



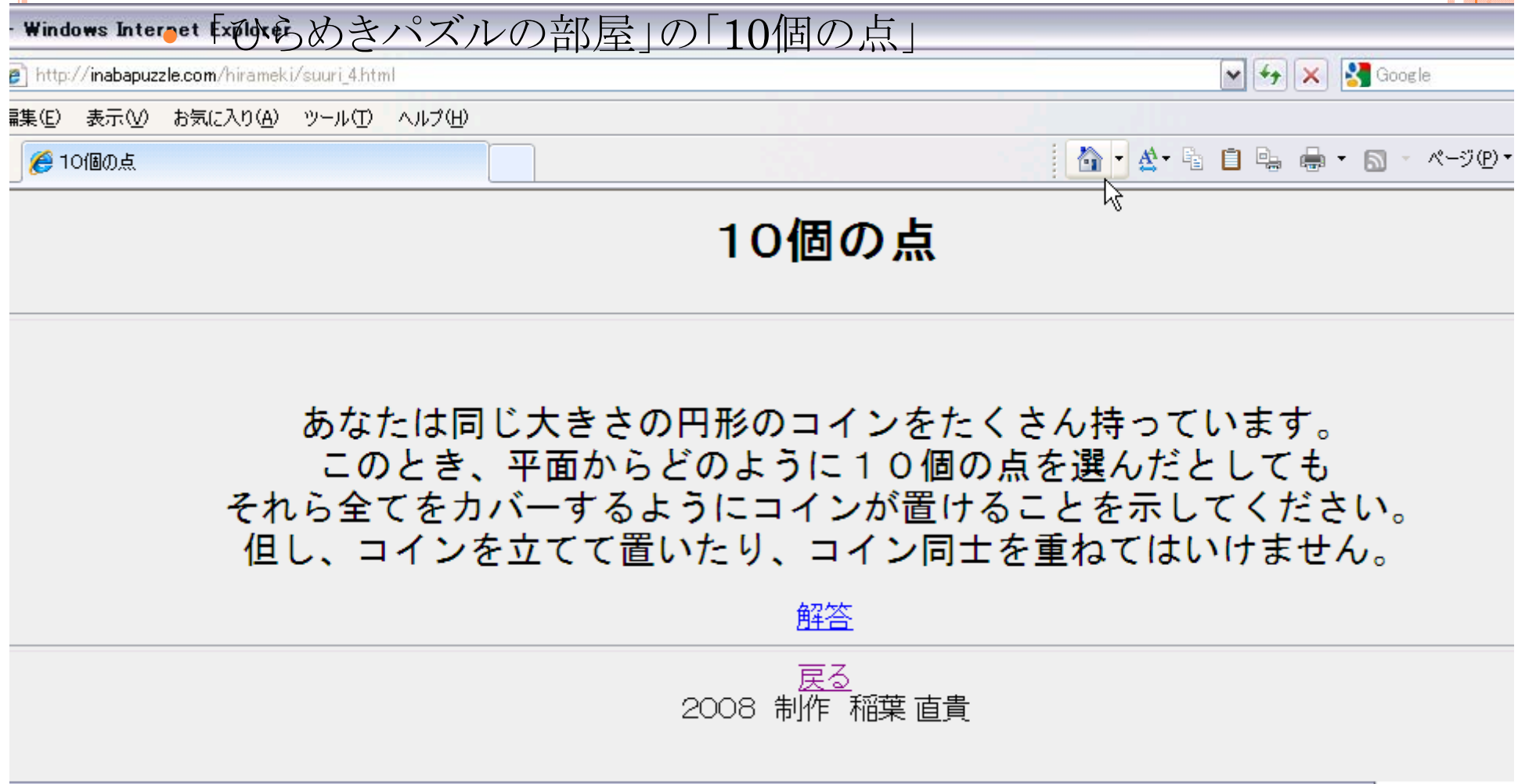
単位円板による点集合の排他的被覆 問題

岡山陽介・清見礼・上原隆平
北陸先端科学技術大学院大学

はじめに

Probabilistic Method を使った
すばらしい解答がある！

- 「稲葉のパズル研究室」(<http://inabapuzzle.com>)の



The screenshot shows a Windows Internet Explorer browser window. The address bar contains the URL http://inabapuzzle.com/hirameki/suuri_4.html. The page title is 「ひらめきパズルの部屋」の「10個の点」. The main content area displays the title 「10個の点」 in large black characters. Below the title, there is a paragraph of Japanese text: 「あなたは同じ大きさの円形のコインをたくさん持っています。このとき、平面からどのように10個の点を選んだとしてもそれら全てをカバーするようにコインが置けることを示してください。但し、コインを立てて置いたり、コイン同士を重ねてはいけません。」. At the bottom of the page, there are two links: 「解答」 (Solution) in blue and 「戻る」 (Back) in purple. The footer text reads 「2008 制作 稲葉 直貴」.

10個の点

あなたは同じ大きさの円形のコインをたくさん持っています。
このとき、平面からどのように10個の点を選んだとしても
それら全てをカバーするようにコインが置けることを示してください。
但し、コインを立てて置いたり、コイン同士を重ねてはいけません。

[解答](#)

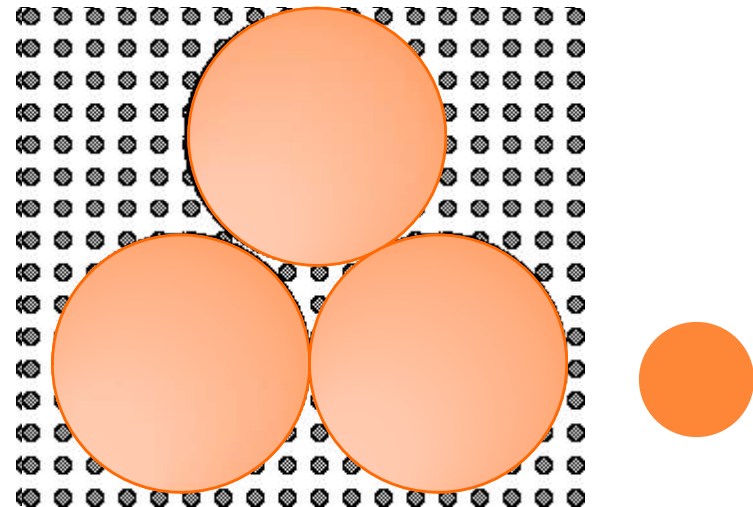
[戻る](#)

2008 制作 稲葉 直貴

背景

[稲葉の定理] 平面上の任意の10点の配置に対して、それらをすべて覆う(任意枚数の)単位円板の(互いに重ならない)配置が存在する

- 「平面上の任意の k 点の配置に対して、それらをすべて覆う単位円板の配置が存在する」という主張が成立する k には、上界も存在する:
 - 十分細かい格子点群は単位円で覆うことはできない

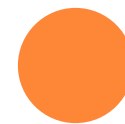


上界の歴史

- 2010年春～夏、上原・浅野:<108個
同時期、Peter Winkler: 60個(未確認)
- 2010年秋、岡山・清見・上原: 79個
- 2011年1月、Veit Elser: 55個
- 2011年2月、岡山・清見・上原: 54個!!

今日のゴール:
単位円板をどう
配置しても覆えない
「54個の点配置」
を与える

2011年3月10日現在の World Record:
 $10 \leq k < 54$



上界の歴史

- 2010年春～夏、上原・浅野:<108個
同時期、Peter Winkler: 60個(未確認)
- 2010年秋、岡山・清見・上原: 79個
- 2011年1月、Veit Elser: 55個
- 2011年2月、岡山・清見・上原: 54個!!

今日のゴール:
単位円板をどう
配置しても覆えない
「54個の点配置」
を与える

2011年3月10日現在の World Record:
 $10 \leq k < 54$



上界の求め方

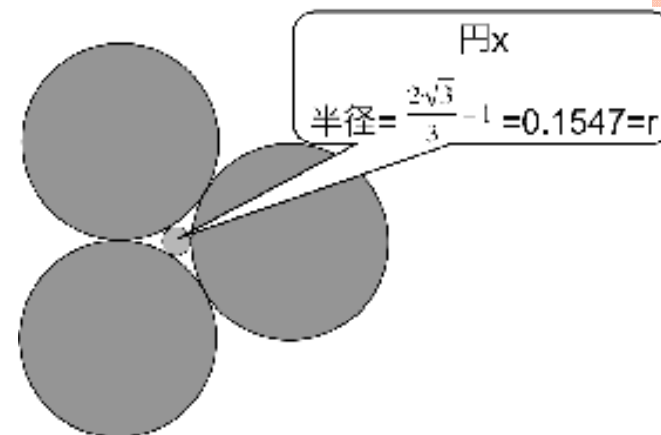
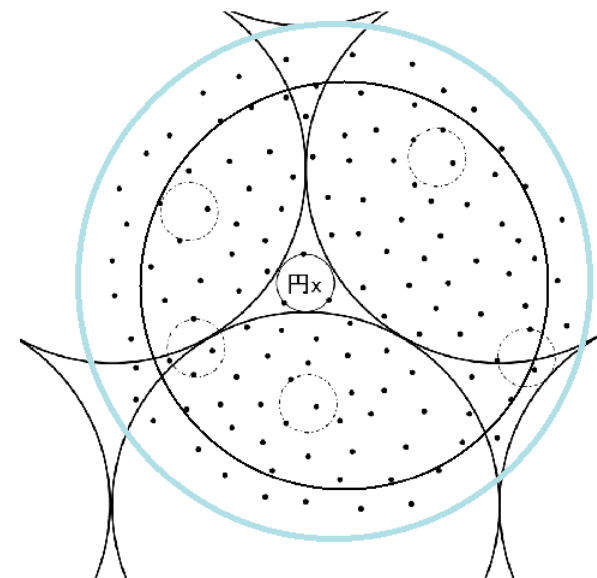
○ 基本的なアイデア:

- 単位円板一つでは覆えない領域内に
 - 単位円板が重ねられないことを利用して十分多くの点を配置する
- ⇒ 単位円板ですべての点を覆うことはできない

(単純のため円板の周上は「覆ってない」と考える)

○ 単位円板3枚の隙間の凹三角形に必ず点があるようにする

⇒ 回転を考えて凹三角形に内接する半径 r の小円 x を考える

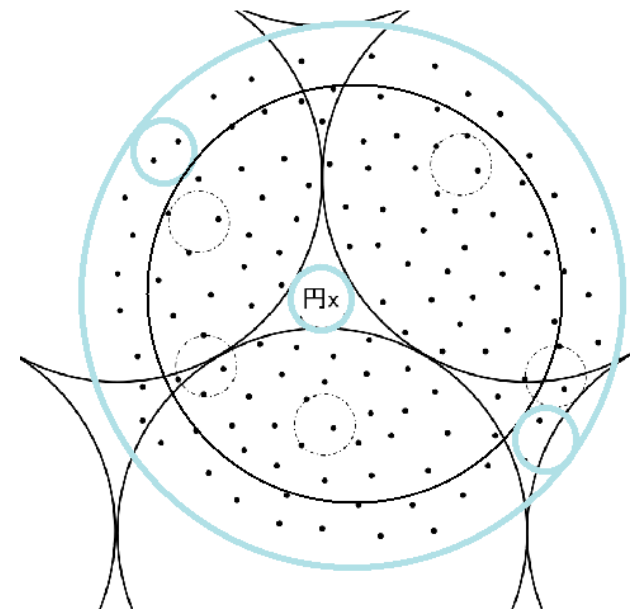


上界の求め方

○ 基本的なアイデア:

- 半径 $1+2r$ の円領域内に
- どの小円 x にも点が含まれる
(今度は周上でもよい)
密度で点を配置すればよい

- 小円 x の半径 r に基づいて格子を作る
 - 3角格子
 - 4角格子 (← x に乗る4角格子; 上原・浅野108個)
 - 6角格子
- (小円 x が空円にならない点配置を作る)



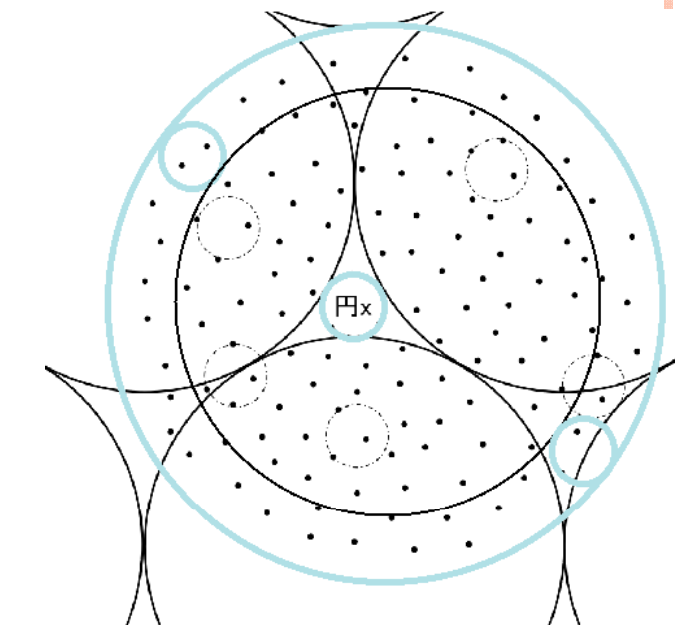
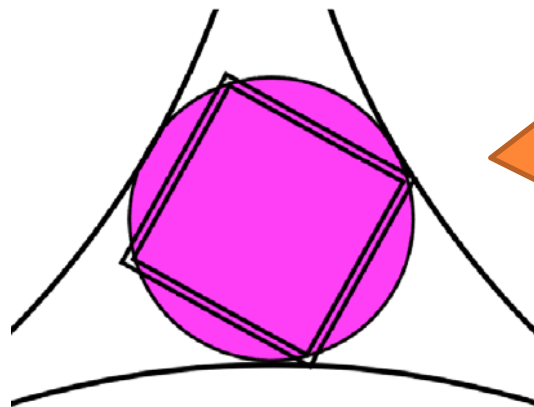
上界の求め方

○ 基本的なアイデア:

- 半径 $1+2r$ の円領域内に
- どの小円 x にも点が含まれる
(今度は周上でもよい)
密度で点を配置すればよい

● 小円 x の半径 r に基づいて格子を作る

- 3角格子
- 4角格子
- 6角格子



各角度 θ に対して
「凹三角形に内接する」
最小の正方形の
大きさを取ればよい

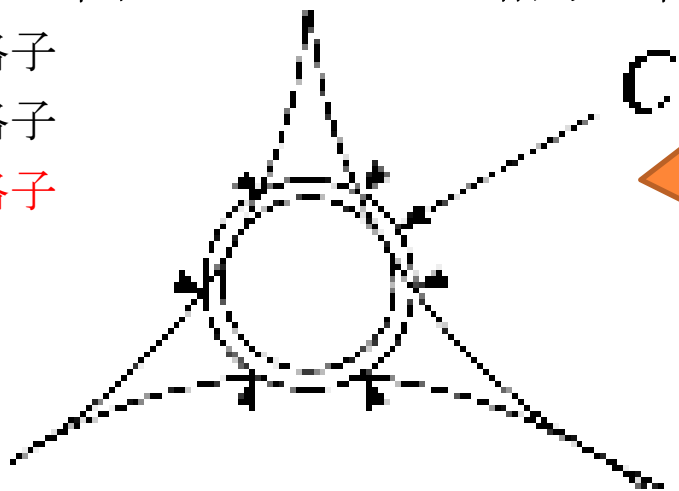
上界の求め方

○ 基本的なアイデア:

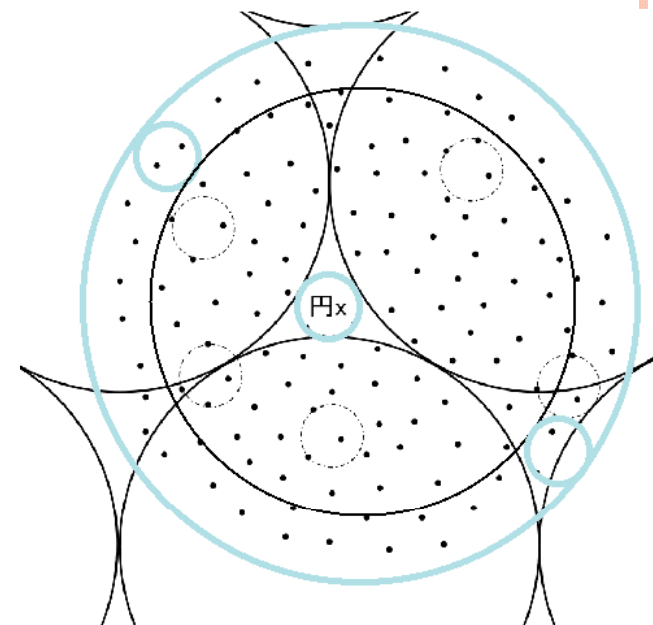
- 半径 $1+2r$ の円領域内に
- どの小円 x にも点が含まれる
(今度は周上でもよい)
密度で点を配置すればよい

- 小円 x の半径 r に基づいて格子を作る

- 3角格子
- 4角格子
- 6角格子



「凹三角形との交点が
正6角形になる」
ところまで小円 x を
拡大してよい



上界の求め方

○ 基本的なアイデア:

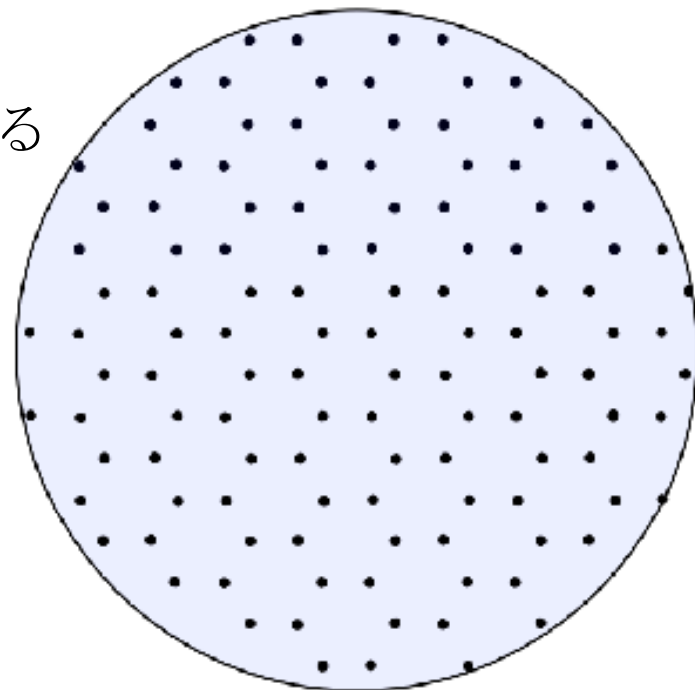
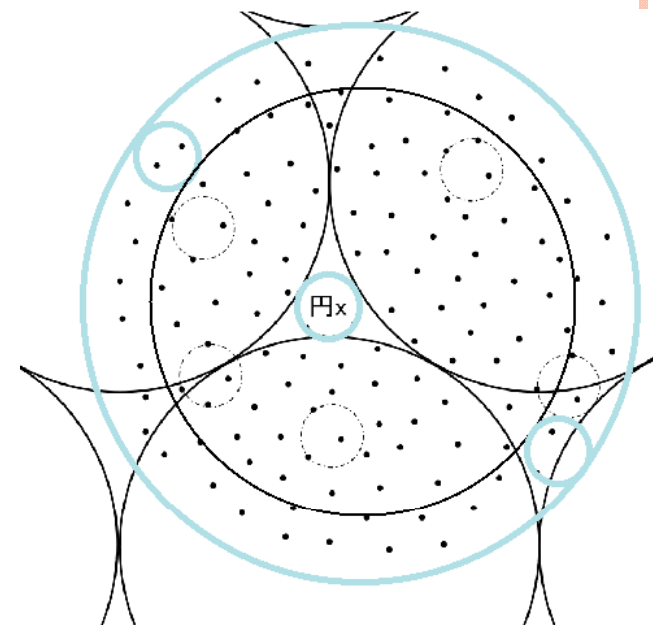
- 半径 $1+2r$ の円領域内に
- どの小円 x にも点が含まれる
(今度は周上でもよい)
密度で点を配置すればよい

- 小円 x の半径 r に基づいて格子を作る

○ 3角格子

○ 4角格子

○ 6角格子: 119個



上界の求め方

- 基本的なアイデア:

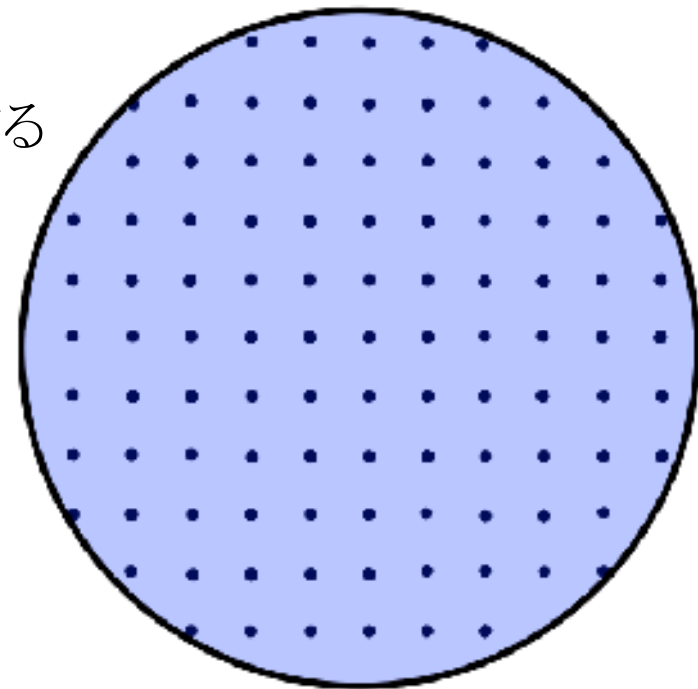
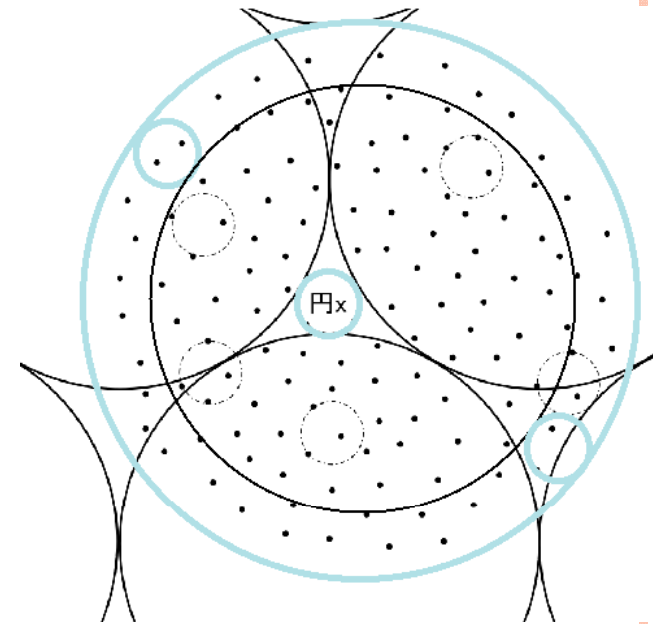
- 半径 $1+2r$ の円領域内に
- どの小円 x にも点が含まれる
(今度は周上でもよい)
密度で点を配置すればよい

- 小円 x の半径 r に基づいて格子を作る

- 3角格子

- 4角格子: 102個

- 6角格子: 119個



上界の求め方

○ 基本的なアイデア:

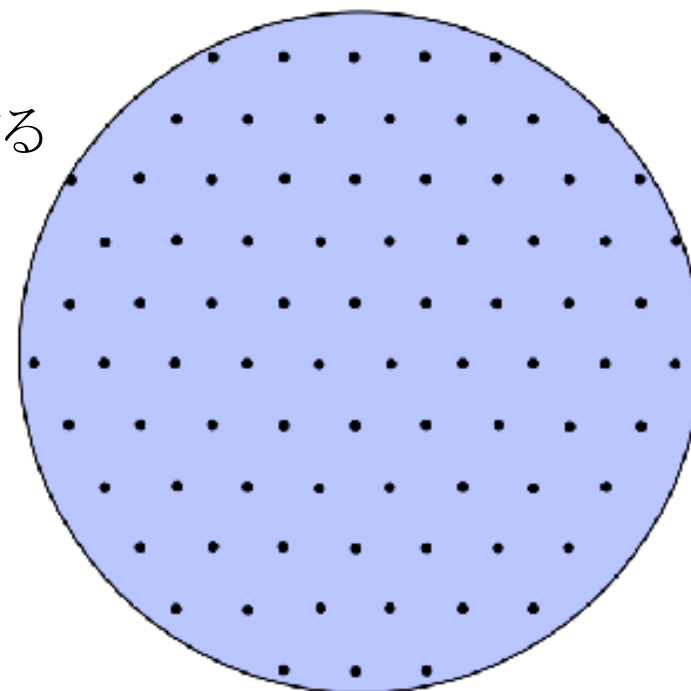
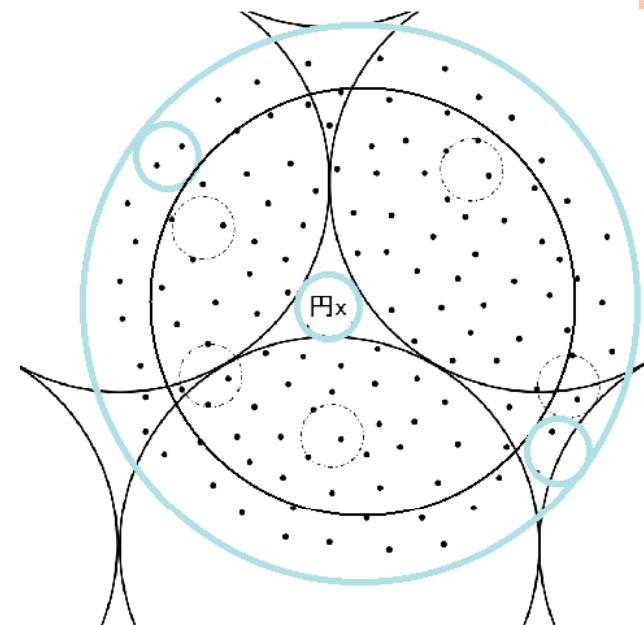
- 半径 $1+2r$ の円領域内に
- どの小円 x にも点が含まれる
(今度は周上でもよい)
密度で点を配置すればよい

- 小円 x の半径 r に基づいて格子を作る

○ 3角格子: 82個

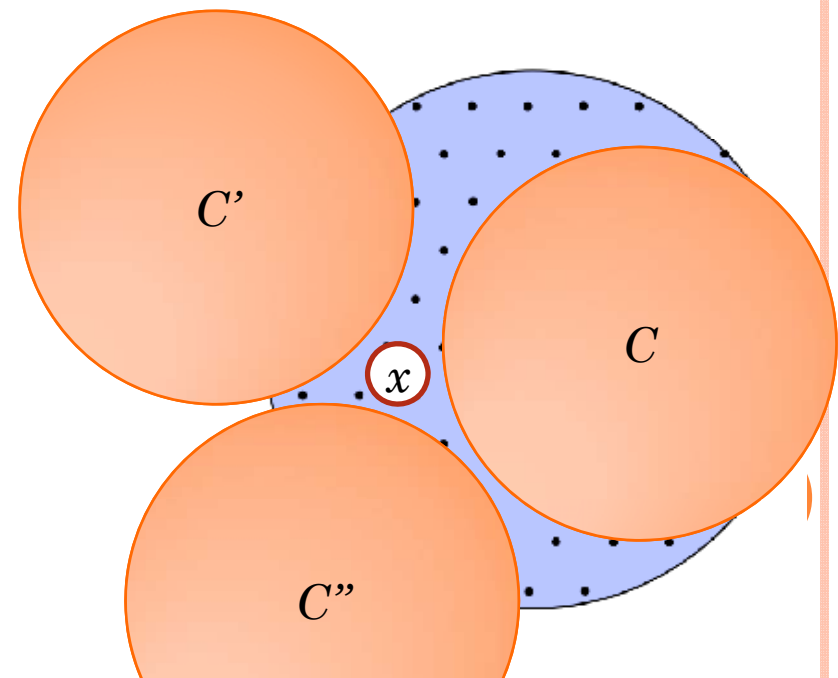
○ 4角格子: 102個

○ 6角格子: 119個



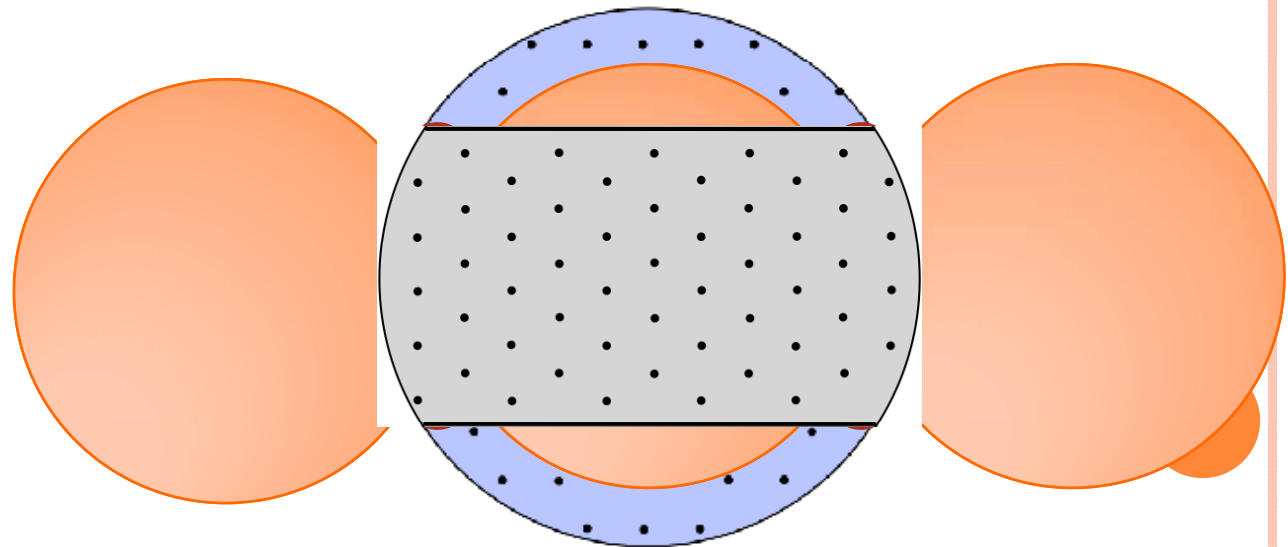
さらなる上界の求め方

- 3角格子に基づく点配置の正当性:
 1. 半径 $1+2r$ の円領域内に単位円板 C を配置
 2. C 以外に C' , C'' をどう配置しても、 C, C', C'' の[隙間]に小円 x が置ける
- 上記の証明の「半径 $1+2r$ の領域」は冗長



さらなる上界の求め方

- 3角格子に基づく点配置の正当性:
- 上記の証明の「半径 $1+2r$ の領域」は冗長
 1. 半径 $1+2r$ の円領域内の中心に単位円板 C を配置
 2. C, C', C'' 一列に並べて隙間に小円 x が4つ置ける配置でよい
 3. 3角格子の82個の配置に適用すると54個の配置が得られる



まとめ

- 「平面上の任意の k 点の配置に対して、それらをすべて覆う単位円板の配置が存在する」という主張が成立する k に対する上界 54 が得られた。

$$\therefore 10 \leq k < 54$$

- もっと改善して下さい...
 - 下界の方が Gap が大きそうな気がする
 - 空円を用いてマシンパワーで上界の改善

[謝辞] 岩沢宏和氏: Peter Winklerの上界60個と
Veit Elserの上界55個を教えてくださいありがとうございます!

