

七金三パズルで作れる 凸多角形の全列挙

タングラム: 13種類



清少納言知恵の板: 16種類



62!

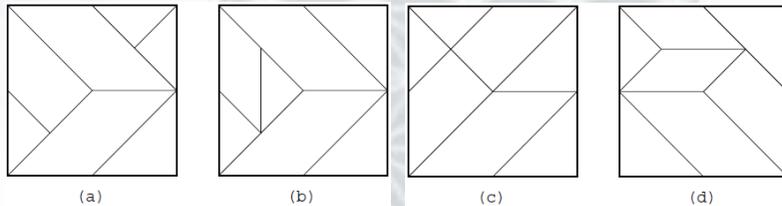
堀山 貴史 (埼玉大学)

○上原 隆平 (JAIST)

細矢 治夫 (お茶の水女子大学)

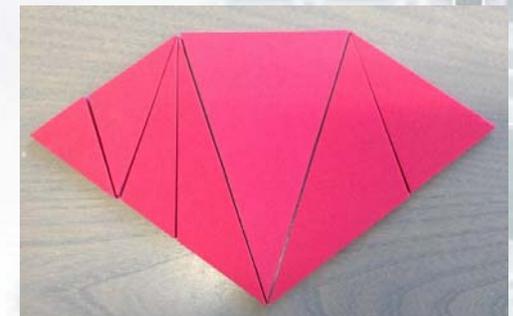
19種類作れる Jangrams が4種類

[Fox-Epstein, Katsumata, Uehara 2015/6]



どう?

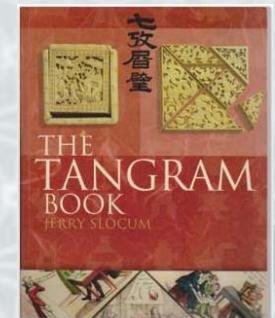
七金三パズル:
黄金比三角形に基づく
セブンスパズル



シルエットパズルの古典： 清少納言知恵の板 vs タングラム

『絵と形のパズル読本』(秋山久義)や
“The Tangram Book” (Jerry Slocum) によると、

- どちらも7枚の板でできている
- この手のパズルの最古
 - タングラムは1813年の文献
 - 知恵の板は1742年の文献
がある



マーティン・ガードナー (1914-2010)



この手の単純な並べ替えパズルは、ときには、まったく非自明な数学的な問題と呼び起こすことがある。例えば、7枚のタンを使って作ることでできる異なる凸多角形（180度を超える内角が存在しない多角形）を、すべて見つけたいとしよう。あなたが仮に膨大な試行錯誤の果てにすべてを見つけたとしても、それが本当に可能なすべてであることを証明するには、いったいどうしたらよいだろう。中国東部の省、^{せつこう}浙江の二人の数学者は、まさにこの問題に関する論文を1942年に出版した^{◆177}。彼らの解法は非常に巧妙だ。大きい5枚のタンは、どれも二つの小さいタンと合同な直角二等辺三角形に分割できるので、7枚のタンをすべて集めた形は、16枚の合同な直角二等辺三角形から作ることができる。巧みな議論を積み重ねることで、二人の中国人数学者は、16枚のこうした三角形から作ることができる凸多角形は、（回転や裏返しで同じ形になるものを除いて）20種類であることを突き止めた。この20種類の多角形のうち、ちょうど13種類だけがタングラムで作れることを証明するのは、それほど難しくはない。

Origami,
Eleusis,



and the
Soma Cube

MARTIN GARDNER

レクリエーション数学はこのシリーズ抜きに語れない!

完全版
マーティン・ガードナー
数学ゲーム全集 **新刊**

マーティン・ガードナー...
岩沢宏和・上原隆平...
今も数学パズルの世界に決定的な影響を与え続ける
名コラム「数学ゲーム」志、パズル界異色の二人が邦訳。

① ガードナーの
数学パズル・ゲーム
フレクサゴン・確率パラドックス・ポリオミノ
●定価 ¥2,200円+税

② ガードナーの
数学娯楽
ソーマキューブ・エレウシス・正方形の正方分割
●定価 ¥2,600円+税

日本評論社
http://www.jpcc.co.jp

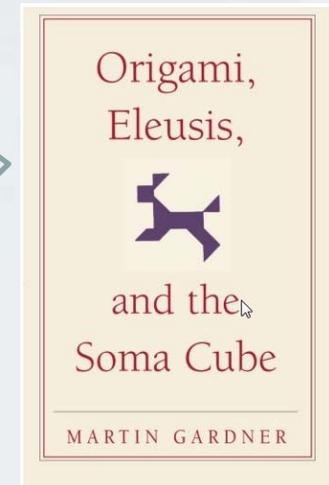
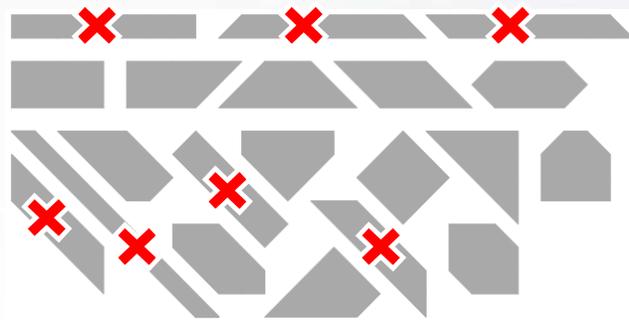
CM
2016年春、
和訳3冊目
がでます!

知恵の板
も同様

タングラムで作れる凸多角形は**13種類**である。

証明の概略:

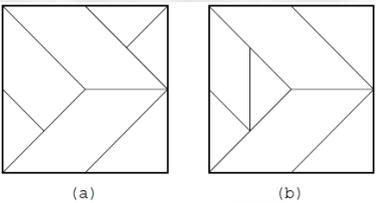
- タングラムは直角二等辺三角形16枚を
適当につないで作れる
- この16枚で作れる凸多角形は全部で
20種類である
- うち13種類は(がんばれば)作れる
- 残った7種類は(一番大きい△が入らない
ので)作れない



知恵の板/Jangramの結果(一部)

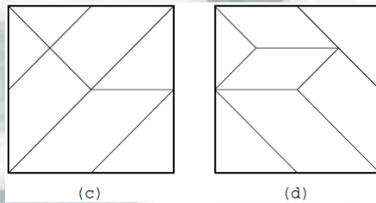
1. 清少納言知恵の板は、20通りのうち、16種類作れる。
(タングラムの13より三つも多い！)

- タングラムより知恵の板の方が賢い！？



2. 「同様の分割」で7ピースに分けると、20通りのうち、19種類作れるパターンが4つある: Jangram

- どんな7ピースでも、20通りすべて作ることはできない



詳しくは[Fox-Epstein, Katsumata, Uehara 2016]→

(元になったアイデアが秀逸だったので)

手作業の場合わけでもなんとかあった。

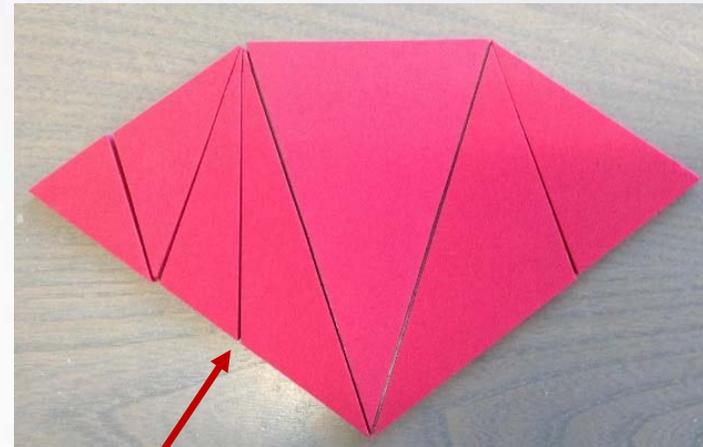
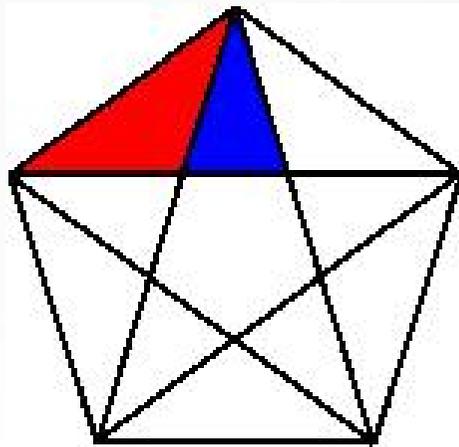
知恵の板/Jangramの一般化

- 以下の単純/素直な一般化は、かなり難しそう...
入力: 7ピースのパズル
出力: シルエットで作れるすべての凸多角形
- 関連しそうな結果と観察:
 - 以下の問題はNP完全 ([Ku, et. al, *JCDCG² 2015*]の線対称パズルの還元):
 - 入力: $n-1$ 個の $1 \times k$ の長方形たちと、あと一つの凹な直角な多角形
 - 出力: 長方形にできるか?
 - ピースとして「一般の形」を許すと...
 - 任意の $n > 2$ に対して、 2 ピースで 2^n 種類の異なる凸多角形が作れるピースがある [植松 2015]
 - 任意の $n > 4$ に対して、 $n+1$ ピースで $4n$ 頂点で 2^{2n} 種類の異なる凸多角形が作れるピースがある
 - 実数計算の誤差の問題も出てきそう: 「異なる」「凸」「360度」などなど

七金三パズル: ほどよい一般性をもつ興味深いパズル

➤ 2015年発売のシルエットパズル.

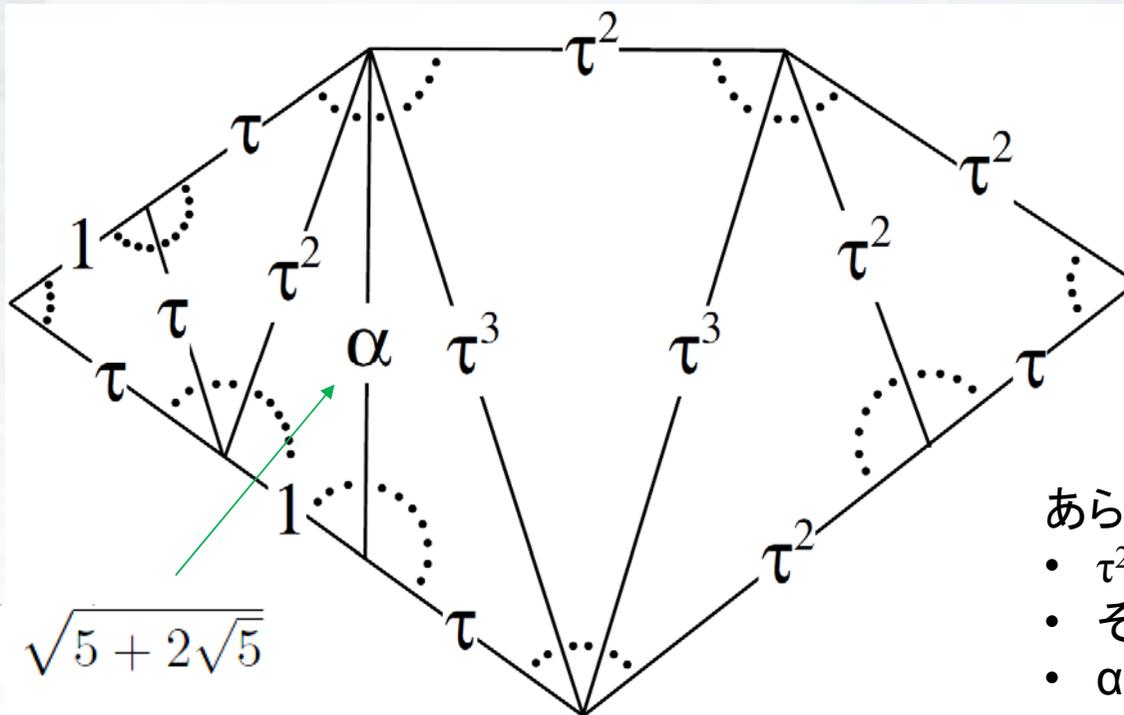
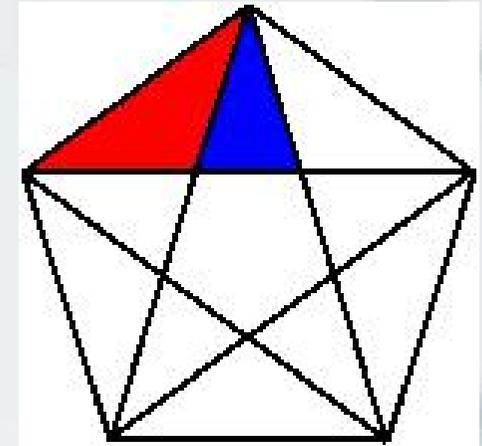
- デザイナーは細谷治夫先生, 発売はイメージミッション木鏡社. 秋葉原のトリトなどで買えます.
- 基本は以下の黄金比三角形+ α



この分割がアクセント

七金三パズル: ほどよい一般性

➤ 2015年発売のシルエットパズル.



$$\alpha = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$$

あらゆるところに黄金比 τ があり

- $\tau^2 - \tau - 1 = 0 \rightarrow$ どれも1次式で書ける
- それぞれの角度も「整数 $\times 18^\circ$ 」
- α だけアクセントだが...

七金三パズル: ほどよい一般性

課題: 七金三パズルで作れる凸多角形の全列挙.

● 多角形Pの表現

- 辺長リスト $(l_0, l_1, \dots, l_{n-1})$
 - それぞれの l は $(a+b\tau+c\alpha)$ なので, (a, b, c) の整数の3ッ組
- 角度リスト $(d_0, d_1, \dots, d_{n-1})$
 - それぞれの d は $18 \times d$ と思えば, 整数で表現できる.
- それぞれをマージした $(d_0, d_1, \dots, d_{n-1}, l_0, l_1, \dots, l_{n-1})$ の辞書式に最小のものを「Pの標準形」として採用
- アルゴリズム: とりあえず馬鹿サーチで全部やった

七金三パズル: ほどよい一般性

課題: 七金三パズルで作れる凸多角形の全列挙.

- アルゴリズム: とりあえず馬鹿サーチで全部やった
 - それぞれのピースが1回ずつ出て来るように,
 - 辺同士を角を合わせて接着し,
 - 180度, 360度のところをうまく処理する
 - 生成される多角形を全部作る
 - ギロチンカットだけでできれば, 生成される凸多角形だけを管理すればよかったが, それではダメだった.
- 最後に凸多角形だけを出力. **62種類**できた!
 - (それまでの人力では10種類程度見落としがあった)

Future work: 賢い高速な生成方法...

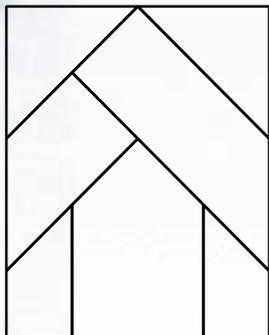
堀山さんが

せっかく馬鹿サーチを作ったので実験.

課題: 各種パズルを解析

スペック:
CPU: Intel Core
i7-3770K 3.5GHz
Memory: 32GB

- 七金三パズル: 675秒, 53574個の多角形, 凸は62個.
- タングラム: 65秒, 12400個の多角形, 凸は13個.
- 清少納言: 40920秒, 222806個の多角形, 凸は16個.
- ラッキーパズル: 2週間以上かけても終わらない...



左右の下のピースのおかげで、「 $\triangle \times 20$ 」でなく、「 $\triangle \times 40$ 」になってしまって、タングラムたち（ $\triangle \times 16$ ）と同じ方法では、ムリそう。

凸多角形は21種類作れるといわれていて、パターンもわかっているが、「他にない」という数理的/計算機による検証は見つけられなかった...

ちゃんとした文献があれば、どなたか教えてください。