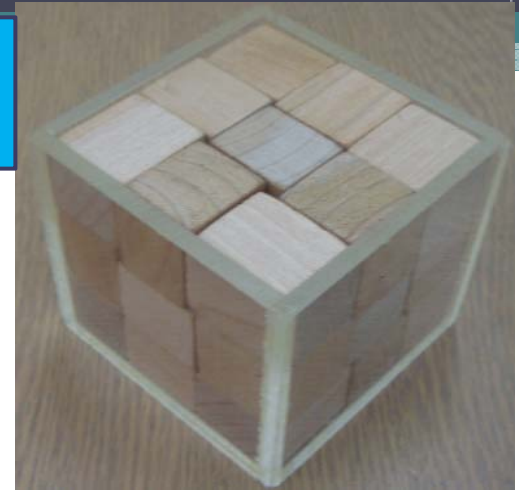


Knuth による

# Hoffmanパズルの拡張とその解析

北陸先端科学技術大学院大学  
情報科学研究科  
後藤新 & 上原隆平

パズルショップ  
「トリト」で購入可能。

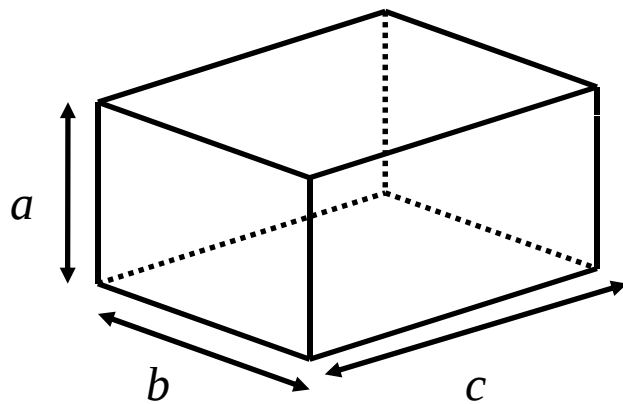


## Hoffmanパズル

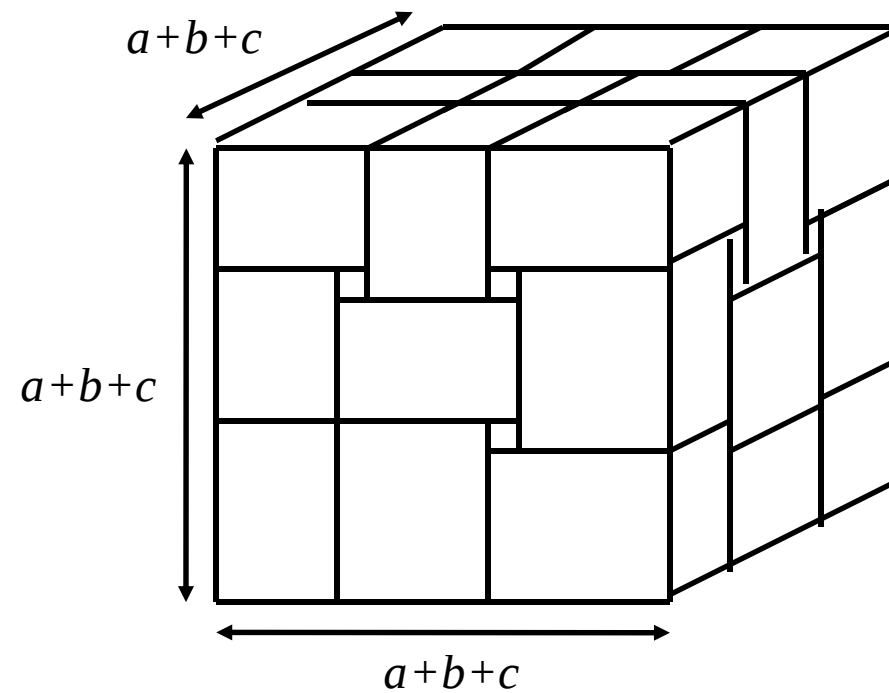
- 古典的な詰め込みパズルの一種
  - 3辺の長さが  $a < b < c$  である27個の直方体を1辺が  $a+b+c$  の立方体の箱に詰める
- 歴史
  - 1978年 Hoffmanが考案
  - 1981年 CutlerとConwayが解は21通りであることを示した。

パズルとしては相当難しいです。

# Hoffmanパズル



ピース



箱

# Hoffmanパズル

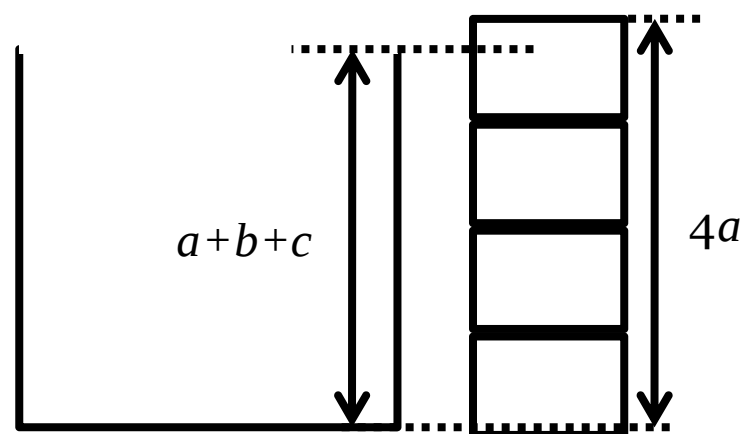


- 古典的な詰め込みパズルの一種
- このパズルでは次の条件が成立することを仮定している（以下、Hoffman条件という）

$$\frac{1}{4}(a + b + c) < a < b < c$$


$$a + b + c < 4a$$

- 「自然な」27個の詰め込みしか許さない



## Knuth による拡張（HKパズル）

- 2004年 KnuthがHoffman条件を以下に拡張：

$$\frac{a+b+c}{4} = a < b < c \quad (\text{以下、HK条件という})$$

- 2005年 George Miller がIPP  
(International Puzzle Party; closed)で  
 $(a, b, c) = (3, 4, 5)$   
を配布した（らしい）

- 28ピース詰め込む方法が3通りある（らしい）

# 今回の結果

- Hoffmanパズル(27ピース)の解析
  - Hoffman条件が成立する任意の  $a < b < c$  で21通りの解があることを確認（たぶん既知？）
- HKパズル(28ピース)の解析
  1. HKパズルの解を全部求めた
    - 「本質的に」 3通り、全部で20通り (Knuthの後追い?)
  2. 解が存在する条件を明確にした
    - HK条件を満たす任意の  $a < b < c$  に対して解が存在するわけではない
  3. 29ピース以上は絶対に入らないことを証明した

# 今回の反則

- 2010年 石野恵一郎氏が $(a, b, c) = (4, 5, 7)$ というケースについて解を全部求めてくれた
  - たぶんパズルソルバー (BurrTools) を巧妙に使用
  - 「たぶんKnuthの結果の再確認なので」との理由で遠慮されたので、謝辞のみ：  
どうもありがとうございます！

# 今回の結果

- HKパズル(28ピース)の解析
  1. HKパズルの解を全部求めた (石野さんに感謝)
    - 「本質的に」 3通り、全部で20通り (Knuthの後追い?)

局所的な回転や  
入れ替えによる  
バリエーション

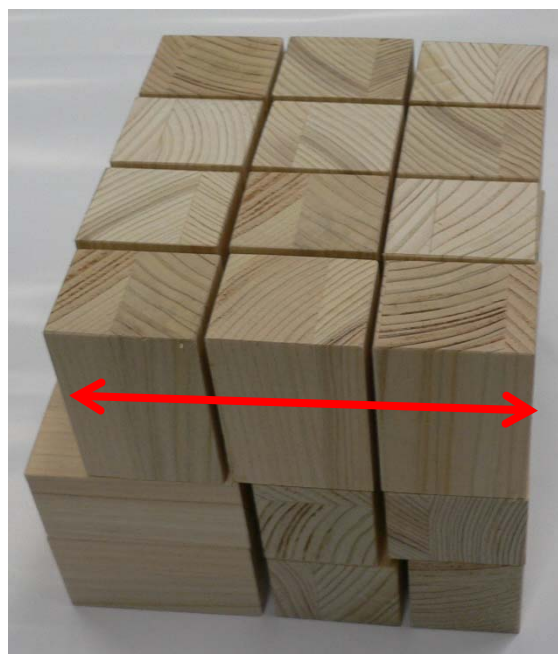
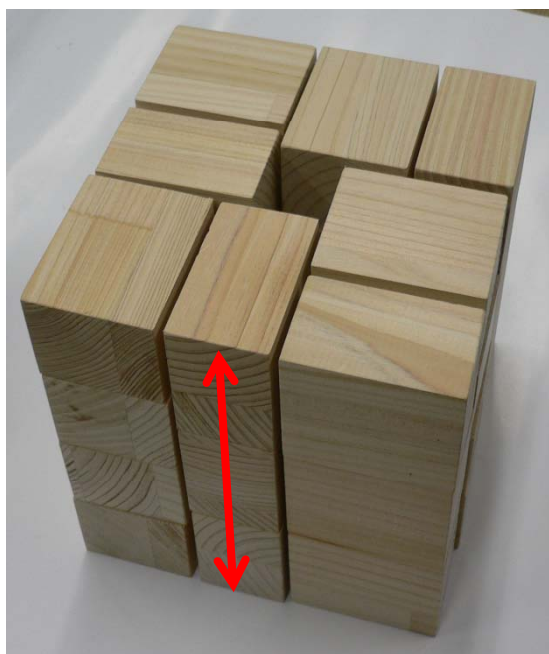


# 今回の結果

- HKパズル(28ピース)の解析
  1. HKパズルの解を全部求めた
    - 「本質的に」 3通り、全部で20通り (Knuthの後追い?)
  2. 解が存在する条件を明確にした
    - 任意の  $a < b < c$  に対して解が存在するわけではない
    - 上記の解をよーく見ると、  
[HK条件]  $a + b + c = 4a$  だけではなく  
$$3b \leq a + b + c$$
も必要であることがわかった

# 今回の結果

- HKパズル(28ピース)の解析
  1. HKパズルの解を全部求めた（石野さんに感謝）
    - 「本質的に」 3通り、全部で20通り (Knuthの後追い?)



全部まとめると...

$$a < b \leq \frac{4a}{3}$$

$$\frac{5a}{3} \leq c < 2a$$

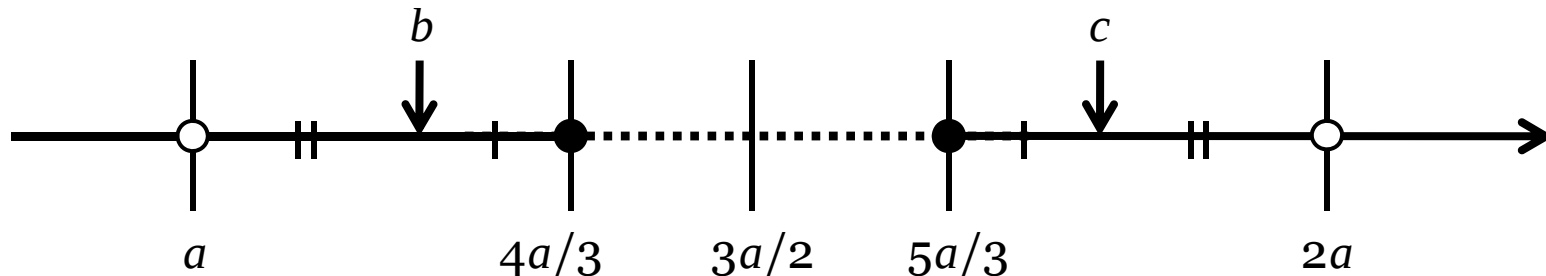
$$\frac{3}{2}a - b = c - \frac{3}{2}a$$

## 今回の結果

- HKパズル(28ピース)の解析

- 2. 解が存在する条件を明確にした

[HK条件]  $a + b + c = 4a$  だけではなく  $3b \leq a + b + c$  も必要であることがわかった



○(3,4,5),(4,5,7),(5,6,9),...28個入る！！

×(5,7,8),(7,10,11),(8,11,13),...28個入らない！！

## 今回の結果

- HKパズル(28ピース)の解析
  - 3. 29ピース以上は絶対に入らないことの証明
    - 32ピース以上入らないことの証明  
 $k$  ピース入るとすると、以下が成立：
$$(a + b + c)^3 \geq kabc$$
 $a < b < c, (a+b+c)=4a, 3b \leq a+b+c$  を入れて整理すると  $k < 32$  を得る。



多くの場合分けを行うと「30ピース入らない」あたりまでは到達できる...

# 今回の結果

- HKパズル(28ピース)の解析
  - 3. 29ピース以上は絶対に入らないことの証明
    - 29ピース入ったと仮定する
    - ブロックが長さ $a$ の辺で4つ並んだところがある
    - そこからブロックを1つ取り除くと「長さ $a$ の辺で3つ並んだ場所がある」28ピースの詰め込みが1つ得られる
    - しかし「可能な28ピースの詰め込み」にはこうした解は存在しない ■

## まとめ（１）

- Hoffmanパズル(27ピース)の解析
  - Hoffman条件が成立する任意の  $a < b < c$  で21通りの解があることを確認（たぶん既知？）
- HKパズル(28ピース)の解析
  1. HKパズルの解を全部求めた
    - 「本質的に」 3通り、全部で20通り (Knuthの後追い?)
  2. 解が存在する条件を明確にした
    - 任意の  $a < b < c$  に対して解が存在するわけではない
  3. 29ピース以上は絶対に入らないことを証明した

## まとめ（２）

- HKパズル(28ピース)のさらなる拡張
  - ブロックが「細長い」とたくさん入る
    - ・  $k$ ピース詰め込める  $a, b, c$  に関する条件は？
- 謝辞
  - HKパズルの解を求めてくれた石野恵一郎氏
  - IPPの情報などを提供してくれた岩沢宏和氏
  - HKパズルの現物を作ってくれた中川宏氏