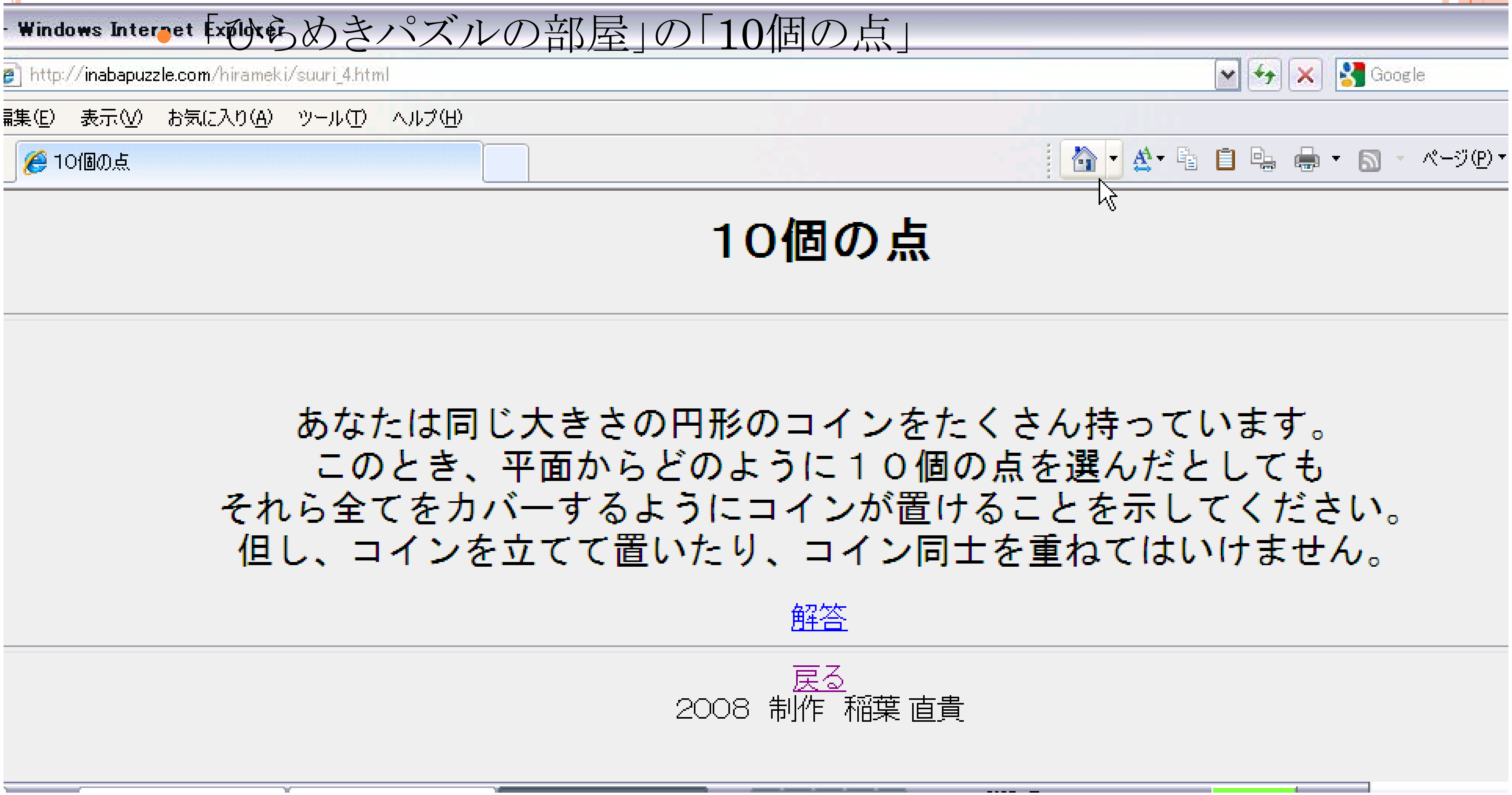
単位円板による点集合の排他的被覆問題

岡山陽介・清見礼・上原隆平
北陸先端科学技術大学院大学

Probabilistic Method を使った
すばらしい解答がある！

はじめに

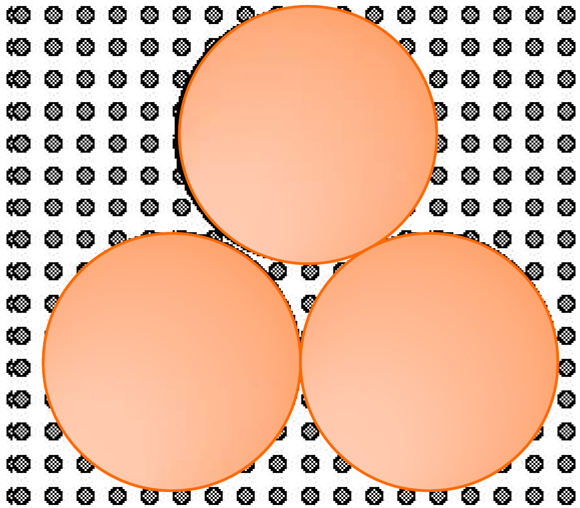
- 「稲葉のパズル研究室」(http://inabapuzzle.com)の
  - 「ひらめきパズルの部屋」の「10個の点」



背景

[稲葉の定理] 平面上の任意の10点の配置に対して、それらをすべて覆う(任意枚数の)単位円板の(互いに重ならない)配置が存在する

- 「平面上の任意の k 点の配置に対して、それらをすべて覆う単位円板の配置が存在する」という主張が成立する k には、上界も存在する:
  - 十分細かい格子点群は単位円で覆うことはできない



上界の歴史

- 2010年春〜夏、上原・浅野:<108個
  同時期、Peter Winkler: 60個(未確認)
- 2010年秋、岡山・清見・上原: 79個
- 2011年1月、Veit Elser: 55個
- 2011年2月、岡山・清見・上原: 54個!!

今日のゴール:
単位円板をどう
配置しても覆えない
「54個の点配置」
を与える

2011年3月10日現在の World Record:
$10 \leqq k < 54$

上界の歴史

- 2010年春～夏、上原・浅野 : <108個
  同時期、Peter Winkler: 60個（未確認）
- 2010年秋、岡山・清見・上原: 79個
- 2011年1月、Veit Elser: 55個
- 2011年2月、岡山・清見・上原: 54個!!

今日のゴール:
単位円板をどう
配置しても覆えない
「54個の点配置」
を与える

2011年3月10日現在の World Record:
$10 \leqq k < 54$

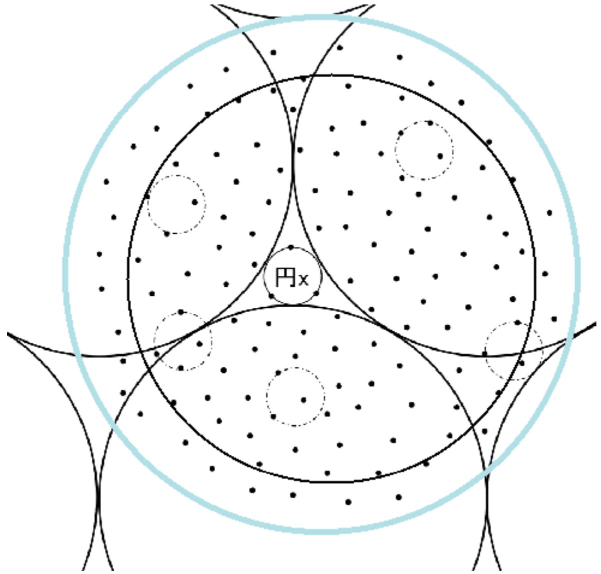
上界の求め方

- 基本的なアイデア：
  - 単位円板一つでは覆えない領域内に
  - 単位円板が重ねられないことを利用して

  十分多くの点を配置する

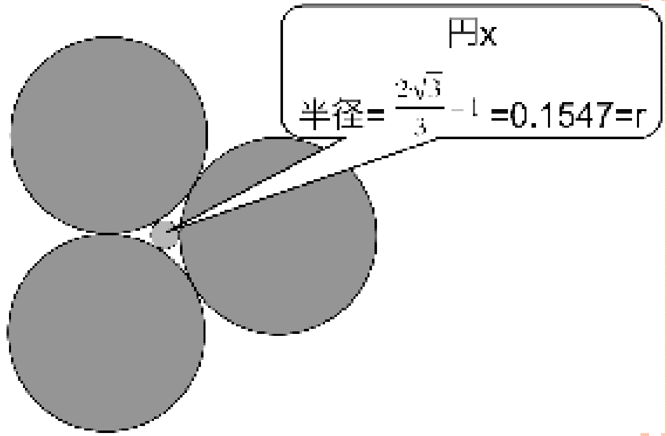
  ⇒単位円板ですべての点を覆うことはできない

  （単純のため円板の周上は「覆ってない」と考える）



- 単位円板3枚の隙間の凹三角形に必ず点があるようにする

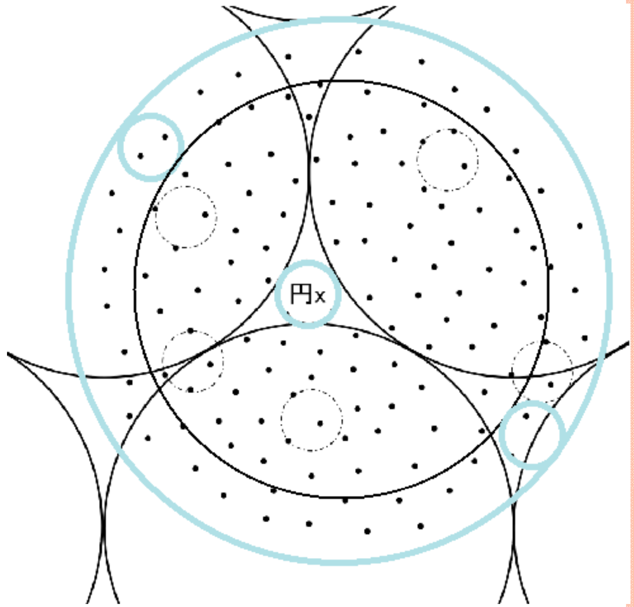
  ⇒回転を考えて凹三角形に内接する半径 r の小円 x を考える



上界の求め方

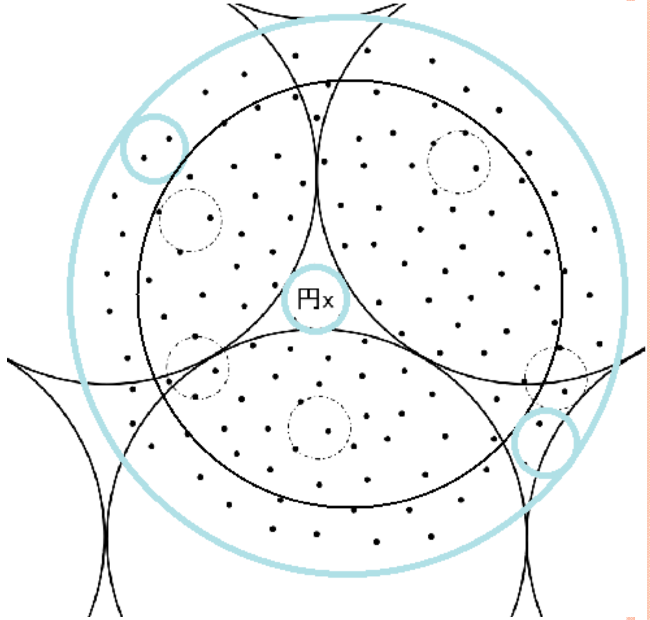
- 基本的なアイデア：
  - 半径 $1+2r$ の円領域内に
  - どの小円 x にも点が含まれる
    （今度は周上でもよい）
    密度で点を配置すればよい

  - 小円 x の半径 r に基づいて格子を作る
    - 3角格子
    - 4角格子 （$\leftarrow x$ に乗る4角格子；上原・浅野108個）
    - 6角格子
  - （小円 x が空円にならない点配置を作る）

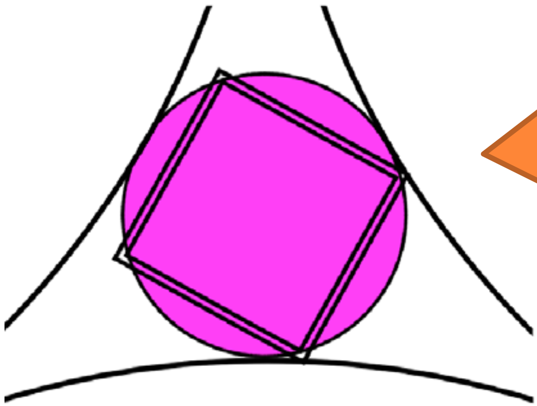


上界の求め方

- 基本的なアイデア：
  - 半径 $1+2r$ の円領域内に
  - どの小円 x にも点が含まれる
    （今度は周上でもよい）
    密度で点を配置すればよい

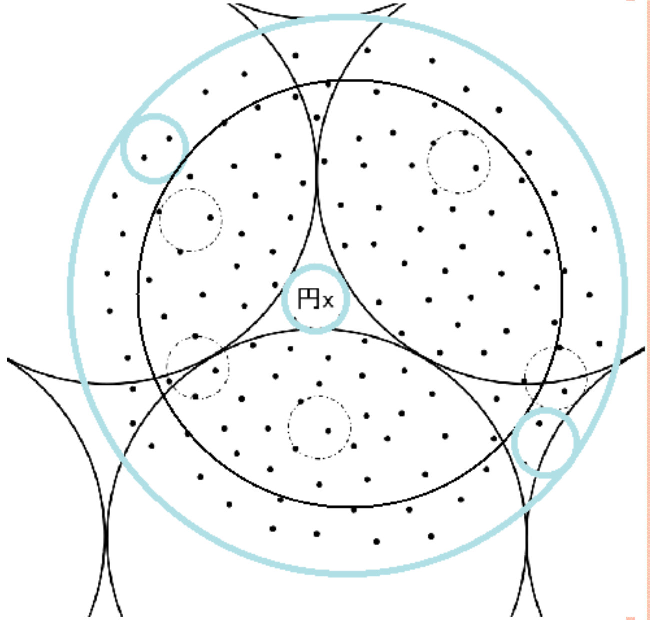


  - 小円 x の半径 r に基づいて格子を作る
    - 3角格子
    - 4角格子
    - 6角格子

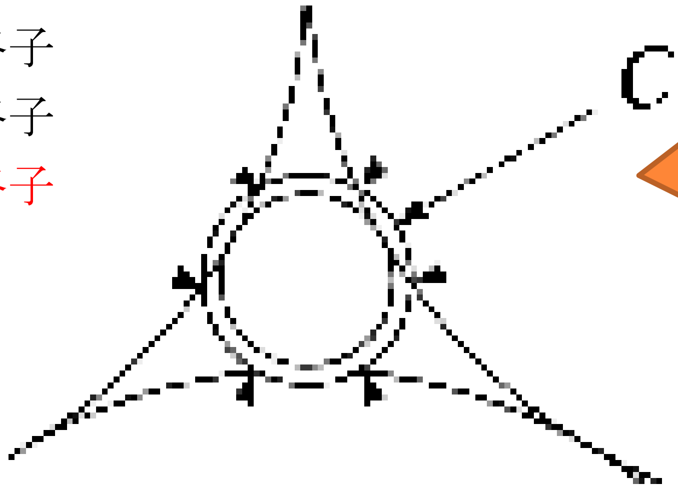


各角度θに対して
「凹三角形に内接する」
最小の正方形の
大きさを取ればよい

上界の求め方



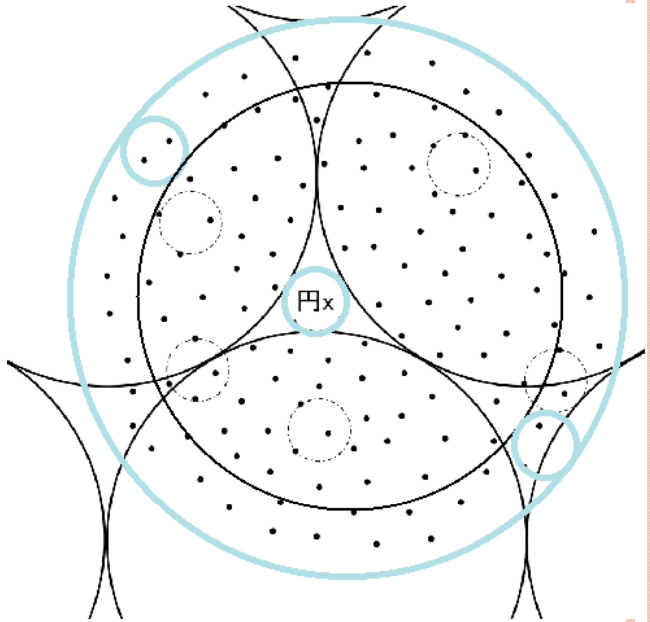
- 基本的なアイデア：
  - 半径 $1+2r$ の円領域内に
  - どの小円 x にも点が含まれる
    （今度は周上でもよい）
    密度で点を配置すればよい
  - 小円 x の半径 r に基づいて格子を作る
    - 3角格子
    - 4角格子
    - 6角格子

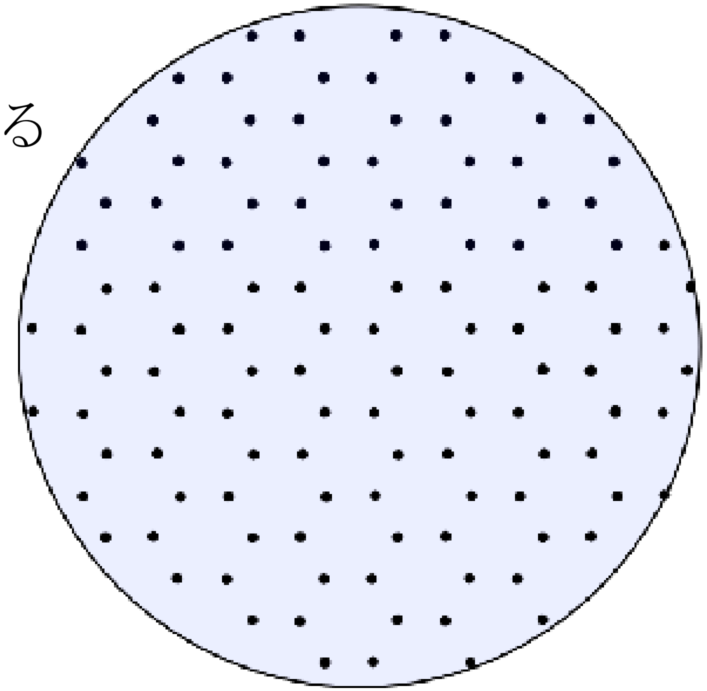


「凹三角形との交点が正6角形になる」ところまで小円 x を拡大してよい

上界の求め方

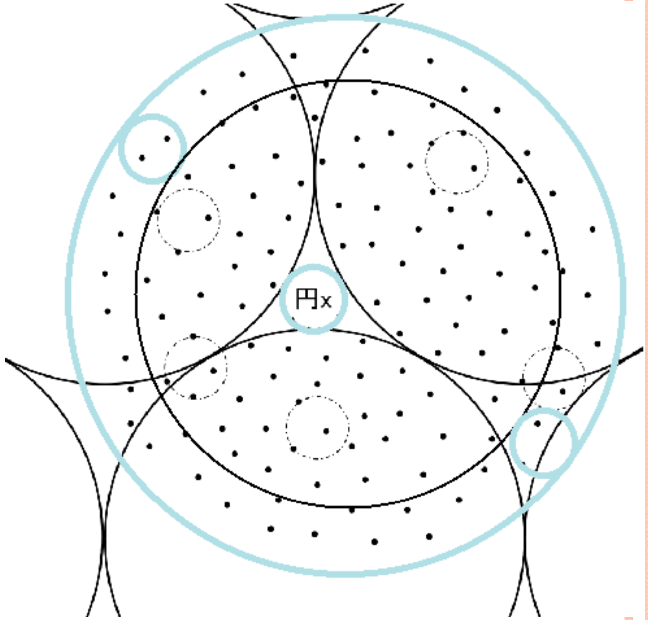
- 基本的なアイデア：
  - 半径 $1+2r$ の円領域内に
  - どの小円 x にも点が含まれる
    （今度は周上でもよい）
    密度で点を配置すればよい
  - 小円 x の半径 r に基づいて格子を作る
    - 3角格子
    - 4角格子
    - 6角格子：119個



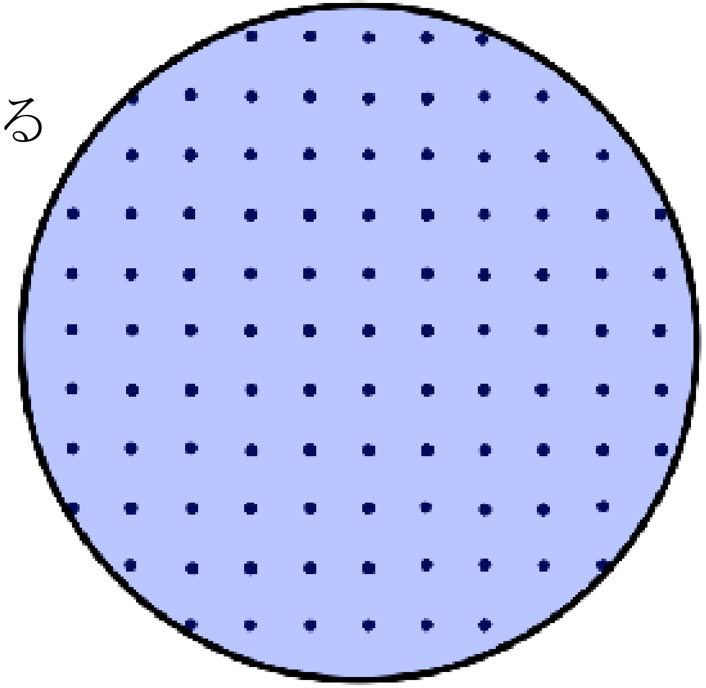


上界の求め方

- 基本的なアイデア：
  - 半径 1+2r の円領域内に
  - どの小円 x にも点が含まれる
    （今度は周上でもよい）
    密度で点を配置すればよい

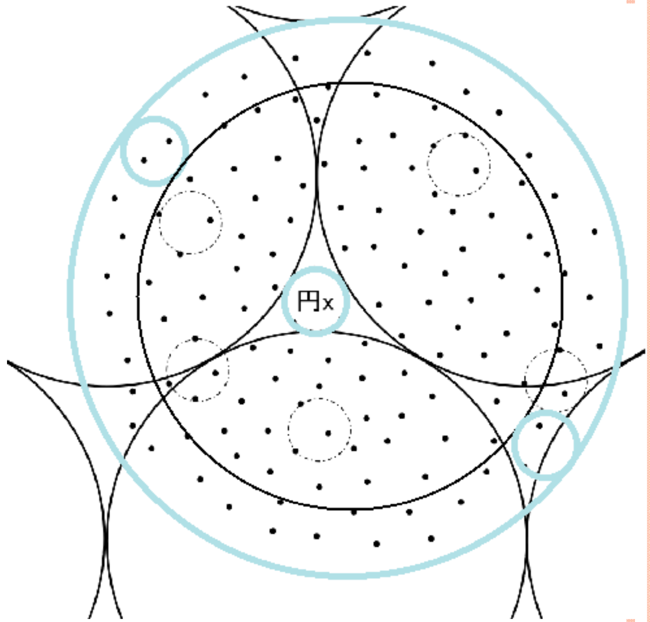


  - 小円 x の半径 r に基づいて格子を作る
    - 3角格子
    - 4角格子：102個
    - 6角格子：119個

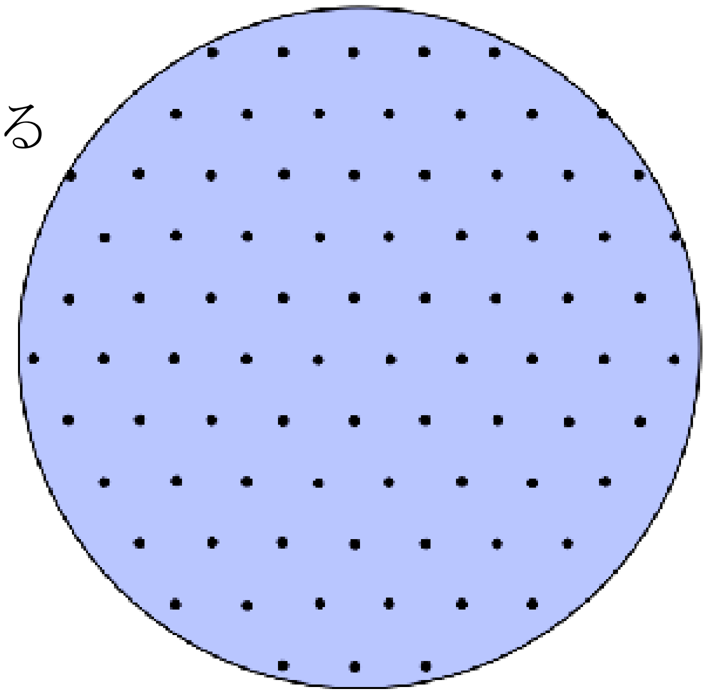


上界の求め方

- 基本的なアイデア：
  - 半径 $1+2r$ の円領域内に
  - どの小円 x にも点が含まれる
    （今度は周上でもよい）
    密度で点を配置すればよい



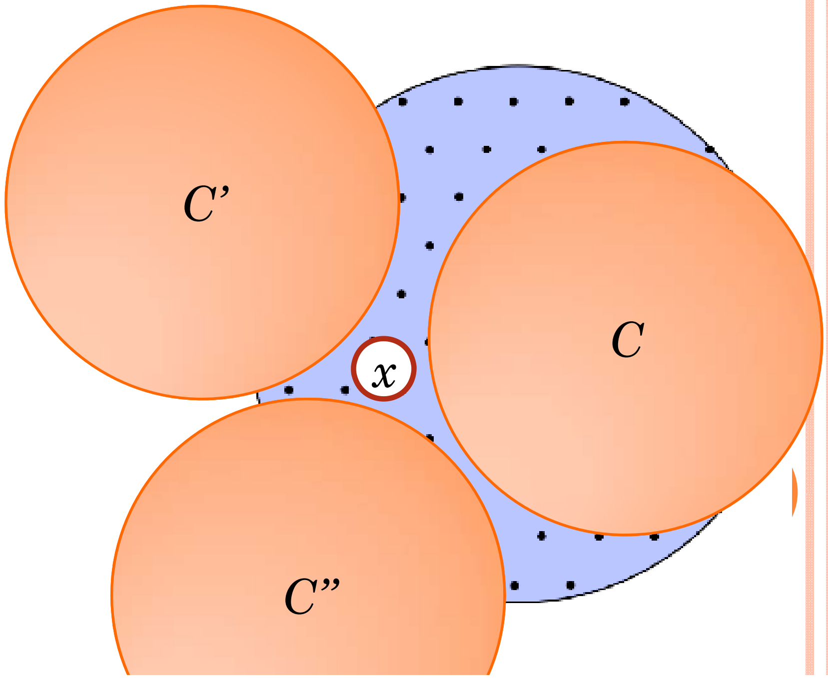
  - 小円 x の半径 r に基づいて格子を作る
    - 3角格子：82個
    - 4角格子：102個
    - 6角格子：119個



さらなる上界の求め方

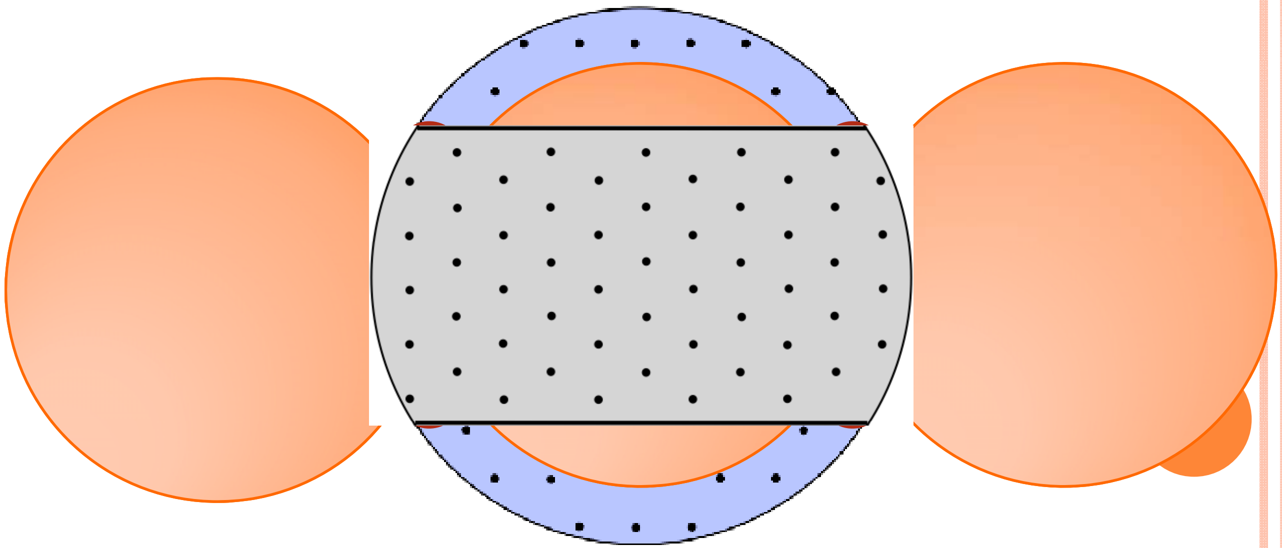
- 3角格子に基づく点配置の正当性:
  1. 半径 $1+2r$ の円領域内に単位円板Cを配置
  2. C 以外に C', C'' をどう配置しても、
     C, C', C'' の[隙間]に小円 x が置ける

- 上記の証明の
  「半径 $1+2r$ の領域」
  は冗長



さらなる上界の求め方

- 3角格子に基づく点配置の正当性:
- 上記の証明の「半径 1+2r の領域」は冗長
  1. 半径 1+2r の円領域内の中心に単位円板Cを配置
  2. C, C', C'' 一列に並べて隙間に小円 x が4つ置ける配置でよい
  3. 3角格子の82個の配置に適用すると54個の配置が得られる



まとめ

- 「平面上の任意の k 点の配置に対して、それらをすべて覆う単位円板の配置が存在する」という主張が成立する k に対する上界 54 が得られた。

  $$\therefore 10 \leqq k < 54$$

- もっと改善して下さい…
  - 下界の方が Gap が大きそうな気がする
  - 空円を用いてマシンパワーで上界の改善

[謝辞] 岩沢宏和氏: Peter Winklerの上界60個と Veit Elserの上界55個を教えてくれてありがとう！