

“好感度”を導入することによる多人数ゲームの  
研究について  
末續鴻輝（京都大学）

# 目次

- 背景
- 提唱
- 先行研究

# まとめ

- 3人ゲームのよいモデルを！！

# 2人ゲームの深まり

- 理論

- ニムに始まる不偏ゲームの研究
- 非不偏ゲームへの拡張
  - とともに代数的性質を発見、整理

- 人工知能

- チェッカー・チェス・将棋・囲碁← New!
  - 今や多くのゲームで人間並みかそれ以上

# では 3 人以上ゲームの場合は？

- 理論
  - いくつかの先行研究はあり
  - 統一されたモデルと、それに伴う理論は 2 人ゲームほど明らかではない
- 人工知能
  - 2 人ゲームとは違い、話題も多くなく実力も不明
- 3 人以上ゲーム（一応完全情報）例
  - “それはオレの魚だ！”とか

## 二ム

- 石がいくつかの山に分かれて積まれている（山ごとに石の個数は異なってもよい）。
- 対局者は自分の手番において、どれか一つの山を選択し、好きな数だけ石を取る。
- 最後に石を取ったプレイヤーの勝ちとなる。

## ニム (2 人の場合 )

- ニムの各局面において、必勝性を判定する方法は極めて単純である。それぞれの山にある石の個数の排他的論理和を取り、値が 0 になれば後手必勝の局面、そうでなければ先手必勝の局面である。
- 言いかえると、それぞれの山の石の数を 2 進数表記し、2 を法とした繰り上がりのない足し算を行う。結果 0 となるなら後手必勝、そうでなければ先手必勝である。

# 例

- $(3, 4, 5) \dots\dots 2$  進数表記すると

$3 \rightarrow 011$

$4 \rightarrow 100$

$5 \rightarrow 101$

---

010 より、先手勝ち。

# 例

- $(1, 4, 5) \dots\dots 2$  進数表記すると

$1 \rightarrow 001$

$4 \rightarrow 100$

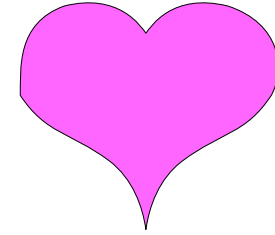
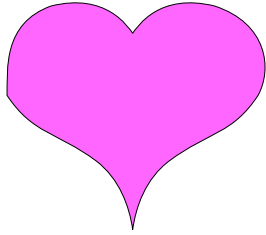
$5 \rightarrow 101$

---

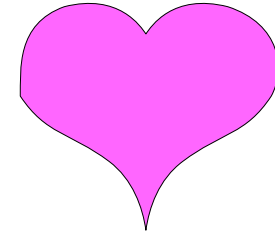
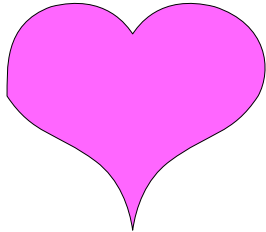
000 より、後手勝ち。

# 3人ゲームの問題点

- 一意に決まらない！
  - 例：ニムで石が1つの山が一つ、2つの山が一つある場合
  - どちらかの山の石をなくす手では、自分の次の人が勝つ。
  - 石2つの山から1つだけ取る手では、自分の次の次の人が勝つ。
  - 自分は勝てない。どっちを選ぶ??



提唱：“好感度”の導入



# 提唱："好感度"の導入

- プレイヤー A, B, C の 3 名がいるとする。
- 3 名とも、自分が勝つことを第一の目標とする。
- 自分が勝てない場合、より勝たせたいプレイヤーが存在する。
- $A:B > C$  と書けば、A は C よりも B に勝たせたいということを意味するとする。

# " 好感度 " を用いた 3 人二ムの解析

- 以下の 8 通りが考えられる。ただし、手番は  $A \rightarrow B \rightarrow C$  の順とする。

①  $A:B > C, B:C > A, C:A > B$     ⑤  $A:B > C, B:C > A, C:B > A$

②  $A:C > B, B:C > A, C:A > B$     ⑥  $A:C > B, B:C > A, C:B > A$

③  $A:B > C, B:A > C, C:A > B$     ⑦  $A:B > C, B:A > C, C:B > A$

④  $A:C > B, B:A > C, C:A > B$     ⑧  $A:C > B, B:A > C, C:B > A$

# " 好感度 " を用いた 3 人二ムの解析

- このうち、②、③、⑤は本質的に等しく、④、⑥、⑦も本質的に等しい

①  $A:B>C, B:C>A, C:A>B$     ⑤  $A:B>C, B:C>A, C:B>A$

②  $A:C>B, B:C>A, C:A>B$     ⑥  $A:C>B, B:C>A, C:B>A$

③  $A:B>C, B:A>C, C:A>B$     ⑦  $A:B>C, B:A>C, C:B>A$

④  $A:C>B, B:A>C, C:A>B$     ⑧  $A:C>B, B:A>C, C:B>A$

# " 好感度 " を用いた 3 人二ムの解析

- このうち、②、③、⑤は本質的に等しく、④、⑥、⑦も本質的に等しい

①  $A:B>C, B:C>A, C:A>B$     ⑤  $A:B>C, B:C>A, C:B>A$

②  $A:C>B, B:C>A, C:A>B$     ⑥  $A:C>B, B:C>A, C:B>A$

③  $A:B>C, B:A>C, C:A>B$     ⑦  $A:B>C, B:A>C, C:B>A$

④  $A:C>B, B:A>C, C:A>B$     ⑧  $A:C>B, B:A>C, C:B>A$

# " 好感度 " を用いた 3 人二ムの解析

- 2 人ゲームのときと同様、ゲームの終了局面から再帰的に誰が勝つ局面かを求めると、特に  
①  $A:B > C, B:C > A, C:A > B$  の場合顕著な結果が得られるので紹介する。

## 3 番手必勝になる局面

- $(0,1,1,1)$  ,  $(0,2,2,2)$  ,  $(0,3,3,3)$  ,  $\dots$  ,  
 $(1,2,3,3)$  ,  $\dots$  ,  $(2,4,6,6)$  ,  $\dots$  ,  $(3,5,6,7)$  ,  $\dots$  ,  
 $(3,13,14,15)$  ,  $\dots$   $(7,9,14,15)$  ,  $\dots\dots$

規則性は !?

# 結果

①  $A:B > C, B:C > A, C:A > B$  の 3 人ニムにおいて、  
それぞれの山の石の数を 2 進数表記し、

# 結果

①  $A:B > C, B:C > A, C:A > B$  の 3 人ニムにおいて、それぞれの山の石の数を 2 進数表記し、**3** を法とした繰り上がりのない足し算を行う。結果 0 となるなら **3 番手の必勝**、そうでないなら 1 番手か 2 番手の必勝となる。

# 結果

①  $A:B > C, B:C > A, C:A > B$  の 3 人ニムにおいて、それぞれの山の石の数を 2 進数表記し、**3** を法とした繰り上がりのない足し算を行う。結果 0 となるなら **3 番手の必勝**、そうでないなら 1 番手か 2 番手の必勝となる。

- ※ あとで紹介する Li のモデルでも同じ結果が得られる

# 復習.....ニム (2 人の場合 )

- ニムの各局面において、必勝性を判定する方法は極めて単純である。それぞれの山にある石の個数の排他的論理和を取り、値が 0 になれば後手必勝の局面、そうでなければ先手必勝の局面である。
- 言いかえると、それぞれの山の石の数を 2 進数表記し、2 を法とした繰り上がりのない足し算を行う。結果 0 となるなら後手必勝、そうでなければ先手必勝である。

# 結果

①  $A:B > C, B:C > A, C:A > B$  の 3 人ニムにおいて、それぞれの山の石の数を 2 進数表記し、**3** を法とした繰り上がりのない足し算を行う。結果 0 となるなら **3 番手の必勝**、そうでないなら 1 番手か 2 番手の必勝となる。

- ※ あとで紹介する Li のモデルでも同じ結果が得られる

# 例

- $(3, 5, 6, 7) \dots\dots 3$  を法として繰り上がりなく和を取る

$3 \rightarrow 011$

$5 \rightarrow 101$

$6 \rightarrow 110$

$7 \rightarrow 111$

---

000 より、 3 番手必勝

# 証明.....概略

- 帰納法を用いる。

3 を法として 0 になる局面から、一手進むと、いずれかの桁の値が 2 になる。従って、1 番手は勝つことはできないし、2 番手に勝たせることもできない。

1 番手が着手したあとは、いずれかの桁が 2 なので 2 番手は勝てないが、2 番手には、次に 3 番手が 3 を法として 0 になる局面にできるようにする着手が存在する。

# n 人ニムへの拡張

- $n$  ( $n$ : 自然数。  $n > 3$ ) 人ニムでも同様に、全てのプレイヤーにおいて、自分の次の手番のプレイヤーの好感度が最も高く、順に下がっていくような場合は、それぞれの山の石の数を2進数表記し、 $n$  を法とした繰り上がりのない足し算を行う。結果 0 となるなら  $n$  番手の必勝、そうでないなら他のいずれかのプレイヤーの必勝となる。

# 多人数ゲームの先行研究

# Li の研究

- 不偏ゲームに“順位”を導入
- 1位：最後に打った人、2位：その直前に打った人、3位：さらにその直前に打った人、……
- 自分が勝てない場合、次の人を勝たせようと動き、それもだめな場合はその次の人……となるので、結果として“好感度”を入れている正規形と変わらない。

# Li の研究

- 非不偏ゲームに拡張した場合、勝敗が一意に定まらない（最後の一人まで続けるルールにする）。
- 例：Aの手番で” Bが1位、Aが2位、Cが3位  
かCが1位、Aが2位、Bが3位”しか選べない状況をXとする。
- Cの手番で” Cが2位 か X”しか選べないときどっちを選ぶ？
- 前者は確実に2位、後者は1位のチャンスがあるが3位になる可能性もある。

# Philip D. Straffin, Jr の研究

- 3人ゲームは、
- Aが勝つ
- Bが勝つ Cが勝つ
- AがB,Cのいずれを勝たせるか決められる
- BがC,Aのいずれを勝たせるか決められる
- CがA,Bのいずれを勝たせるか決められる  
のいずれかに分類できる

# Philip D. Straffin, Jr の研究

- ただし、McCarthy's Revenge Rule を導入した上で。
- 「プレイヤー A が、プレイヤー B または C のいずれかを勝たせる状況に追い込まれた場合、自分をその状況に追い込んだプレイヤー (B または C) を敗北させるように決断する。ただし、自分をその状況に追い込んだプレイヤーが不可抗力的にそうしたならばこれは適用されない」

# 個人的には

- 3人ゲームは
- Aが先手で {Aが・Bが・Cが} 勝ち
- Bが先手で {Aが・Bが・Cが} 勝ち
- Cが先手で {Aが・Bが・Cが} 勝ち
  
- $3 \times 3 \times 3 = 27$  通り？

# James Propp の研究

- "勝てないプレイヤー" も最善を目指すという考え方に違和感
- "N 局面：必ず 1 番手が勝てる局面"、
- "0 局面：必ず 2 番手が勝てる局面"、
- "P 局面：必ず 3 番手が勝てる局面" の他に、
- "Q 局面：2 人以上のプレイヤーに勝利の可能性がある局面" を導入

# " 好感度 " の価値

- " 好感度 " の導入は、現在得られている結果としてはLiの結果と大差ないとしても、非不偏ゲームに応用可能という点で発展性はある。

# 3 人ゲーム研究のこれから

- 重要なのは非不偏ゲームにおいても、2人ゲームと同様に豊かな代数的構造があるかどうかである。
- "好感度"の導入をしても、今のところ見つけられていない。（例えば、2人ゲームでは全ての後手必勝ゲームは（ゲームの同値性という意味で）空ゲームと等しいという性質があったが、3人ゲームでは同じ同値性でも3番手必勝ゲームで空ゲームと等しいのは空ゲームのみ）

# 3 人ゲーム研究のこれから

- 現実には、3人以上ゲームではその場の“勘”に頼ったり、最初から優先度を決めずその場の流れで片方に肩入れするなども起こりえる。このため組合せゲームの研究対象としてまだまだ立場が弱いが、一意に結果を確定させることのできるよいモデルがあれば分野としての盛り上がりを見せることもあるのではないだろうか。

# 参考文献

- S.-Y. R. Li, N-person Nim and N-person Moore's games, Internat. J. Game Theory 7(1978), 31-36
- P.D. Straffin, Jr., Three Person Winner-Take-All Games with McCarthy's Revenge Rule, College J. Math. 16(1985), 386-394.
- James Propp, Three-player impartial games, <http://faculty.uml.edu/jpropp/three.pdf>