N; bid = s + 1, \dots, N) \tag{3}$$

$$y_{bid,Accept} + y_{bid,Bluff} = 1 \quad (bid = s + 1, \dots, N) \tag{4}$$

$$y_{bid,Accept} \geq 0 \quad (bid = s + 1, \dots, N) \tag{5}$$

$$y_{bid,Bluff} \geq 0 \quad (bid = s + 1, \dots, N) \tag{6}$$

$x_{roll,bid}$  はサイコロの出目が  $roll$  のときに  
宣言者が  $bid$  を宣言する確率、  
 $y_{bid,Accept}, y_{bid,Bluff}$  は出目の宣言が  
 $bid$  であるときに推測者がそれぞれ  
Accept、Bluff を推測する確率とする。

$$\frac{\sum_{cs \in \text{caller\_states}} \sum_{gs \in \text{guesser\_states}} \sum_{bid \in \text{next\_bids}} \sum_{guess \in \{\text{Accept}, \text{Bluff}\}} V(a, b, N, cs, gs, bid, guess) x_{cs, bid} y_{gs, bid, guess}}{N^{a+b}} \quad (7)$$

$$\sum_{bid \in \text{next\_bids}} x_{cs, bid} = 1 \quad (cs \in \text{caller\_states}) \quad (8)$$

$$x_{cs, bid} \geq 0 \quad (cs \in \text{caller\_states}, bid \in \text{next\_bids}) \quad (9)$$

$$\sum_{guess \in \{\text{Accept}, \text{Bluff}\}} y_{gs, bid, guess} = 1$$

$$(gs \in \text{guesser\_states}, bid \in \text{next\_bids}) \quad (10)$$

$$y_{gs, bid, guess} \geq 0$$

$$(gs \in \text{guesser\_states}, bid \in \text{next\_bids}, guess \in \{\text{Accept}, \text{Bluff}\}) \quad (11)$$

$V_{a,b/N}(bid, cs, gs)$  は各プレイヤーのサイコロの出目、宣言されたビッド、推測に対応した利得とする。

$x_{cs,bid}$  は宣言者のサイコロの出目が  $cs$  である場合に  $bid$  を宣言する確率、  
 $y_{gs,bid,guess}$  は推測者のサイコロの出目が  $gs$  で、宣言者に  $bid$  のようなビッドを宣言された場合に  $guess$  を推測する確率とする。

# 「先手が3つ、後手が4つのサイコロを持つ」というラウンドの利得を求めることを考える

サイコロの数	後手:1つ	後手:2つ	後手:3つ	後手:4つ
先手:1つ				
先手:2つ				
先手:3つ				
先手:4つ				

# 後ろ向き帰納法を用いるので、最終ビッドから順番に求めていく

サイコロの数	推測者:1つ	推測者:2つ	推測者:3つ	推測者:4つ
宣言者:1つ				
宣言者:2つ				
宣言者:3つ				ビッドn ビッドn-1 ... ビッド1
宣言者:4つ				

# 宣言者あるいは推測者のサイコロを 減少させた部分の利得があれば このターンの利得を求められる

サイコロの数	推測者:1つ	推測者:2つ	推測者:3つ	推測者:4つ
宣言者:1つ				
宣言者:2つ				
宣言者:3つ				ビッドn ビッドn-1 ... ビッド1
宣言者:4つ				

Accept が宣言可能なので、宣言者と推測者を交代したビッドがこれよりも大きいターンの利得も必要になる

サイコロの数	推測者:1つ	推測者:2つ	推測者:3つ	推測者:4つ
宣言者:1つ				
宣言者:2つ				
宣言者:3つ				ビッドn ビッドn-1 ... ビッド1
宣言者:4つ			ビッドn ビッドn-1 ... ビッド1	

# 続けていくと、最終的に このラウンドの利得が求まる

サイコロの数	推測者:1つ	推測者:2つ	推測者:3つ	推測者:4つ
宣言者:1つ				
宣言者:2つ				
宣言者:3つ				ビッドn ビッドn-1 ... ビッド1
宣言者:4つ			ビッドn ビッドn-1 ... ビッド1	

# 実験 Bluff-1 で得られたデータ

使うサイコロの面	先手の利得	先手の勝率 (%)
2	0.5	75.0
3	0.12	56.01
4	0.07	53.84
5	0.13	56.68
6	0.16	58.00
7	0.18	59.09
8	0.19	59.69
9	0.20	60.10
10	0.21	60.60
11	0.21	60.79
12	0.22	61.01
13	0.22	61.31
14	0.22	61.37
15	0.23	61.53
16	0.23	61.67
17	0.23	61.73
18	0.23	61.86
19	0.23	61.92
20	0.23	61.98

# 実験 Bluff-3

サイコロの面を固定し、先手と後手がサイコロを1つずつ持つ場合の宣言者の勝率の変化を調べた。

# 実験 Bluff-3 の結果

6面サイコロについては、以下のように  
なった。

1つ前のビッド	宣言者勝率 %
6が2つ	0
5が2つ	2
4が2つ	11
3が2つ	16
2が2つ	22
1が2つ	27
6が1つ	29
5が1つ	38
4が1つ	47
3が1つ	54
2が1つ	58
1が1つ	58
(未宣言)	58

Table: 先手後手が1つずつ6面サイコロを用いる  
Bluffにおける先手勝率