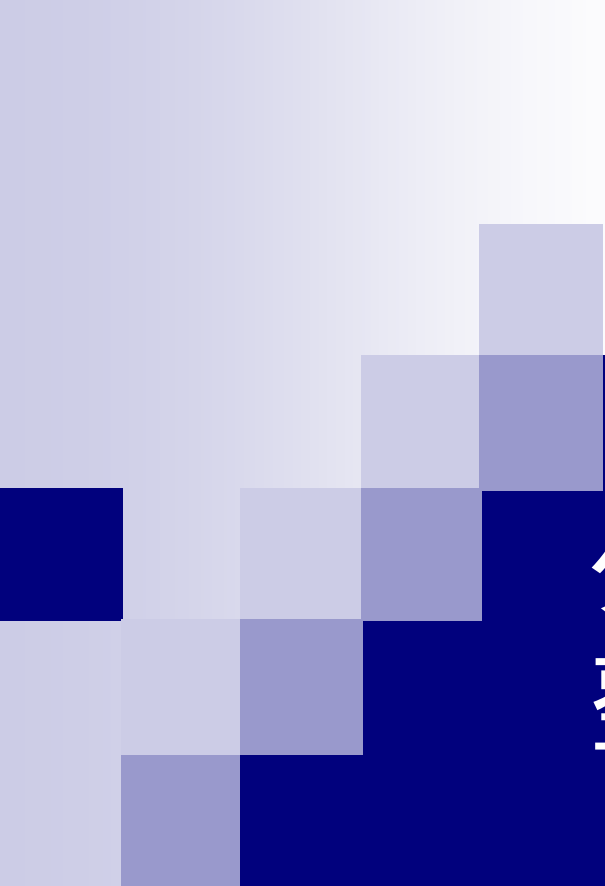


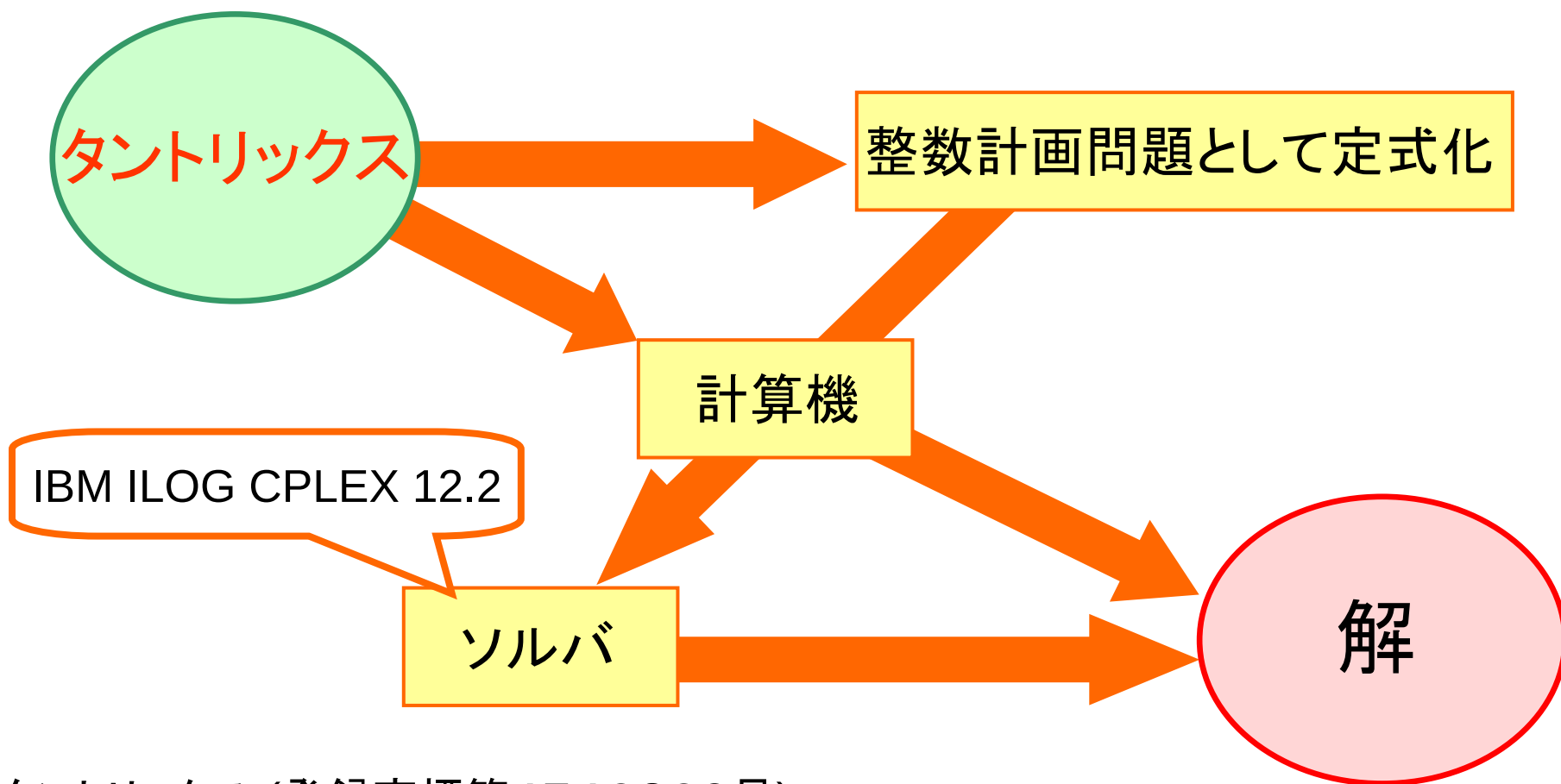


タントリックスの 整数計画法による解法

木野 歩佳, 宇野 裕之
(大阪府立大学理学系研究科)

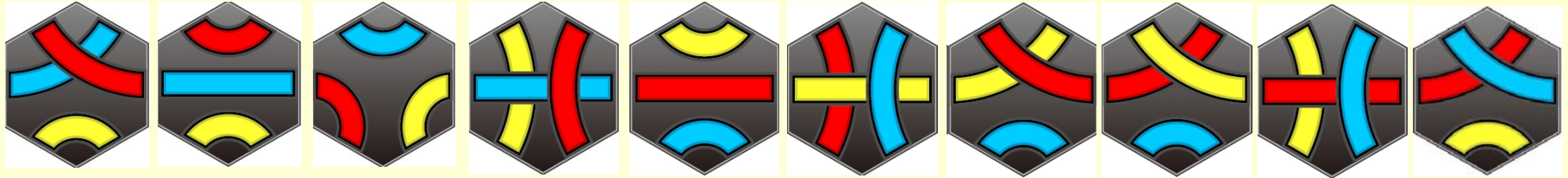
タントリックス®を計算機で解く流れ

IP(整数計画法)を用いる



タントリックススタイルとパズルの目標

タイル:表



タイル:裏



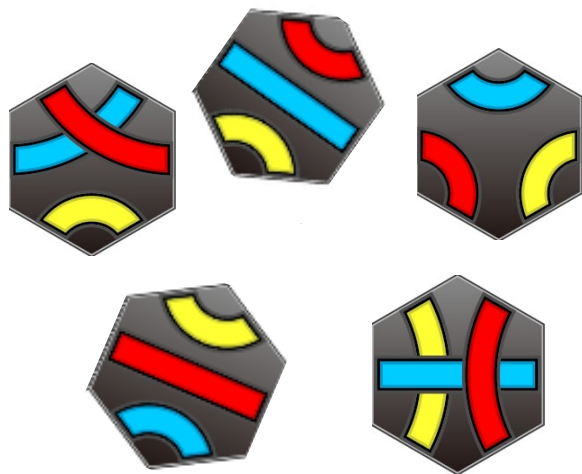
ある決められた色(指定色)で1本のループを作る

タントリックスの遊び方



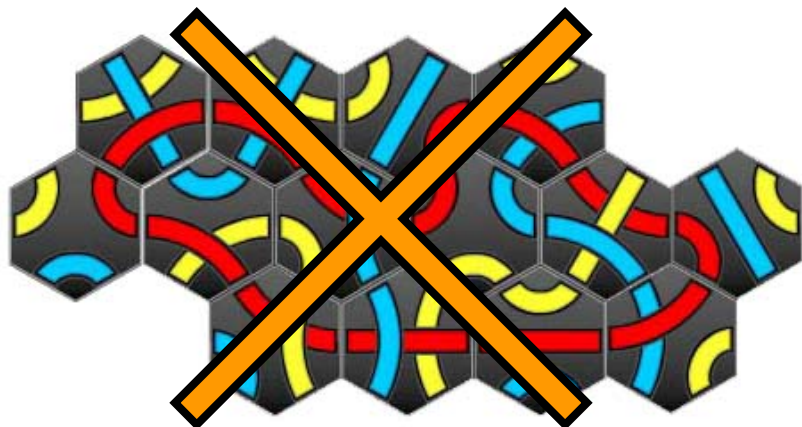
1. 挑戦する枚数を決定する

2. タイルを並べてループを作る



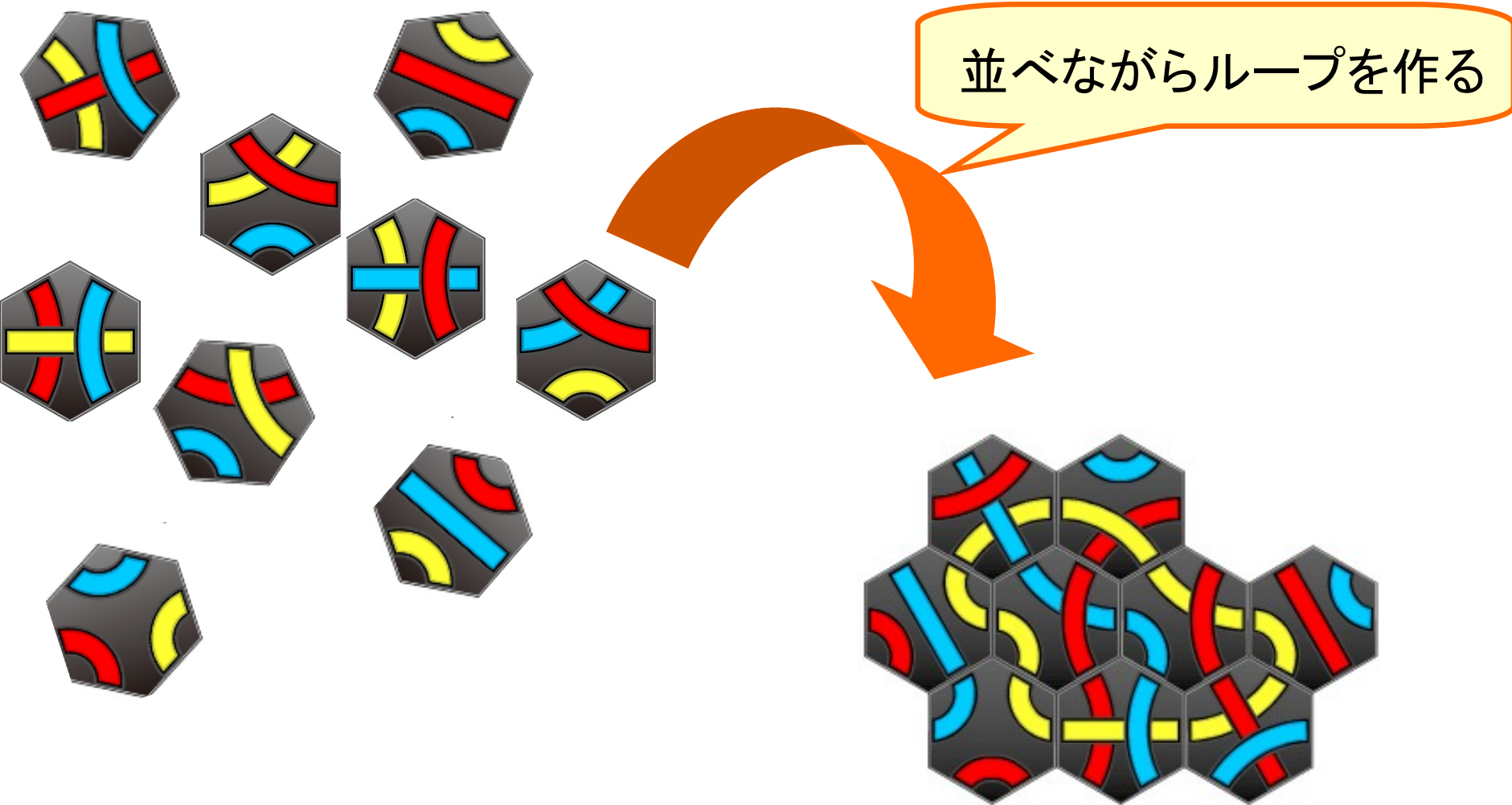
5枚でのタントリックスクリア

タントリックスにおける注意事項



ホールのない
丸い盤面

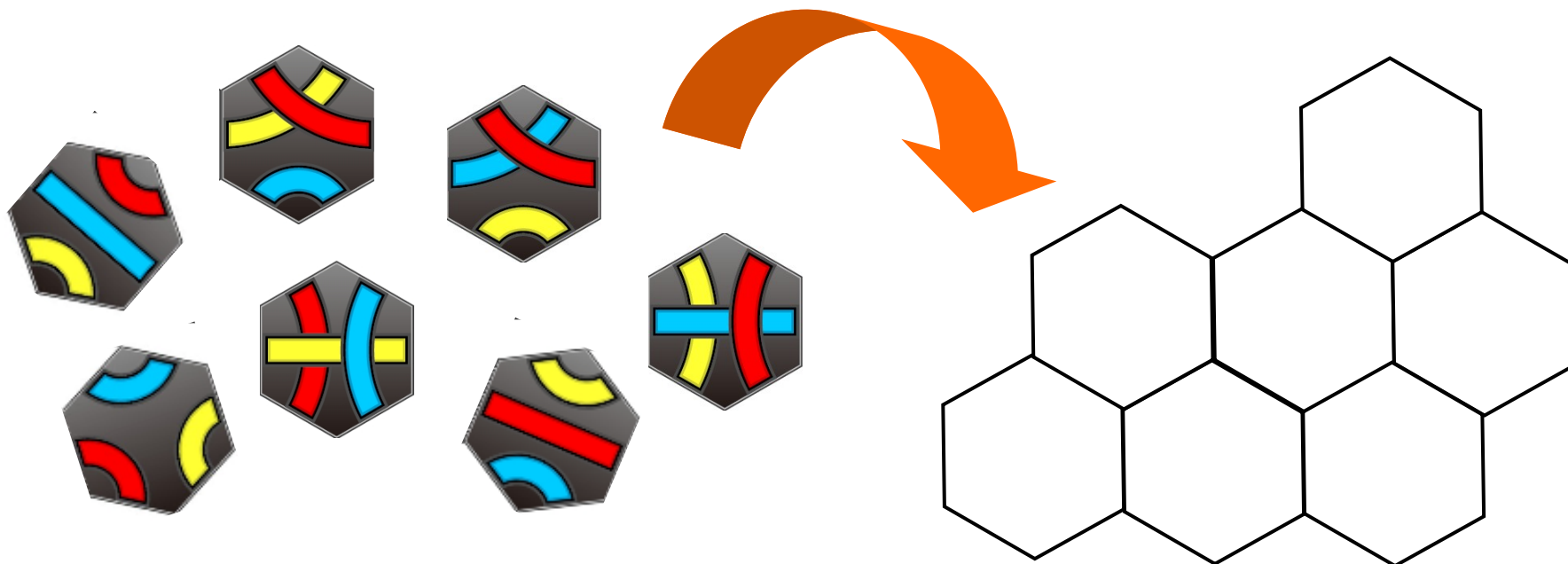
人がタントリックスを解くためのアプローチ



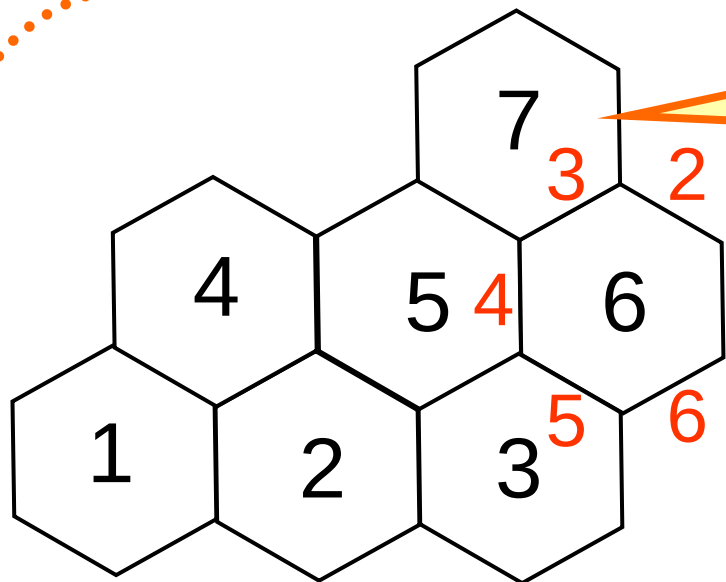
盤面固定タントリックス

ある盤面を固定(挑戦枚数と同じ数の置き場所)

その盤面にタイルを置く



置き場所と辺、タイルの向きの番号



タイルの置き場所に番号をつける

辺に番号をつける

置く向きは60度ずつの
回転により6通りある

隣接する置き場所の番号を返す関数

$$a(j, l) = j'$$

$$a(6, 3) = 7$$

$$a(6, 1) = 0$$



1, ..., 6

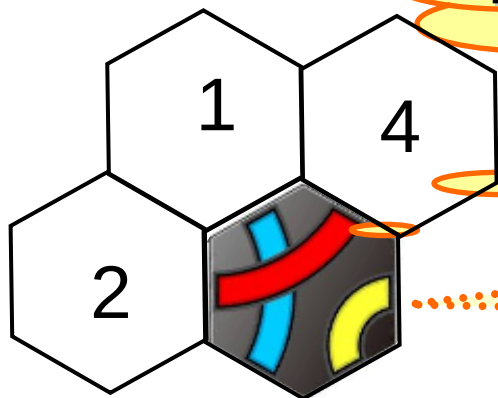
タイルの状態を表す変数

A1. 各置き場所にはタイルをちょうど1枚置く

A2. 各タイルは1回しか使用しない

$$X_{ijk} = \begin{cases} 1, & i\text{番タイルを置き場所}j\text{に}k\text{の向きで置く} \\ 0, & i\text{番タイルを置き場所}j\text{に}k\text{の向きで置かない} \end{cases}$$

1番のタイルを置き場所3に6の向きで置く



$$X_{1,3,6} = 1$$

タイルの状態を表す制約式

A1. 各置き場所にはタイルをちょうど1枚置く

A2. 各タイルは1回しか使用しない

$$A1. \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^6 x_{ijk} = 1 \quad (j = 1, \dots, n)$$

$$A2. \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^6 x_{ijk} = 1 \quad (i = 1, \dots, n)$$

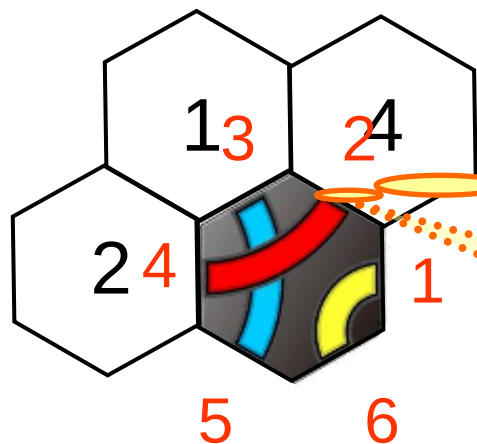
色に関する変数

A3. 他のタイルと隣接しない辺の色は指定色ではない

A4. 2枚のタイルが隣接している辺の色は同じ

* 辺の色とは辺に対応するラインの色である

$$y_{jl} = \begin{cases} 3, & \text{置き場所 } j \text{ の辺 } l \text{ の色が指定色} \\ 2, & \text{置き場所 } j \text{ の辺 } l \text{ の色が指定色や1以外の色} \\ 1, & \text{置き場所 } j \text{ の辺 } l \text{ の色が指定色や2以外の色} \end{cases}$$



置き場所3の辺2の色は指定色(赤色)

$$y_{3,2} = 3$$

色に関する制約式

A3. 他のタイルと隣接しない辺の色は指定色ではない

A4. 2枚のタイルが隣接している辺の色は同じ

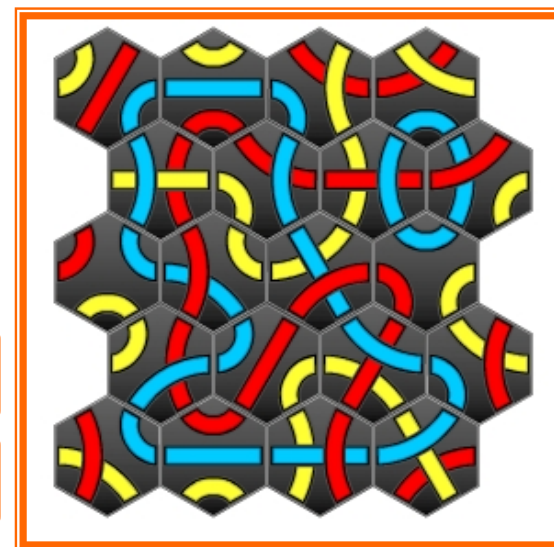
3:指定色
1, 2:指定色以外

A3. $1 \leq y_{jl} \leq 2 \quad (a(j, l) = 0)$

A4. $y_{jl} = y_{j'l'} \quad (a(j, l) = j'; a(j', l') = j)$

盤面固定タントリックスの実行結果

挑戦枚数	計算時間(秒)	ループの数
3	0.02	1
5	0.02	1
10	0.06	1
15	0.27	1
20	2.23	2
25	2.28	2
30	98.88	1
35	12944.06	2



サブツアー出現!!

サブツアー除去のアイデア

指定色が横切らない断面

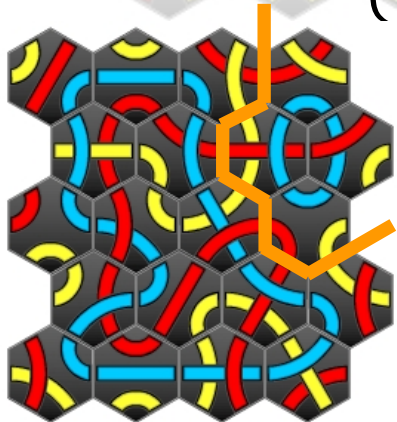


指定色が横切る断面



A5. 指定色が横切らない断面に対して指定色が横切る

$$Z_{jl} = \begin{cases} 1, & \text{置き場所 } j \text{ の辺 } l \text{ の色が指定色} \\ 0, & \text{置き場所 } j \text{ の辺 } l \text{ の色が指定色以外} \end{cases}$$



$$\sum_{(j,l) \in P} Z_{jl}$$

サブツアーがなくなるまで繰り返す

サブツアー除去の効果

サブツアー除去制約を加えた計算時間(単位: 秒)

解いた回数	20枚	25枚	35枚
1	2.23	2.28	12944.06
2	0.61	1.27	740.72
3		0.97	
合計時間	2.84	4.52	13684.78

約3時間50分

枚数が多くなると急激に時間がかかる!!

変数の削減

変数 x_{ijk} の数の削減



用いるタイル	1からn番	1から10番のみ
変数の数	$6n^2$	$60n(n \geq 11)$

A2. 各タイルは1回しか使用しない

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^6 x_{ijk} = 1 \quad (i = 1, \dots, n)$$

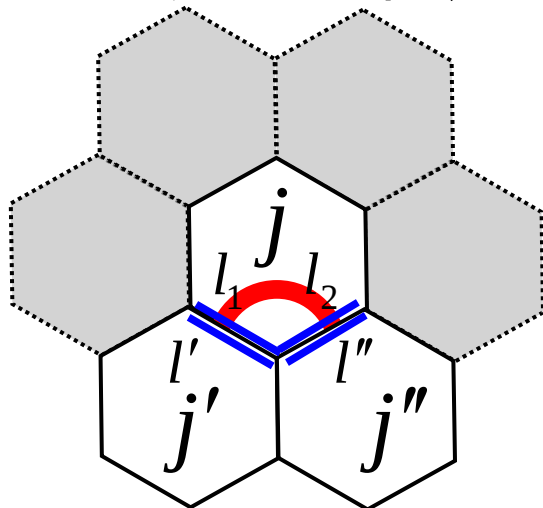
A2'. 各タイルの使用枚数は挑戦枚数によって決まる



$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^6 x_{ijk} = \left\lceil \frac{n+1-i}{10} \right\rceil \quad (i = 1, \dots, 10)$$

時間短縮のためのアイデア

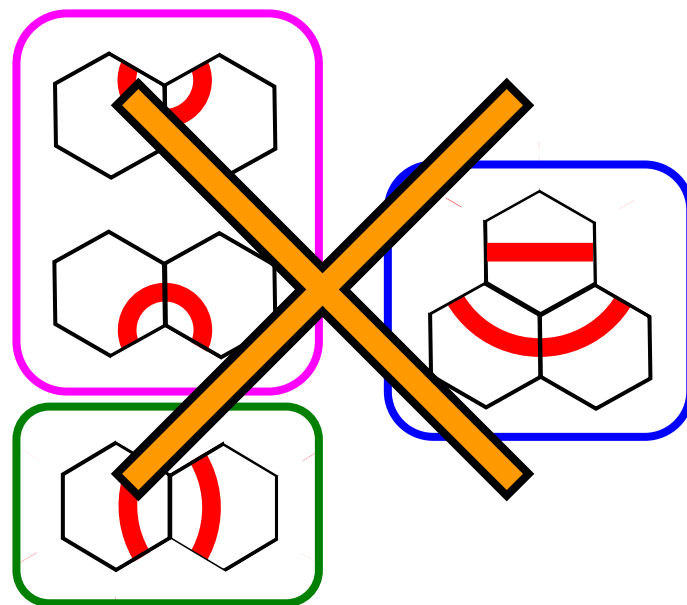
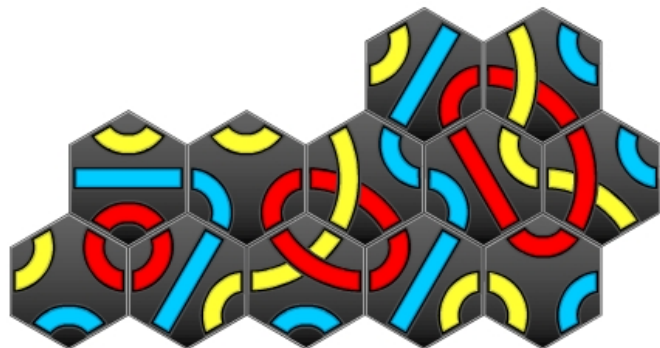
120°ラインの固定



$$y_{jl_1} = 3 \quad y_{j'l'} = 3$$

$$y_{jl_2} = 3 \quad y_{j''l''} = 3$$

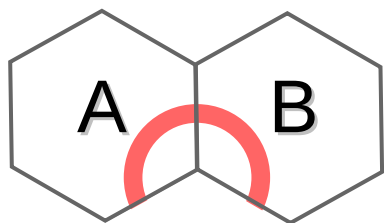
タイル3, 4, 5枚のサブツアー禁止



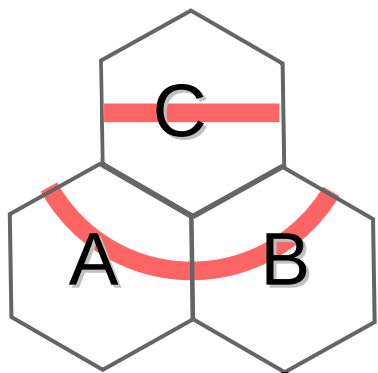
タイル3, 4, 5枚のループ禁止の制約式



指定色が赤色の場合



$$x_{2A3} + x_{3A5} + x_{2B5} + x_{3B1} \leq 1$$



$$\begin{aligned} & x_{1A1} + x_{4A6} + x_{6A3} + x_{7A1} + x_{8A2} + x_{10A2} \\ & + x_{1B6} + x_{4B5} + x_{6B2} + x_{7B6} + x_{8B1} + x_{10B1} \\ & + x_{5C1} + x_{5C4} + x_{9C1} + x_{9C4} \leq 2 \end{aligned}$$

盤面固定タントリックス最終結果

時間短縮のアイデアを加えた計算時間(単位: 秒)

繰り返しはサブツアーを除去制約を加えたことを表す

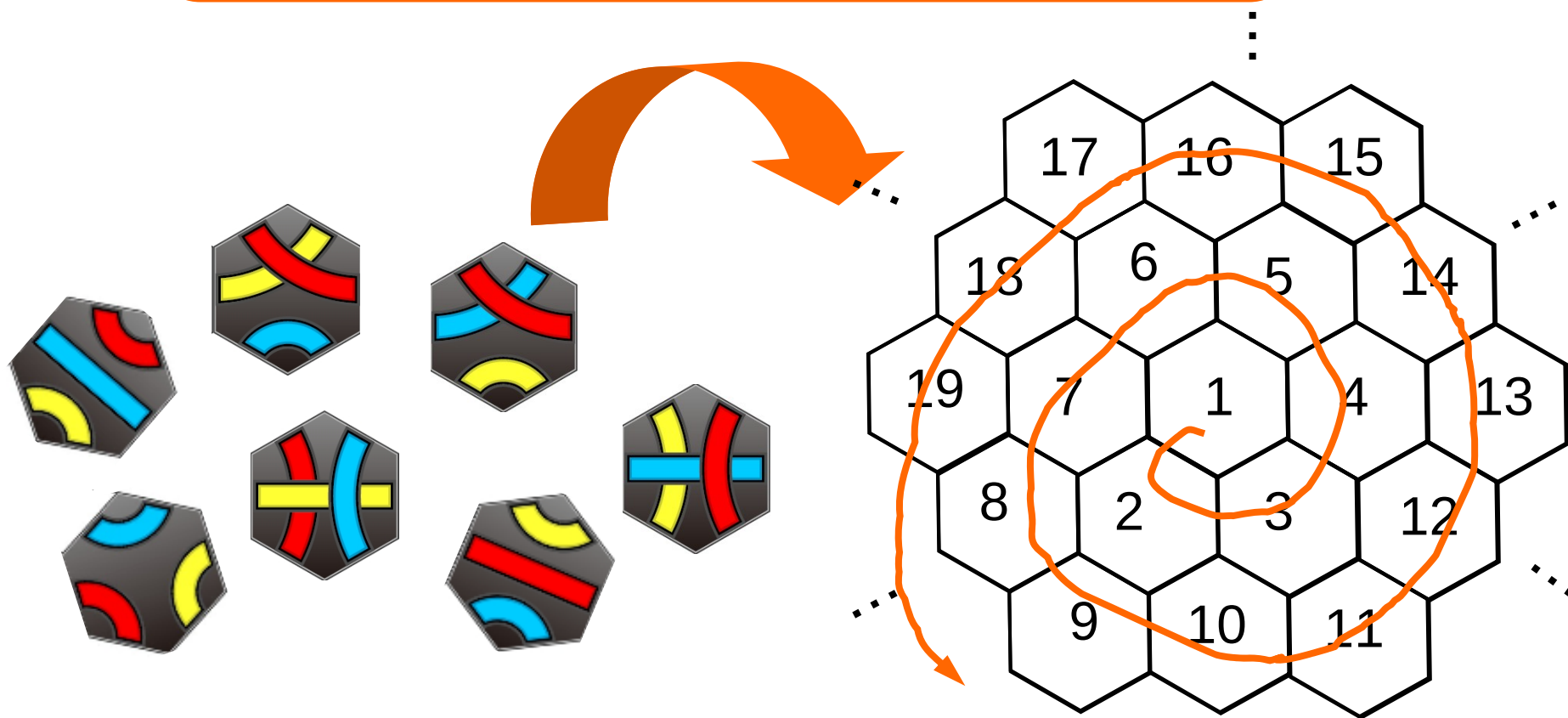
解いた回数	40	45	50	55	60
1	9.39	8945.70	73.23	23785.33	1331.17
2	29.69		68.94		2030.33
3			302.33		2574.87
4			359.49		270.05
5			200.16		506.83
6			816.75		
合計時間	39.08	8945.70	1820.90	23785.33	6713.25

60枚が約6,700秒で解けた!!

盤面制限タントリックスの問題設定

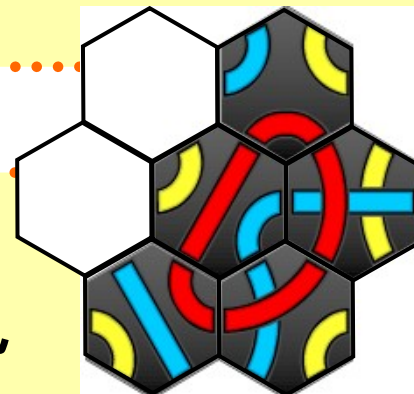
挑戦枚数より多い数の置き場所

その範囲で自由に盤面を構成



導入した変数

$$X_{ijk} = \begin{cases} 1, & i\text{番タイルを置き場所}j\text{に}k\text{の向きで置く} \\ 0, & i\text{番タイルを置き場所}j\text{に}k\text{の向きで置かない} \end{cases}$$



$$y_{jl} = \begin{cases} 3, & \text{置き場所 } j \text{ の辺 } l \text{ の色が指定色} \\ 2, & \text{置き場所 } j \text{ の辺 } l \text{ の色が指定色や1以外の色} \\ 1, & \text{置き場所 } j \text{ の辺 } l \text{ の色が指定色や2以外の色} \\ 0, & \text{置き場所 } j \text{ の辺 } l \text{ に対応する色がない} \end{cases}$$

タイルの状態を表す制約式

B1. 各置き場所にはタイルを高々1枚置く

B2. 使用する置き場所と挑戦枚数の数は等しい

B3. 各タイルの使用枚数は決まっている

$$\text{B1.} \quad \sum_{i=1}^{10} \sum_{k=1}^6 x_{ijk} \leq 1 \quad (j = 1, \dots, m)$$

$$\text{B2.} \quad \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^6 x_{ijk} = n$$

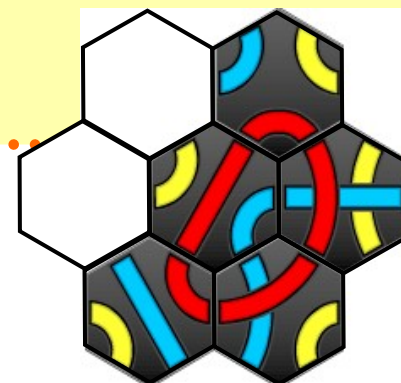
$$\text{B3.} \quad \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^6 x_{ijk} = \left\lceil \frac{n+1-i}{10} \right\rceil \quad (i = 1, \dots, 10)$$

隣接置き場所間を表す変数

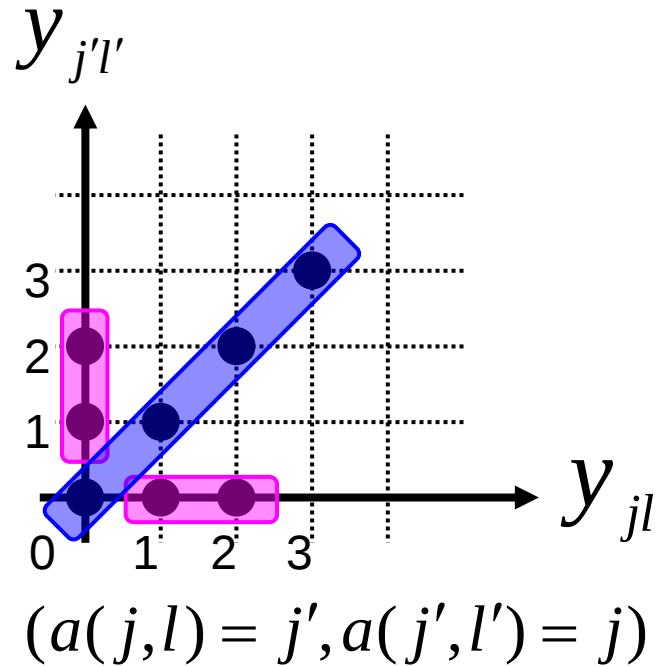
B4. 他のタイルと隣接しない辺に対応する色は指定色ではない

B5. 2枚のタイルが隣接する辺に対応する色は同じ

$$u_{jj'} = \begin{cases} 1, & \text{置き場所 } j, j' \text{ いずれか一方にのみタイルが置かれる} \\ 0, & \text{置き場所 } j, j' \text{ の両方にタイルが置かれるか} \\ & \text{両方にタイルが置かれない} \end{cases}$$



色に関する制約式



$$u_{jj'} = 1 \quad y_{jl} = 1, 2, y_{j'l'} = 0 \quad \text{or} \quad y_{jl} = 0, y_{j'l'} = 1, 2$$

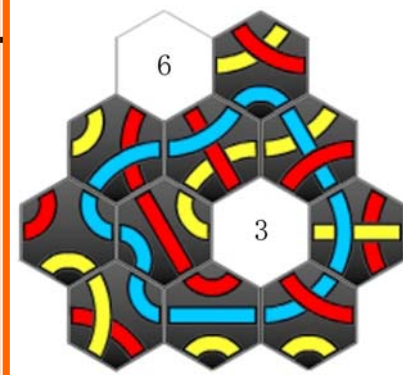
$$u_{jj'} = 0 \quad y_{jl} = y_{j'l'}$$

$$-2u_{jj'} \leq y_{jl} - y_{j'l'} \leq 2u_{jj'}$$

盤面制限タントリックスの実行結果

挑戦枚数	置き場所の数	計算時間(秒)	ホールの有無	ループの数
3	3	0.06	なし	1
	7	0.08	なし	1
5	7	0.05	なし	1
	12	0.26	なし	1
10	12	0.27	あり	1
	19	1.64	あり	1
15	19	0.84	あり	2
	27	9.64	あり	1
20	27	27.41	あり	1
	37	12.36	あり	1

盤面にホール出現!!



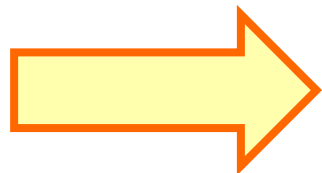
ホール出現防止のアイデア

i. 制約条件を加える

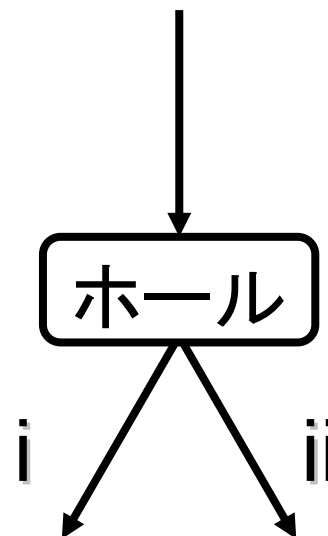


ホールの性質を調べる

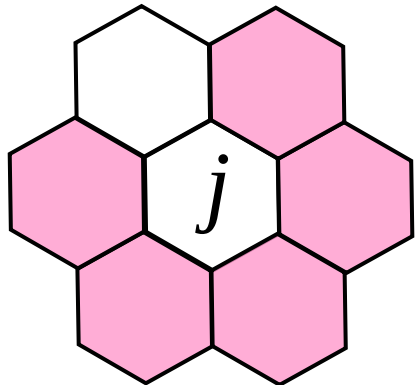
ii. 目的関数を変更する



置き場所に重みを設定する



ホール出現防止制約



タイルの置かれない1つの置き場所に隣接する
置き場所4 or 5 or 6箇所にタイルを置かない

$$\sum_{l=1}^6 \sum_{i=1}^{10} \sum_{k=1}^6 x_{i,a(j,l),k} \leq \sum_{i=1}^{10} \sum_{k=1}^6 x_{ijk} + 5$$

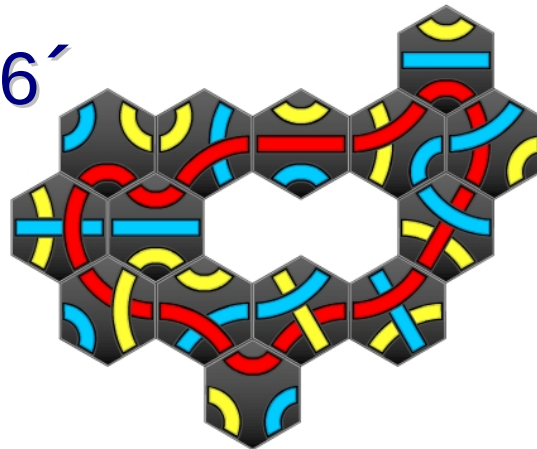
$$\sum_{l=1}^6 \sum_{i=1}^{10} \sum_{k=1}^6 x_{i,a(j,l),k} \leq 2 \sum_{i=1}^{10} \sum_{k=1}^6 x_{ijk} + 4$$

$$\sum_{l=1}^6 \sum_{i=1}^{10} \sum_{k=1}^6 x_{i,a(j,l),k} \leq 3 \sum_{i=1}^{10} \sum_{k=1}^6 x_{ijk} + 3$$

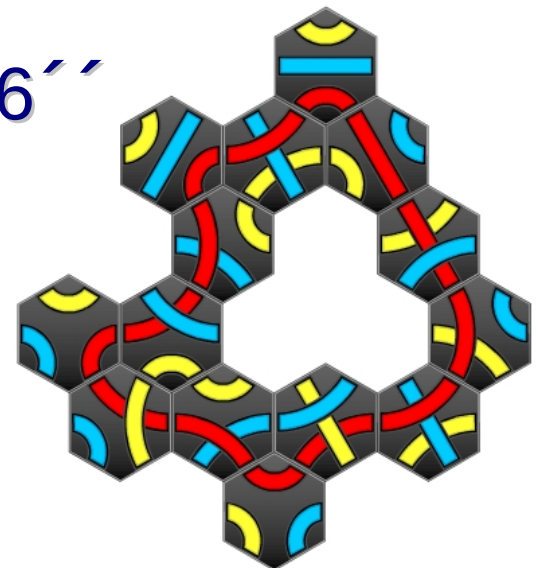
B6



B6'

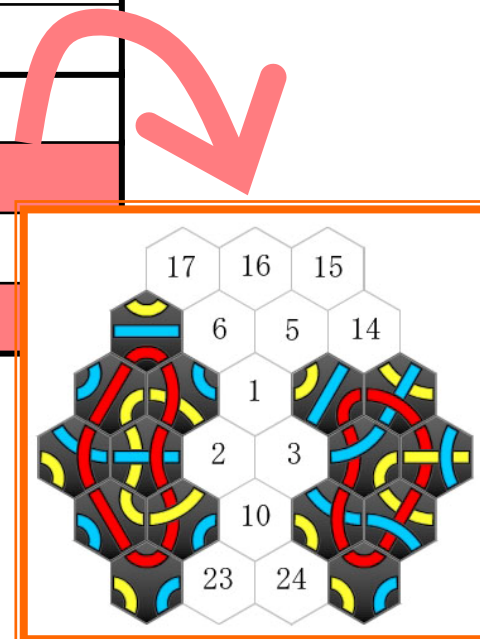


B6''

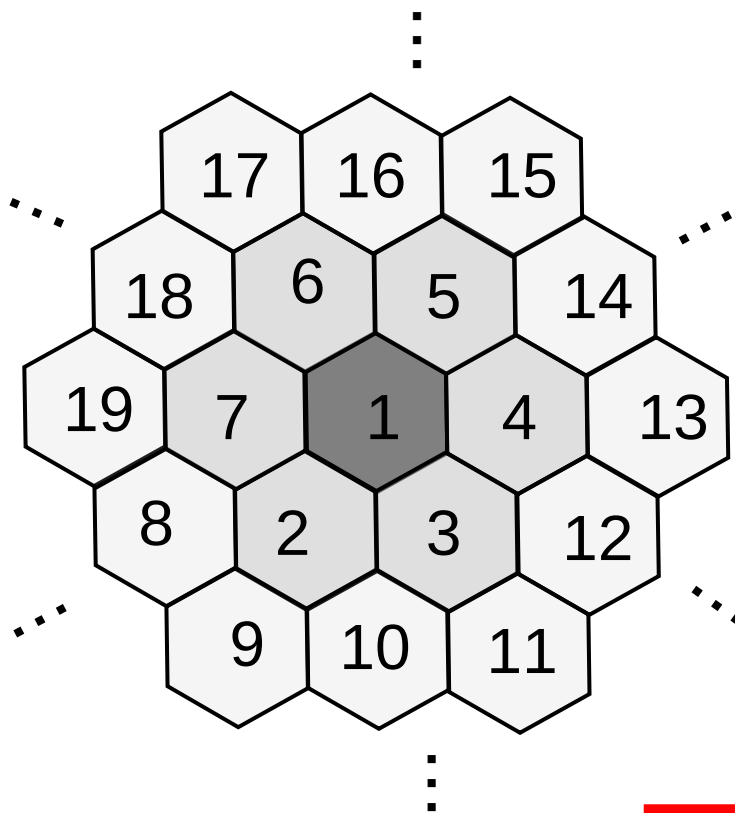


ホール出現防止制約を加えた結果

	挑戦枚数	置き場所の数	計算時間(秒)	ホールの有無
制約条件B6	15	9	17.72	なし
		27	17.24	あり
	20	27	5.69	あり
		37	12.59	あり
制約条件B6′	15	9	16.14	なし
		27	4.51	あり
	20	27	35.83	なし
		37	98.67	なし
制約条件B6′′	15	9	5.27	なし
		27	63.89	なし
	20	27	10.47	なし
		37	509.11	なし



置き場所に重みを付加した目的関数



それぞれの置き場所に重みをつける

1周目:0

2周目:-1

•

•

•

$$r \text{ 周目} : -r + 1$$

例

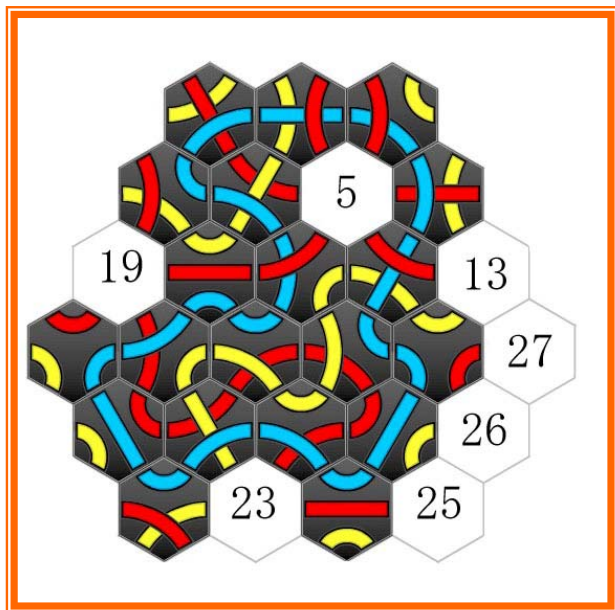
置き場所	重み
1	0
5	-1
8	-2

$$x_{1,1,1} \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{10} \sum_{k=1}^6 w(j) X_{ijk} \rightarrow \max$$

目的関数を変更した結果

挑戦枚数	置き場所の数	計算時間(秒)	ホールの有無	ループの数
15	19	27.44	なし	1
	27	6.70	あり	1
20	27	40.17	あり	1
	37	13.20	なし	3



ホール出現防止のアイデア

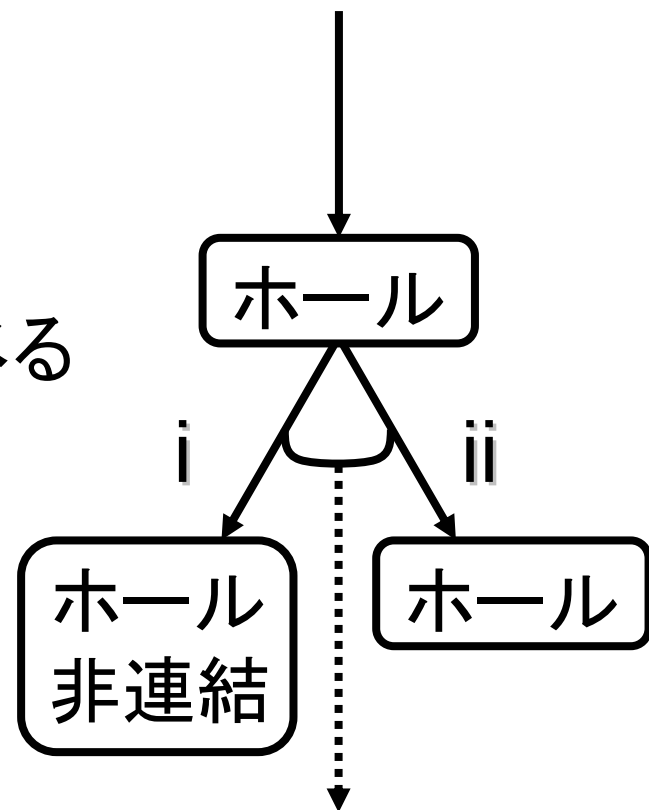
i. 制約条件を加える

ホールの性質を調べる

同時に用いる

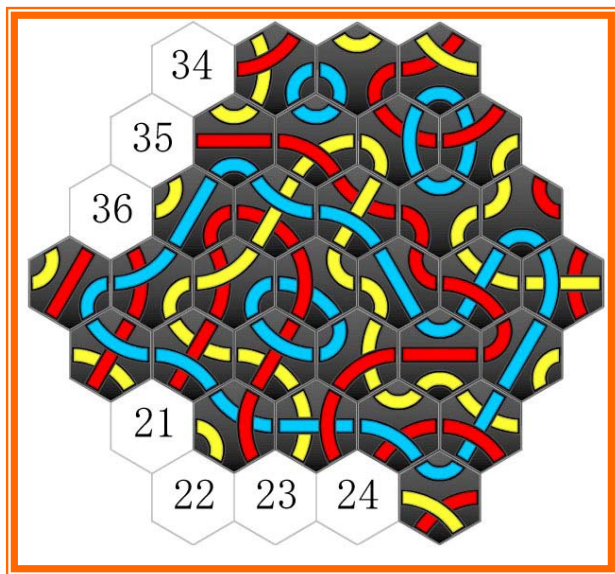
ii. 目的関数を変更する

置き場所に重みを設定する



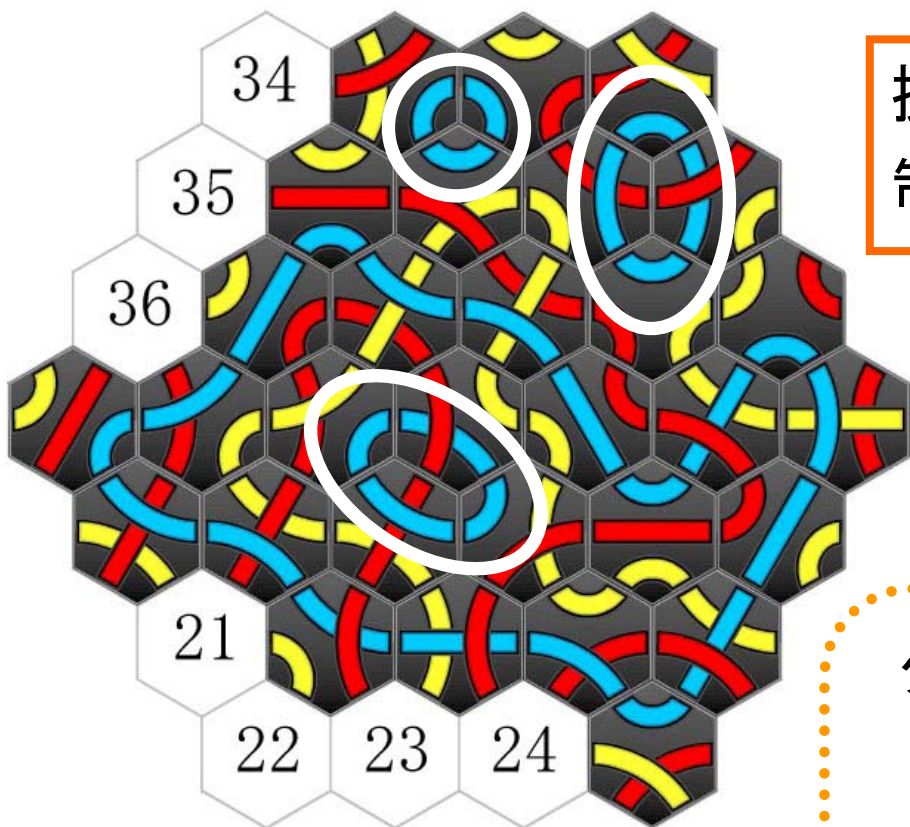
制約条件を加え，目的関数を変更した結果

挑戦枚数	置き場所の数	制約条件B6		制約条件B6′		制約条件B6′′	
		計算時間	ループの数	計算時間	ループの数	計算時間	ループの数
25	37	243.33	1	79.16	1	525.28	1
30	37	74.39	3	415.72	4	26.19	3
	48	72.55	4	624.52	2	21.58	2



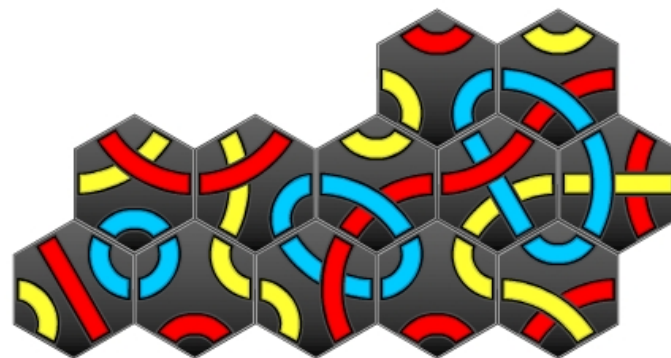
サブツアーが出現!!

タイル3, 4, 5枚のサブツアー禁止



挑戦枚数30枚, 置き場所の数37個
制約条件6'を加えたときの解

タイル3, 4, 5枚のサブツアー禁止

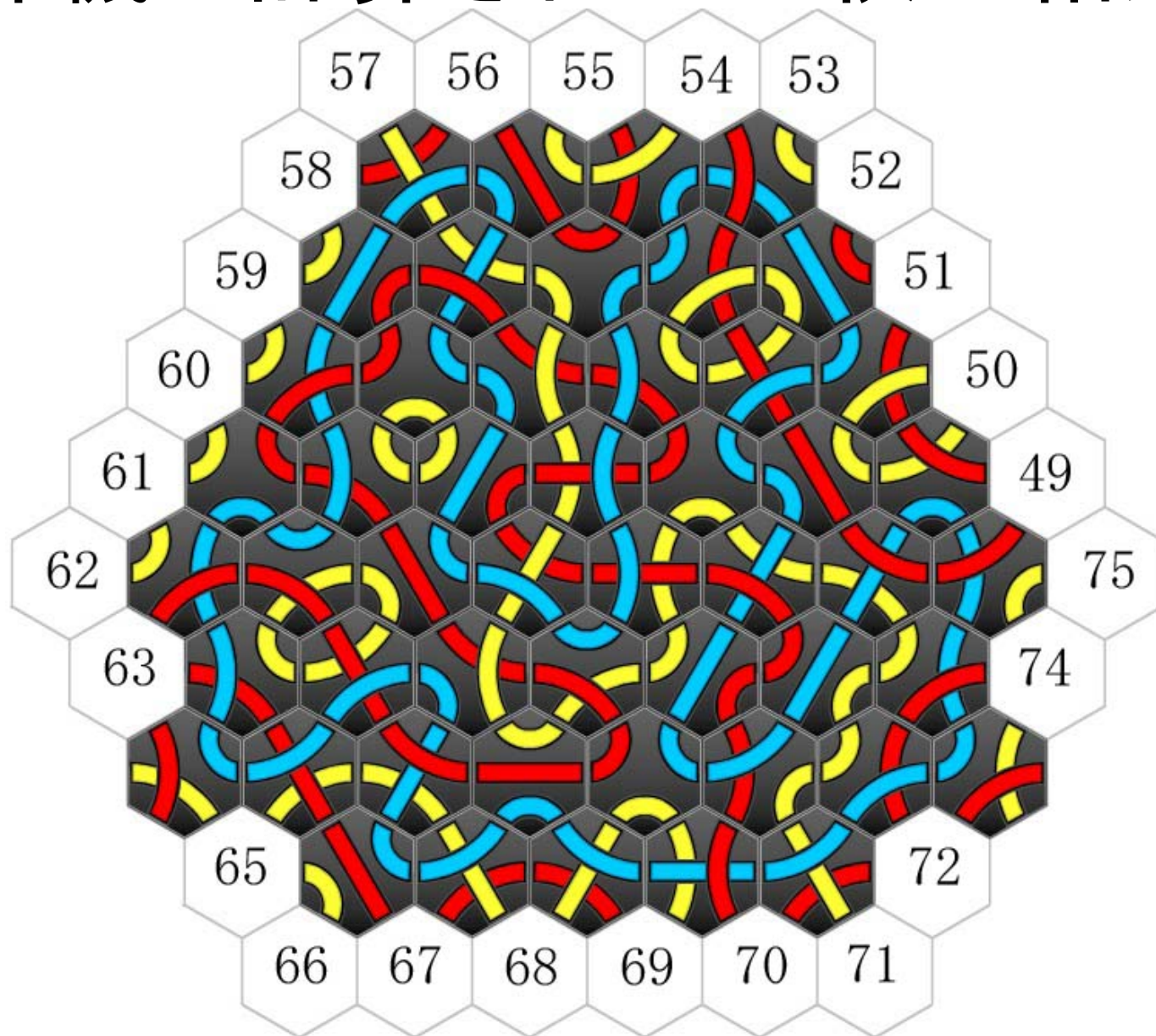


タントリックスの最終結果

挑戦枚数	置き場所の数	制約条件B6		制約条件B6'		制約条件B6''	
		計算時間	ループの数	計算時間	ループの数	計算時間	ループの数
30	37	89.63	0	37.47	0	48.28	0
	48	444.09	0	1482.56	0	4520.75	0
35	48	25571.17	0	48.67	2	917.42	0
40	48	1400.55	2	327.80	0	665.02	2
45	48			4698.13	3		
	61			12747.89	0		
50	61	408.09	3	704.01	4	2459.06	2
	75			5549.20	0		

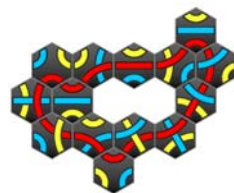
50枚が約5,500秒で解けた!!

計算機で計算された50枚の結果



盤面制限タントリックスの限界

挑戦枚数55枚, 置き場所の数75個



加えた制約条件	B6	B6′	B6′′
計算時間(秒)	28,396.02	101,740.34	47,441.33

(約8時間)

(約28時間)

(約13時間)

解にサブツアーが出現

CPLEXエラー

解くことが難しい

今後の課題

- さらに多い挑戦枚数を解くこと
 - 計算時間の短縮のための制約条件を考える
 - 盤面制限タントリックスにおいてループが唯一であることを制約条件として表現すること
 - 少ない枚数の解を一部再利用する
 - 指定色別の問題の難しさを考察するための実験
- タントリックスの計算量的な難しさ