フレームで凸体をつかむ

徳重 典英
琉球大学 教育学部

2011年3月10日 京都大学

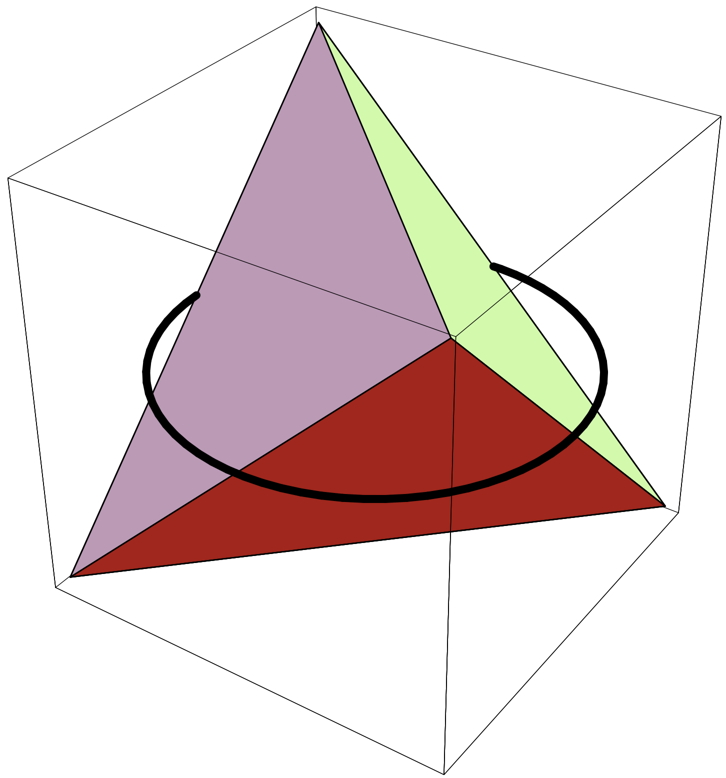
この話は

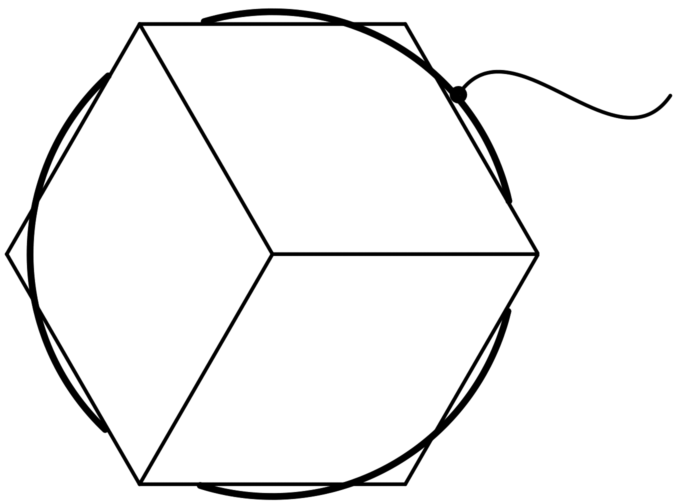
Imre Bárány　前原 闊

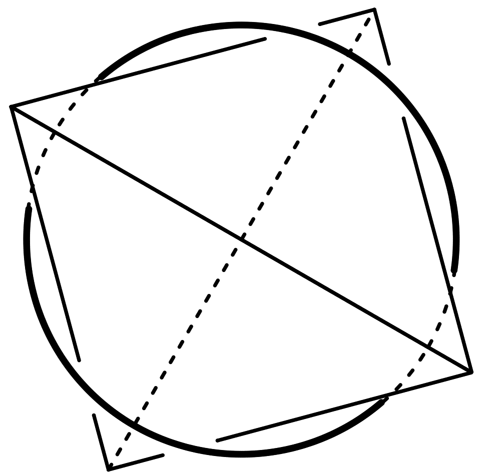
の両氏との共同研究に基づくものです。

フレーム：針金を曲げて作った凸な平面閉曲線。

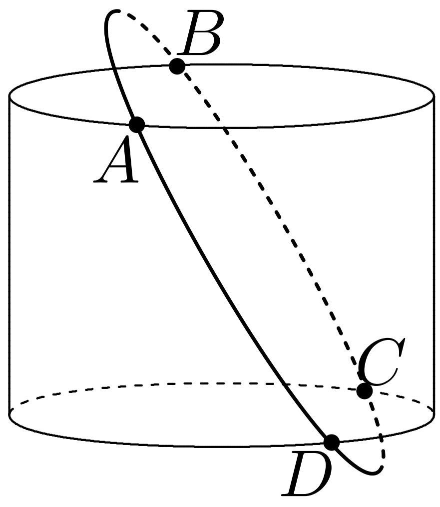
フレームで凸体を**つかむ**：凸体にフレームをとりつけて、はずれないような状態にすること。

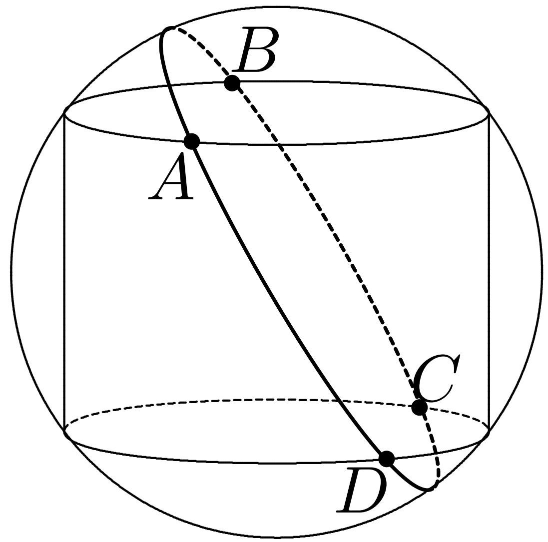




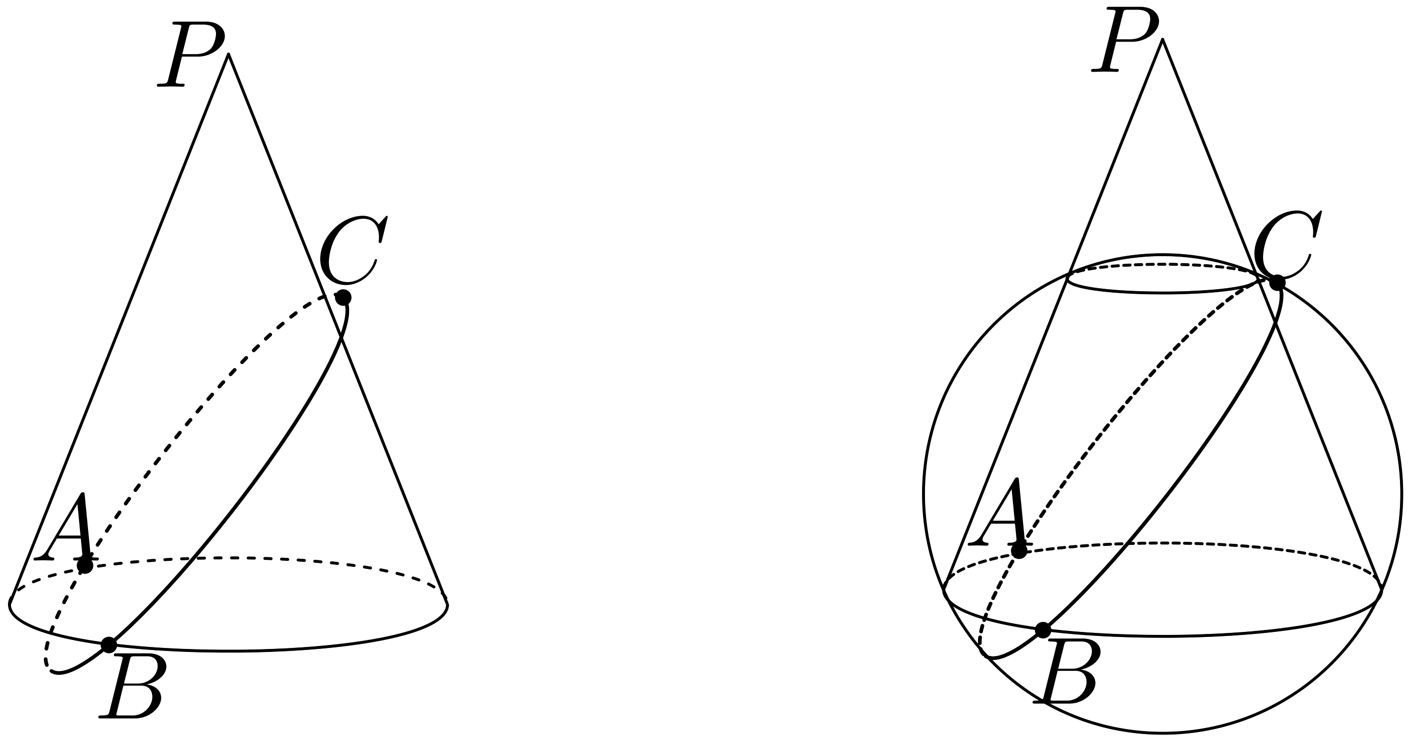


円形フレームで立方体をつかめる。





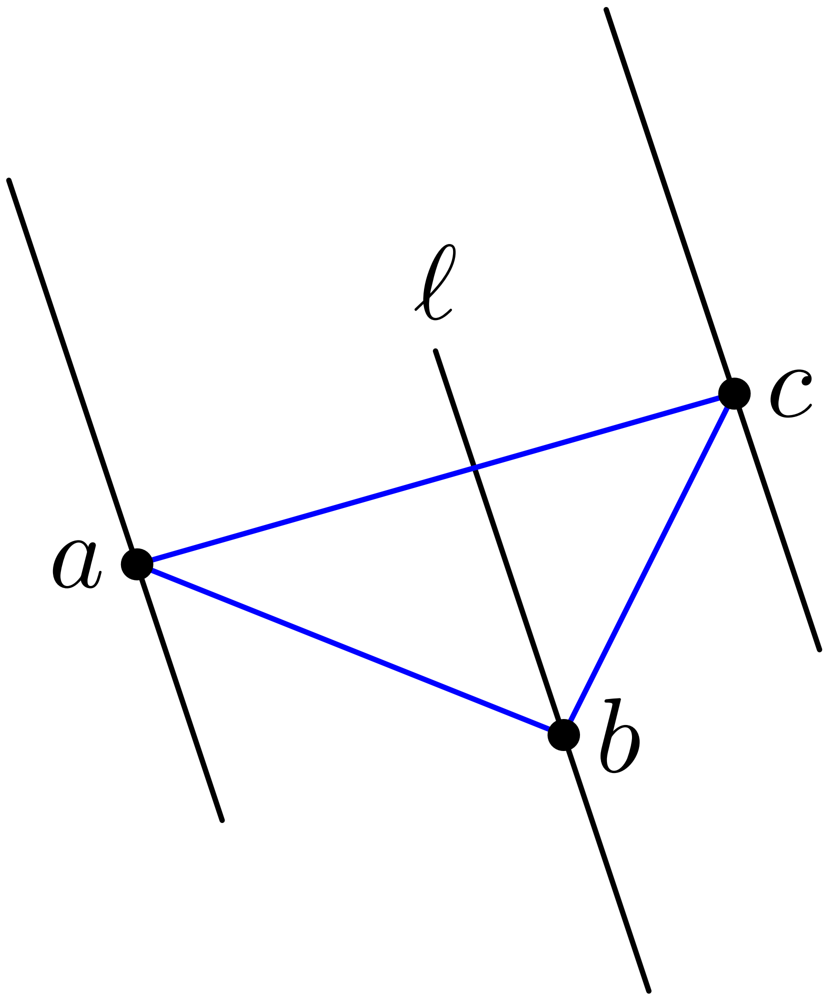
円形フレームで直円柱はつかめない。



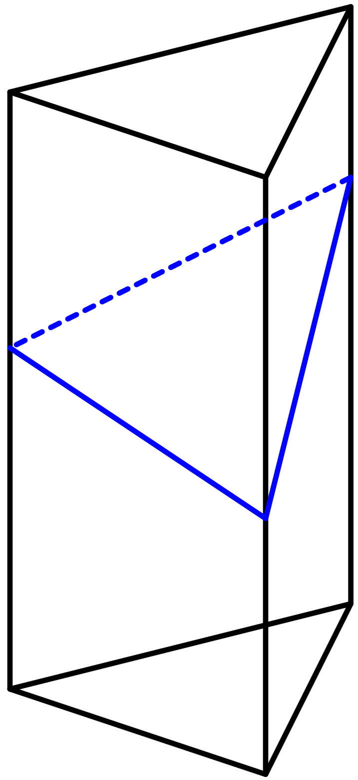
円形フレームで直円錐はつかめない。

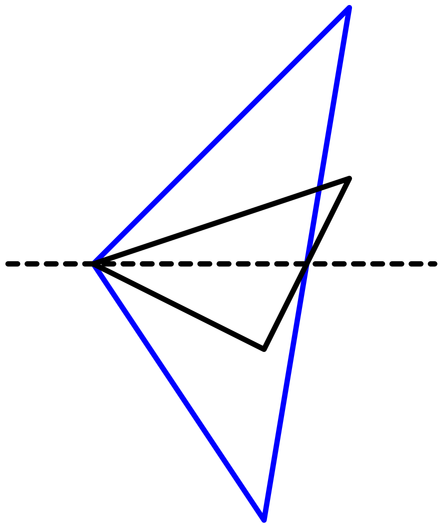
正多角錐は高さが底面の外接円の半径以上ならば、円形フレームでつかめる。(前原)

定理 三角形フレームでは凸体はつかめない。



Can you cover your shadow?





$$(x, y) \mapsto (x, \lambda y)$$

命題 xy平面上の三角形Tをz方向に平行移動して三角柱を作る。この三角柱の平面による断面はTのコピーを含む。

＋ 三角形フレームでは凸体はつかめない

定理 凸体が三角形の壁穴を通過できるなら、壁に直交する平行移動のみで通過できる。

命題

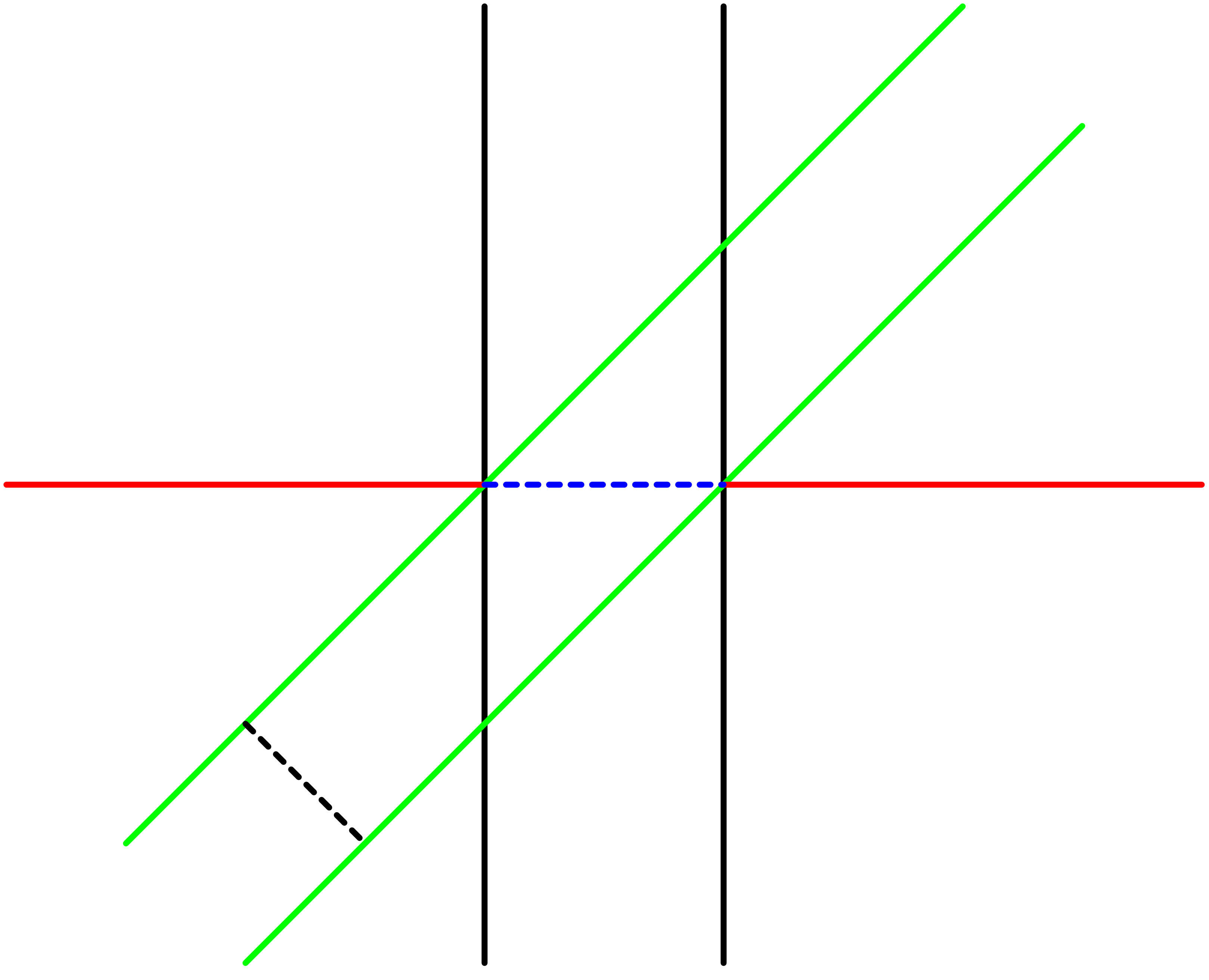
xy平面上の**三角形**Tをz方向に平行移動して三角柱を作る。この三角柱の平面による断面はTのコピーを含む。

上の「三角形」は「凸図形」に変えてよい。

定理KDM
xy平面上の**凸図形**Kをz方向に平行移動してシリンダを作る。このシリンダの平面による断面はKのコピーを含む。

Kovalyov(1984), Debrunner–Mani-Levitska(1986)

Pachの問題。
凸体が壁穴を平行移動で通過するなら、
壁に垂直な平行移動で通過するか？

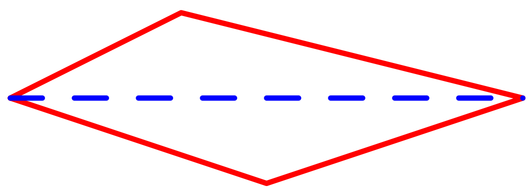


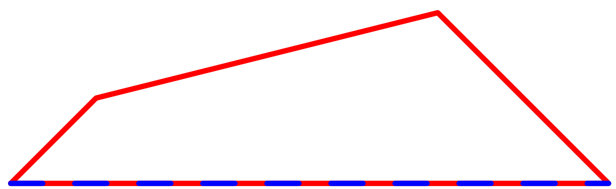
定理 三角形以外のどんなフレームも、
それでつかめる四面体がある。

例 四角形フレーム

直径がフレームの内部にあるとき

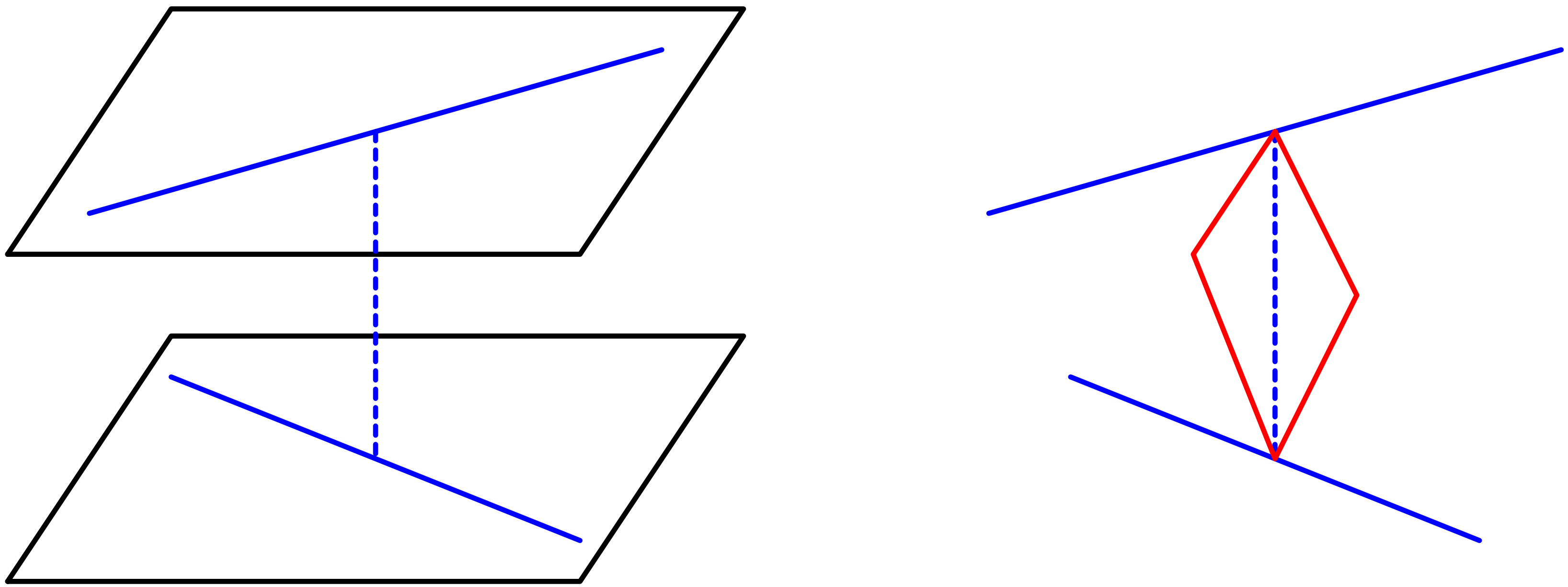
直径が辺上にあるとき

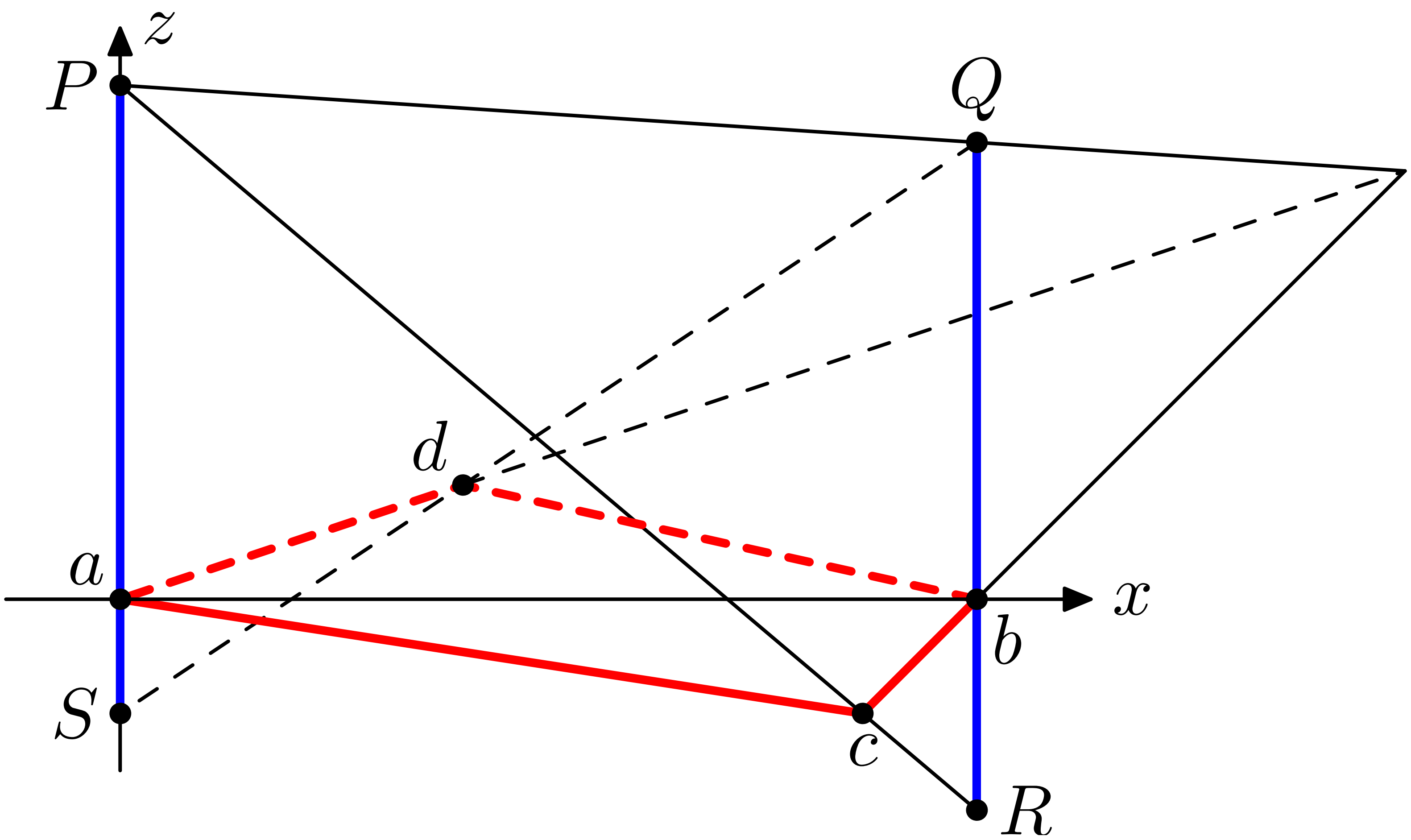




直径がフレームの内部にあるとき：

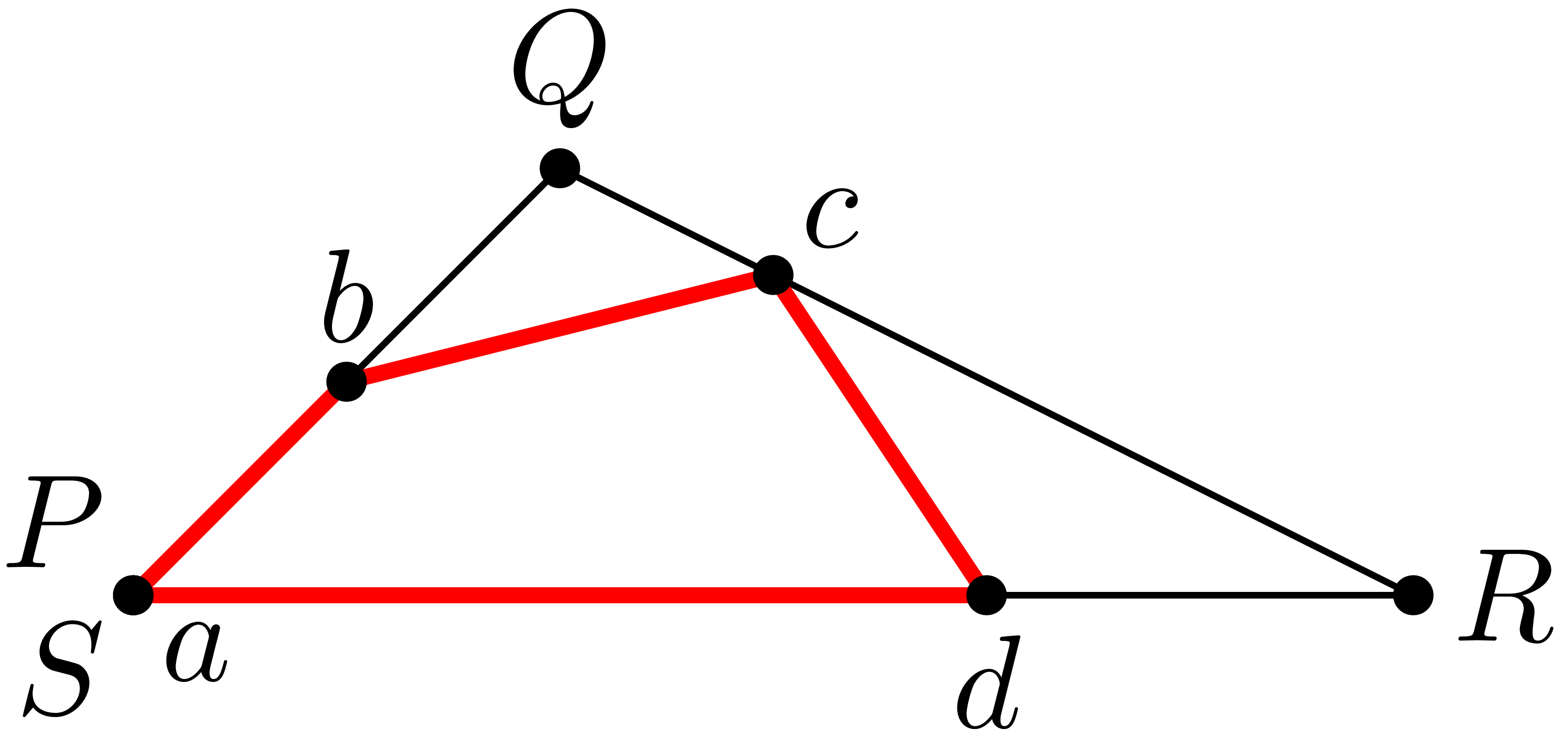
ねじれの位置にある直線を使う。



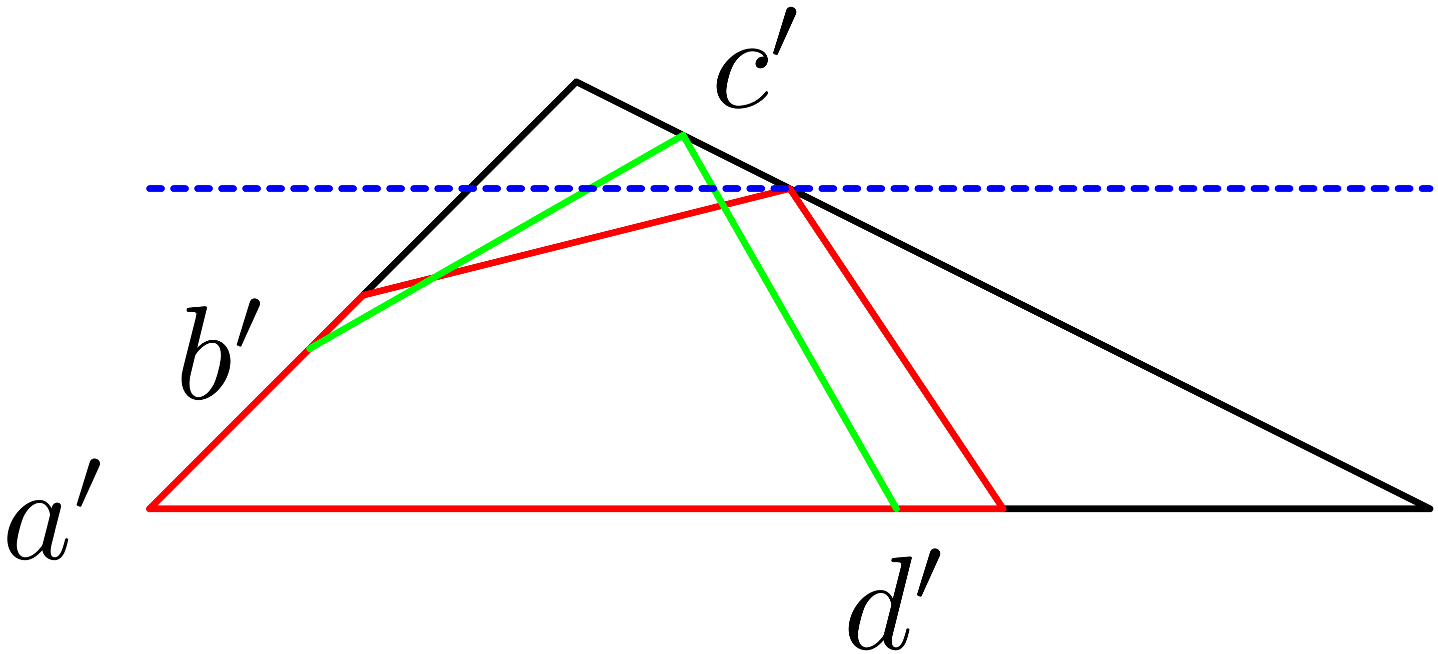

z
P
Q
d
a
x
b
S
c
R

直径がフレームの辺上にあるとき：

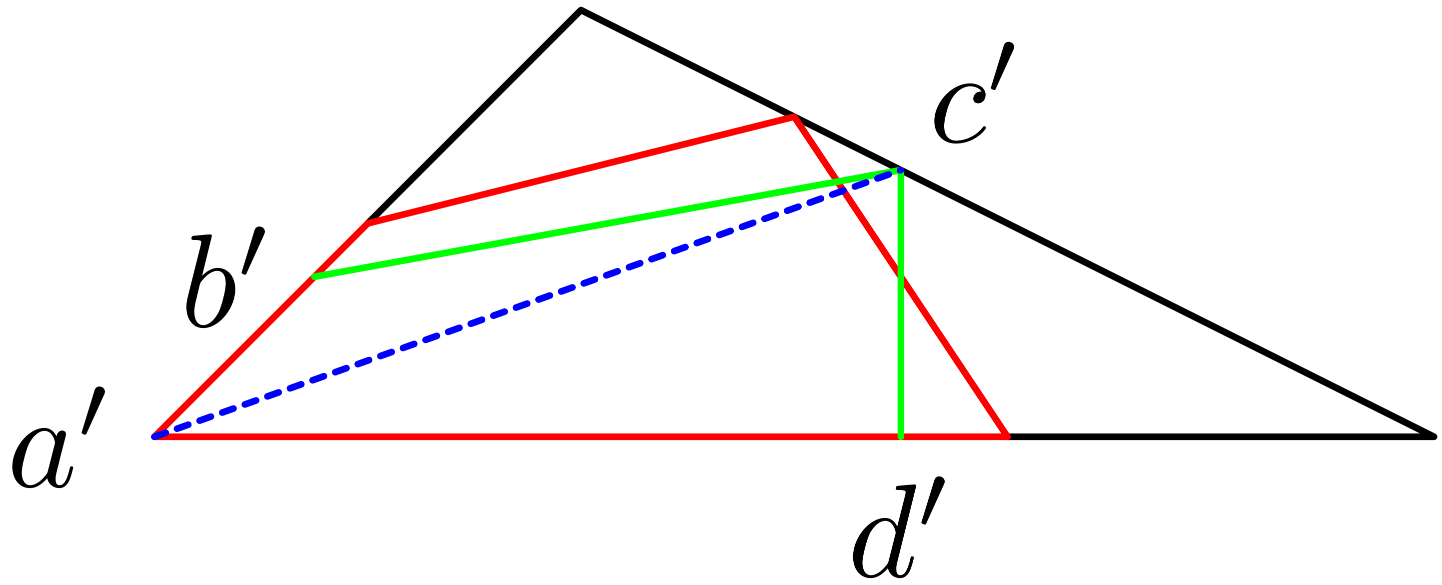
定理KDMを精密化した結果を使って証明。



切断面の正射影$a'b'c'd'$で c'が高い位置



切断面の正射影$a'b'c'd'$で c'が低い位置



定理 三角形以外のどんなフレームも、
それで**固定**できる四面体がある。

フレームFが凸体Kを固定するとは、
Kを動かさずにフレームを動かすと、
フレームはいつでも最初にのっていた
平面上にあること。

問題.

与えられた四面体に対して、これを固定する四角形フレームがあるか？

四面体にぴったり張り付いているフレームでそのようにできるか？

定理 (伊藤–田上–Zamfirescu 2006)
直径dの円形フレームが、
一辺1の正四面体をつかめる

$$\Longleftrightarrow 1/\sqrt{2} \leq d < 2r \approx 0.896.$$

rは $216x^6 - 9x^4 + 38x^2 - 9 = 0$ の唯一の正根。

定理 (前原 2009)
直径dの円形フレームが、
一辺1の立方体をつかめる

$$\Longleftrightarrow \sqrt{2} \le d < 2r \approx 1.535.$$

rは $4x^6 - 49x^4 + 272x^2 - 144 = 0$ の唯一の正根。

定理 (田上、前原 2009)
直径dの円形フレームが、
一辺1の正八面体をつかめる

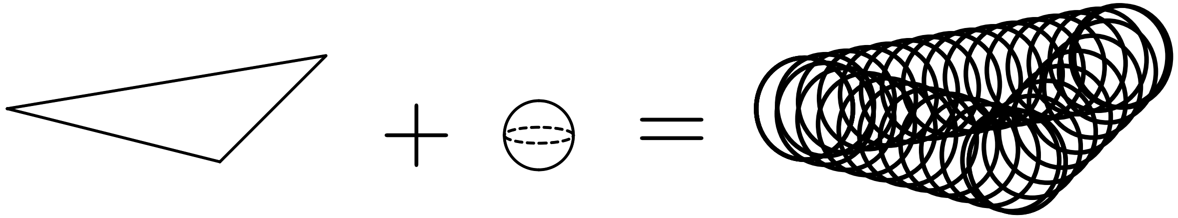
$$\iff \sqrt{2} \leq d < 2r \approx 1.066.$$

rは $54x^6 - 81x^4 + 72x^2 - 16 = 0$ の唯一の正根。

問題. 正12面体、正20面体の場合はどうか？

問題. 高次元の場合はどうか？

二次元コンパクト凸集合と球体のMinkowski和は円形フレームでつかめない。(前原)



問題　凸体が円形フレームでつかめないなら、それと球体とのMinkowski和も円形フレームでつかめないか？