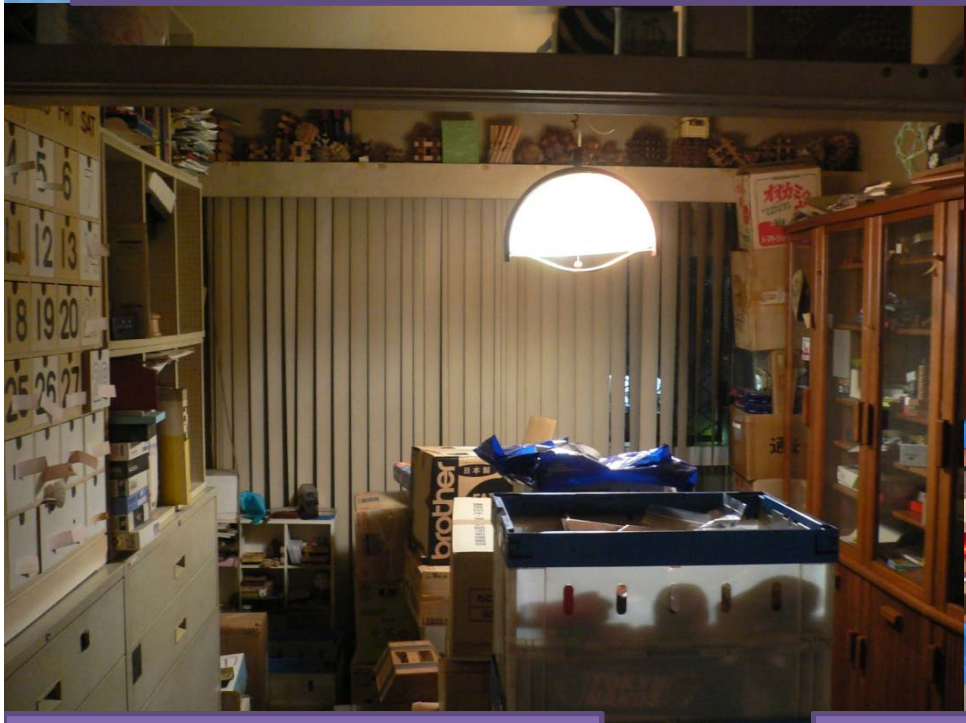
On Complexity of Flood Filling Games on Interval Graph Classes

Hiroyuki Fukui (JAIST),
Ryuhei Uehara (JAIST),
Takeaki Uno (NII), and
Yushi Uno (Osaka Pref. University)

On Complexity of

おまけ情報：Nobパズルコレクションの行方



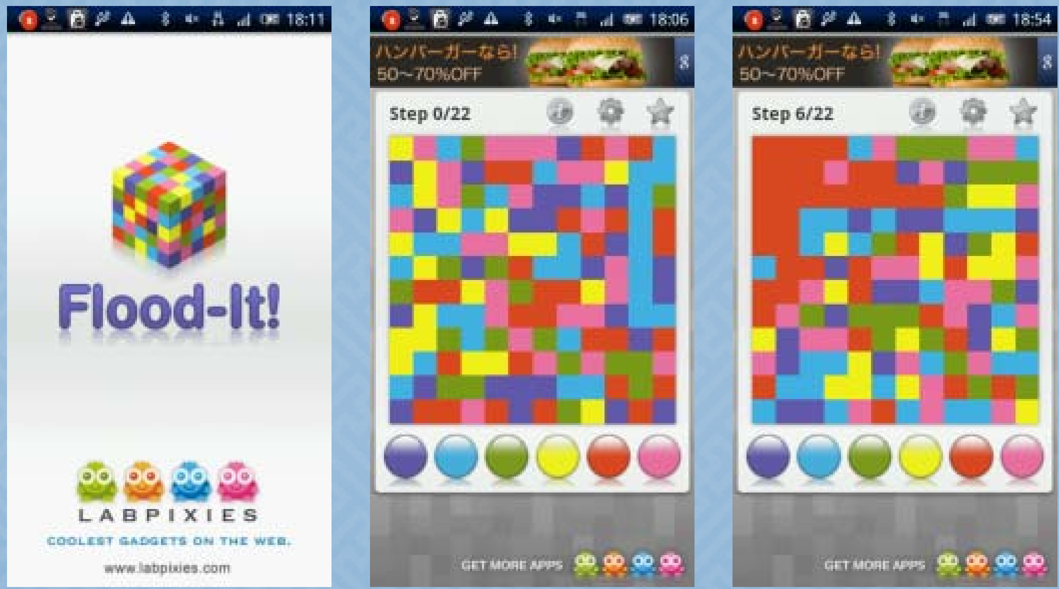
2011年5月の状況

2012年9月29日：JAISTにパズル博物館オープン
2012年3月現在：1600個程度写真撮影終了

Hiroyu
Ryuhei
Takeaki Uno (NII), and
Yushi Uno (Osaka Pref. University)

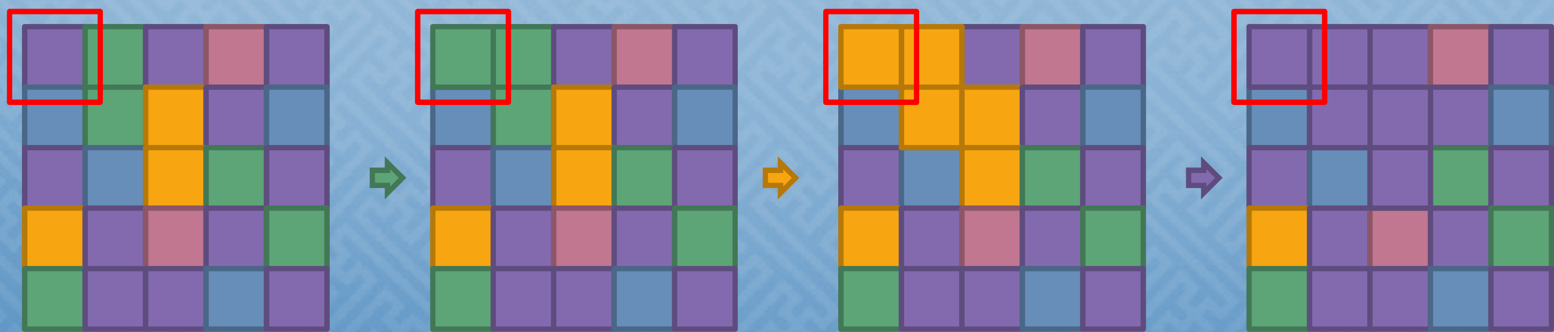
The game “Flood It!”

- You are given a colored board…



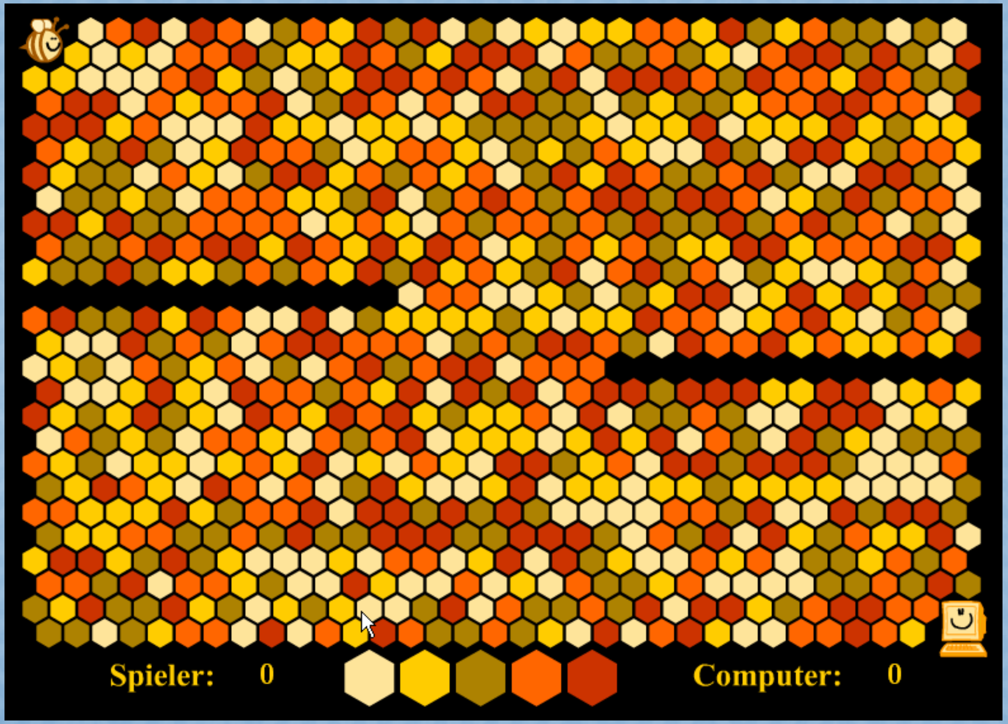
The rule is…

1. you can change the color of the top-left cell
2. Two cells keep the same color once they colored with the same color
3. Game ends if all cells get the same color
4. Goal: minimize the number of operations.



The game “Honey-Bee” game

- Two player version of the Flood-It.

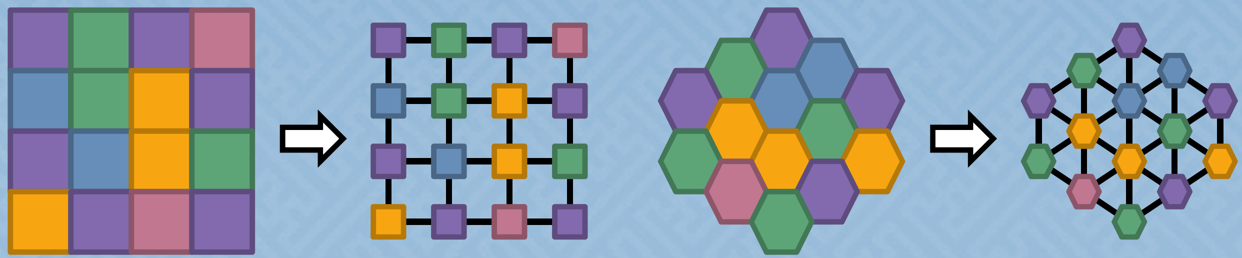


The rule is…

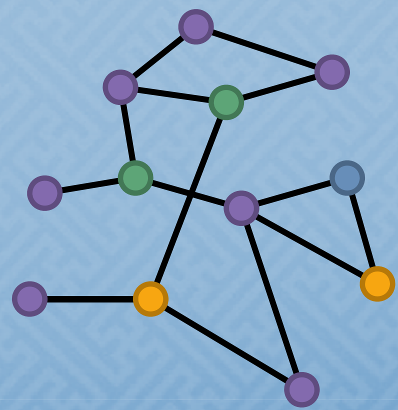
1. human can change the color of the top-left cell (except comp’s color)
2. computer change the color of the bottom-right cell (except human’s color)
3. Game ends if all cells are dominated by one of them
4. Goal: get more than half cells

Generalization!!

- It is natural to generalize …
  - Game board: general connected graphs (color a vertex in a turn)



  - The specified cell:
    - Fixed: you only color one specific cell
    - *Free*: you can <u>choose</u> and color any cell
  - The other parameters can be…
    - graph classes
    - number k of colors (fixed/non-fixed)
    - (number of players)…今日は一人ゲームのみ考える



Known results & Ou

fixed: 色を変える頂点が決まっている
free: 好きな頂点の色を変えられる
k: 色の数

	fixed	fixed, constant k	free	free, constant k
general (treeでも)	NP-C	NP-C ($k \geqq 3$) [ACJ+10] P ($k \leqq 2$)	NP-C	NP-C ($k \geqq 3$)[ACJ+10] P ($k \leqq 2$) [LNT11]
grid(□△⬡)	NP-C	NP-C ($k \geqq 3$) [LNT11]	NP-C	NP-C ($k \geqq 3$)[LNT11]
path/cycle	$O(n^2)$ [LNT11]	$O(n^2)$[LNT11]	$O(n^3)$ [FNU+11]	$O(n^3)$ [FNU+11]
cocomparability	P[FW10]	P [FW10]	P [2]	P [2]
split	NP-C[FW10]	P [FW10]	NP-C	$O((k!)^2+n)$
proper interval	P [1]	$O(8^k k^2 n^3)$	NP-C	$O(8^k k^2 n^3)$
interval	P [1]	$O(8^k k^2 n^3)$	NP-C	$O(8^k k^2 n^3)$

k に関して fixed parameter tractable.

[ACJ+10] D. Arthur, R. Clifford, M. Jalsenius, A. Montanaro, and B. Sach: The Complexity of Flood Filling Games, FUN 2010.
[LNT11] A. Lagoutte, M. Naual, and E. Thierry: Flooding ga
[FW10] R. Fleischer, G. J. Woeginger: An Algorithmic Analysis of the Honey-Bee Game, FUN 2010.
[FNU+11] H. Fukui, A. Nakanishi, R. Uehara, T. Uno, and Y. Uno: The Complexity of Free Flood Filling Game, WAAC 2011.

準備

- グラフ $G=(V,E)$ が interval graph ⇔
  Vの各要素vに対して区間Ivが対応して、$\{u,v\} \in E$ である
  必要十分条件が $Iv \cap Iu \neq \Phi$と表現できる（区間表現）

- interval graph G が proper interval graph ⇔
  どの区間も互いに包含しないようなGの区間表現が存在

NP-completeness of…

[Thm] The game is NP-complete in the case of

(free/proper interval graph/色数無制限)

[Proof] Vertex Cover (VC)からの帰着

入力: $G=(V,E)$, c
出力: G は大きさ c のVCをもつか？

頂点集合 S が VC ⇔ Gの任意の辺$e=\{u,v\}$に対して、$e \cap S \neq \Phi$

与えられたインスタンス$G=(V,E)$, cに対して以下の proper interval graph G' を構成:

NP-completeness of…

[Thm] The game is NP-complete in the case of
(free/proper interval graph/色数無制限)

ポイント:
各辺区間対から両側に向けて塗っていくのが効率がよい

[Proof] 与えられたインスタンス$G=(V,E)$, cに対して以下の proper interval graph G' を構成:

① 等間隔に $|E|+1$ 個の区間を並べて色bで塗る

② 各 $e=\{u,v\}$ に対して区間 $Iu=Iv$ を並べる(順不同
区間Iuを色uで塗る

ポイント:
辺区間対からbまでは独自の色の並び
かつ対からbまで同じ並び

③ 各「辺区間対」からb区間までを長さmのパスでつなぐ

G

G'

NP-completeness of…

[Thm] The game is NP-complete in the case of

(free/proper interval graph/色数無制限)

[Proof] 与えられたインスタンス$G=(V,E)$, cに対して以下の proper interval graph G' を構成:

- 構成されたG'はproper interval graph
- 構成は多項式時間還元

★ $|E|m+|VC|$回色を塗れば、全部の色をbにでき、これが最適

G G'

NP-completeness of…

[Thm] The game is NP-complete in the case of

(free/proper interval graph/色数無制限)

★ $|E|m+|\mathrm{VC}|$回色を塗れば、全部の色をbにでき、これが最適

1. まず辺ペアの一方の辺を選び、そこからbまでつなぐ($m \times |E|$回)
2. 全体を張るbの長い区間を使って「塗り残し」に色を塗る
   - 各辺$\{u,v\}$ごとに一方が塗り残しになる
   - この「塗り残し」はVCを使うと最小化できる

G G'

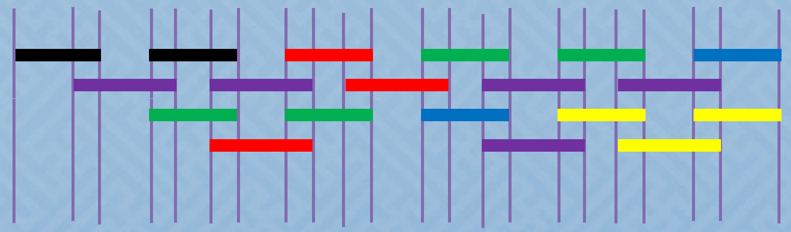
Poly-time alg. on prop. int. graph

[Thm] The game is poly-time solvable in the case of
(free/proper interval graph/色数≦k)

[Proof] Based on Dynamic Programming.

① 区間表現を構築(prop. int. graph では一意的に決まる)

② 区間を「同じ色集合を持つ部分区間」のパスとみなす
（各部分区間は 2^k-1 色のどれかで塗られている）

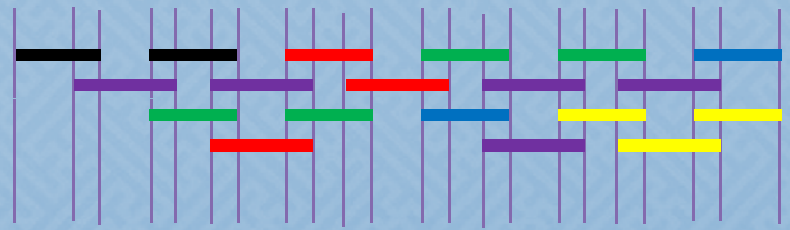


★単純なパスのアルゴリズムは使えない！
ある区間の色を変えると、隣接する部分区間だけでなく、
さらに遠くにも影響がある。

Poly-time alg. on prop. int. graph

[Thm] The game is poly-time solvable in the case of
(free/proper interval graph/色数≦k)

[Proof] Based on Dynamic Programming.
① 区間表現を構築(prop. int. graph では一意的に決まる)
② 区間を「同じ色集合を持つ部分区間(セル)」のパスとみなす
(各部分区間は 2^k-1 色のどれかで塗られている)



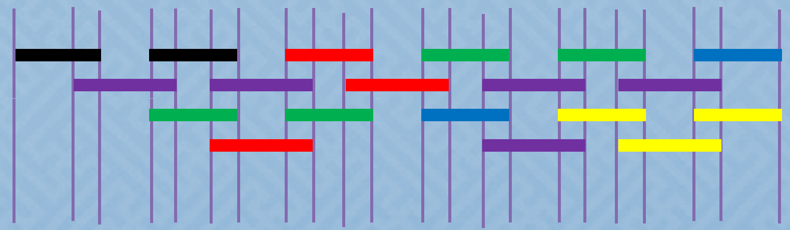
単純なパスのアルゴリズム:
管理するテーブルは
$T[i,j,c]$: 区間$[i..j]$を色cで塗るための最小手数

管理するテーブル:
$T[i,j,c,\underline{\mathbf{S}}]$: 区間$[i,j]$のすべてのセルに色$c$が含まれるまでの最小手数
ただし塗り残しがあってもよく、塗り残し色の集合⊆S

Poly-time alg. on prop. int. graph

[Thm] The game is poly-time solvable in the case of
(free/proper interval graph/色数≦k)

[Proof] Based on Dynamic Programming.
① 区間表現を構築(prop. int. graph では一意的に決まる)
② 区間を「同じ色集合を持つ部分区間(セル)」のパスとみなす
(セルの数をPとすると$P≦2n$)



$T[1,P,c,S]+|S|$の最小値を求めればよい！！
…$O(8^k k^2 n^3)$

管理するテーブル:
$T[i,j,c,S]$: 区間$[i,j]$のすべてのセルに色cが含まれるまでの最小手数
ただし塗り残りがあってもよく、塗り残し色の集合⊆S

一般の区間グラフへの拡張

- 区間表現が一意的には決まらない
- MPQ木というデータ構造を使うと、同様にできる
- 計算量は変わらないが、アルゴリズムは複雑

残された課題

- 区間グラフのアルゴリズムを単純化
- cocomparability graph は多項式時間でできるけど….

				, tant k
general (treeでも)	NP-C	NP-C ($k \geqq 3$) P ($k \leqq 2$)	NP-C	NP-C ($k \geqq 3$) P ($k \leqq 2$)
grid(□△⬡)	NP-C	NP-C ($k \geqq 3$)	NP-C	NP-C ($k \geqq 3$)
path/cycle	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(n^3)$	$O(n^3)$
cocomparability	P	P	P(?)	P(?)
split	NP-C	P	NP-C	$O((k!)^2+n)$
proper interval	P	$O(8^k k^2 n^3)$	NP-C	$O(8^k k^2 n^3)$
interval	P	$O(8^k k^2 n^3)$	NP-C	$O(8^k k^2 n^3)$