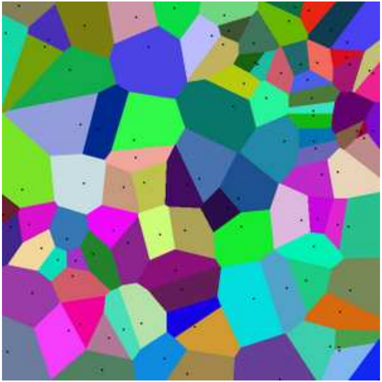
パス上のボロノイゲーム

清見礼 *, 斎藤寿樹, 上原隆平 (JAIST)

March 1, 2010

ボロノイ図 (Voronoi diagram)



from Wikipedia

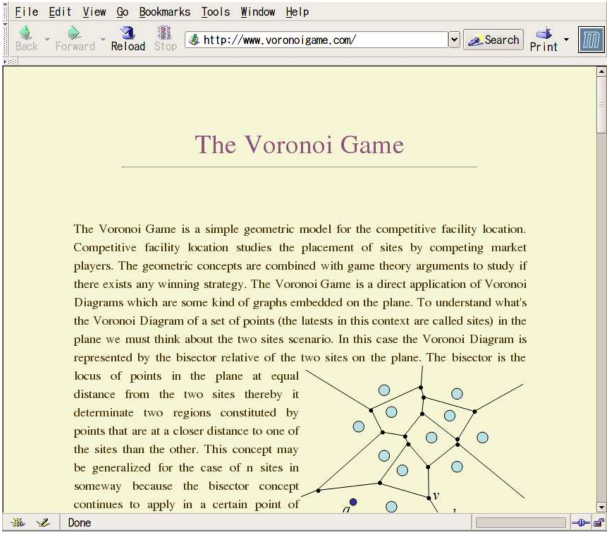
ボロノイゲーム (Voronoi game)

H. K. Ahn, S. W. Cheng, O. Cheong, M. Golin, R. van Oostrum, "Competitive facility location: the Voronoi game", *Theoretical Computer science*, vol. 310, 2004.

競争的施設配置問題のモデルとして提案

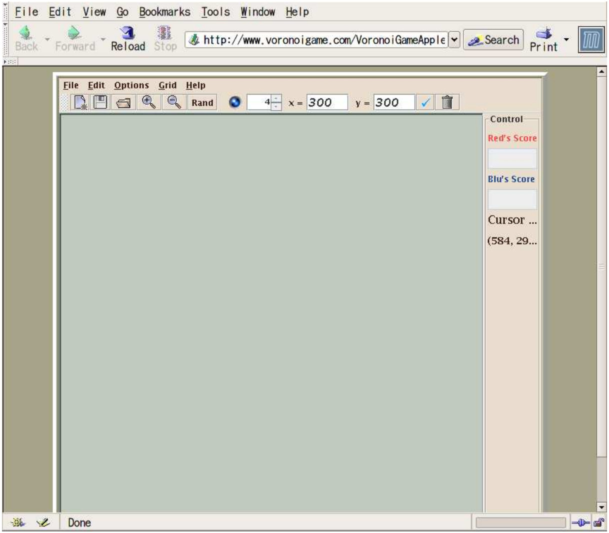
ボロノイゲーム (Voronoi game)

http://www.voronoigame.com



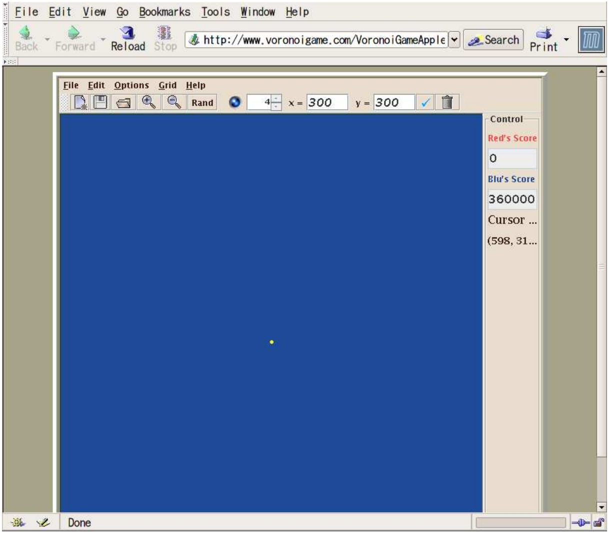
ボロノイゲーム (Voronoi game)

http://www.voronoigame.com



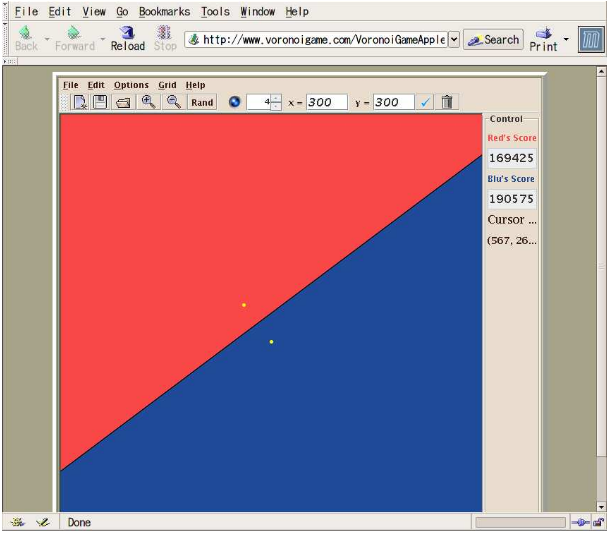
ボロノイゲーム (Voronoi game)

http://www.voronoigame.com



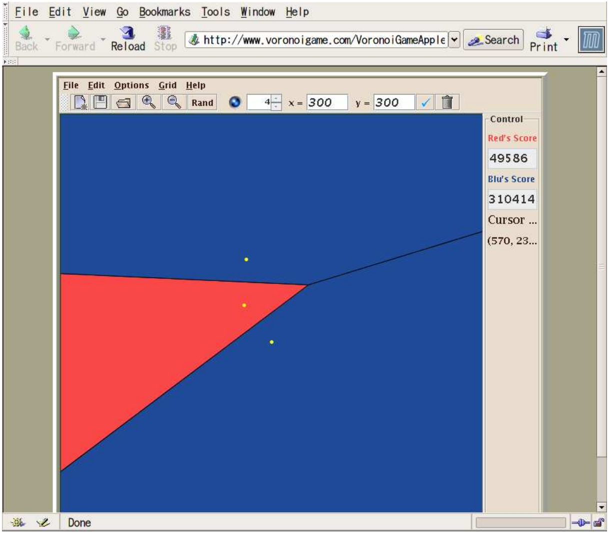
ボロノイゲーム (Voronoi game)

http://www.voronoigame.com



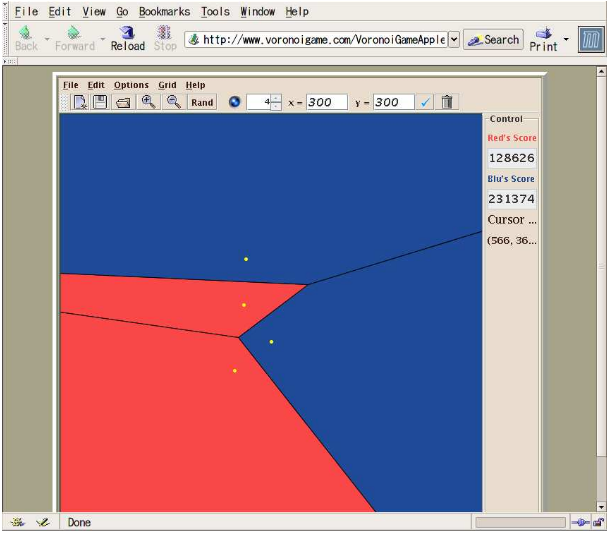
ボロノイゲーム (Voronoi game)

http://www.voronoigame.com



ボロノイゲーム (Voronoi game)

http://www.voronoigame.com



ボロノイゲーム (Voronoi game)

H. K. Ahn, S. W. Cheng, O. Cheong, M. Golin, R. van Oostrum, "Competitive facility location: the Voronoi game", *Theoretical Computer science*, vol. 310, 2004.

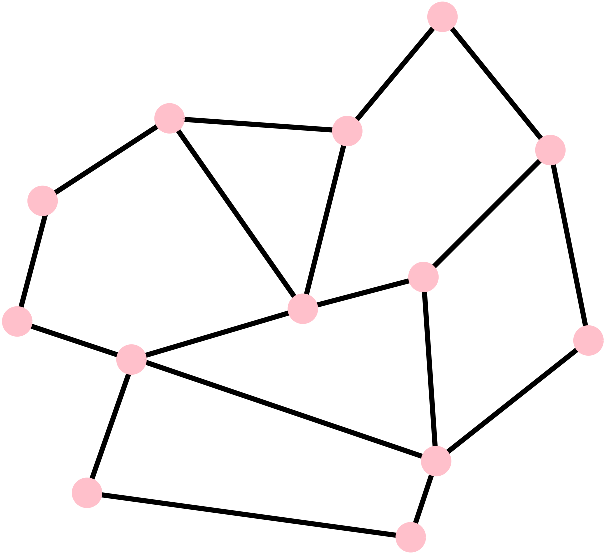
競争的施設配置問題のモデルとして提案

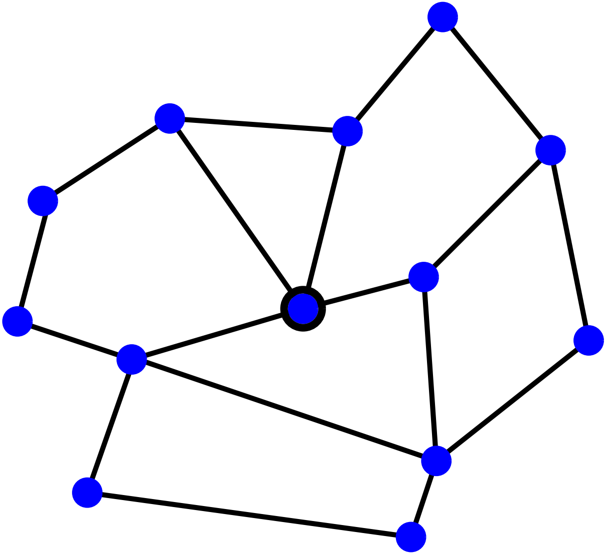
色々解析されている

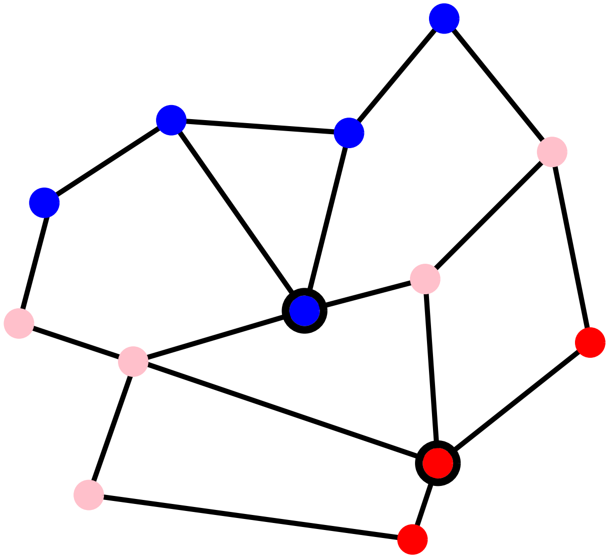
基本的にくっつけて打つのが有利
(“あんまり面白くないです” by 岡本さん)

グラフ上のボロノイゲーム

S. Teramoto, E. Demaine, R. Uehara, “Voronoi game on graphs and its complexity”, *2nd IEEE Symposium on Computational Intelligence and Games*, 2006
点を置ける領域をグラフ上に制限







グラフ上のボロノイゲーム

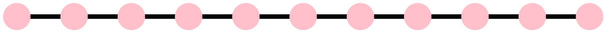
S. Teramoto, E. Demaine, R. Uehara, “Voronoi game on graphs and its complexity”, *2nd IEEE Symposium on Computational Intelligence and Games*, 2006
点を置ける領域をグラフ上に制限

一般のグラフ上では PSPACE-complete

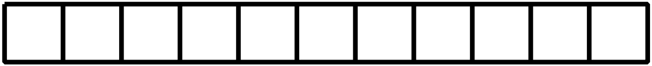
グラフを (十分大きな) 完全 k 分木に制限すると解ける

- k が奇数なら先手勝ち
- k が偶数なら引き分け

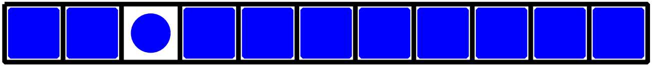
パス上のボロノイゲーム



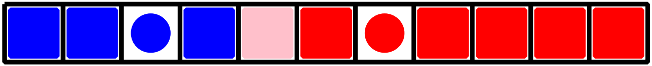
パス上のボロノイゲーム



パス上のボロノイゲーム



パス上のボロノイゲーム



パス上のボロノイゲーム

- 一見簡単そうだが，よく分からない

パス上のボロノイゲーム

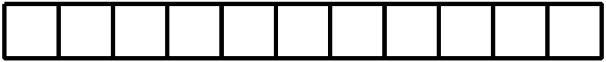
- 一見簡単そうだが，よく分からない
- 1 ターンで終了する場合は簡単

パス上のボロノイゲーム

- 一見簡単そうだが，よく分からない
- 1ターンで終了する場合は簡単
- プログラムを書いて実験しました
  自明な場合を除いて常に引き分け?

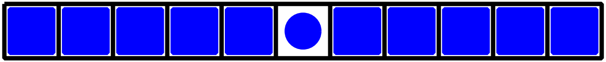
自明(1ターンで終了)な場合

- 点の数が奇数なら先手が真中に打って勝ち
- 点の数が偶数なら真中の横に打って引き分け



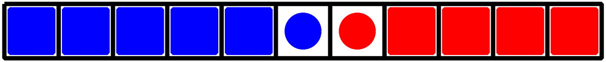
自明(1ターンで終了)な場合

- 点の数が奇数なら先手が真中に打って勝ち
- 点の数が偶数なら真中の横に打って引き分け



自明 (1 ターンで終了) な場合

- 点の数が奇数なら先手が真中に打って勝ち
- 点の数が偶数なら真中の横に打って引き分け

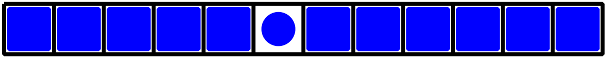


自明(1ターンで終了)な場合

- 点の数が奇数なら先手が真中に打って勝ち
- 点の数が偶数なら真中の横に打って引き分け

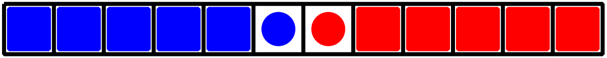
自明(1ターンで終了)な場合

- 点の数が奇数なら先手が真中に打って勝ち
- 点の数が偶数なら真中の横に打って引き分け



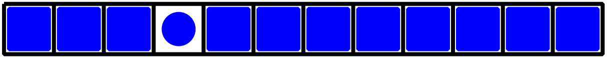
自明(1ターンで終了)な場合

- 点の数が奇数なら先手が真中に打って勝ち
- 点の数が偶数なら真中の横に打って引き分け



自明(1ターンで終了)な場合

- 点の数が奇数なら先手が真中に打って勝ち
- 点の数が偶数なら真中の横に打って引き分け



自明(1ターンで終了)な場合

- 点の数が奇数なら先手が真中に打って勝ち
- 点の数が偶数なら真中の横に打って引き分け

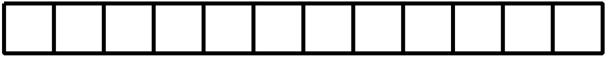
後手が負けることはありません

後手は最善を打っていれば少なくとも引き分けにはできる
(自明な場合を除いて)

- 点の数が偶数の時は簡単
- 点の数が奇数でも証明できる

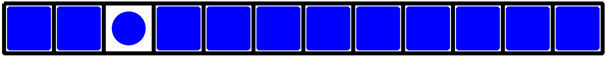
後手が負けることはありません (点の数偶数)

常に対称な手を打てばよい



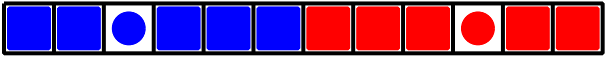
後手が負けることはありません (点の数偶数)

常に対称な手を打てばよい



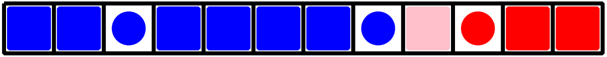
後手が負けることはありません (点の数偶数)

常に対称な手を打てばよい



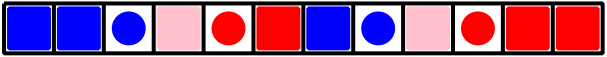
後手が負けることはありません (点の数偶数)

常に対称な手を打てばよい



後手が負けることはありません (点の数偶数)

常に対称な手を打てばよい



後手が負けることはありません (点の数奇数)

先手に真中に打たれると対称な手が打てない

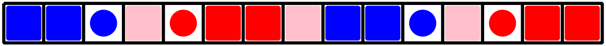
後手が負けることはありません (点の数奇数)

先手に真中に打たれると対称な手が打てない

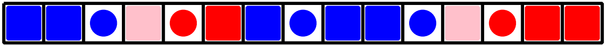
真中に打たれるまでは対称な手を打つ

(最後まで真中に打たれなければ引き分け)

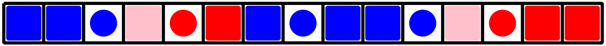
途中で先手が真中に打った場合



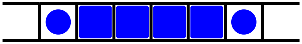
途中で先手が真中に打った場合



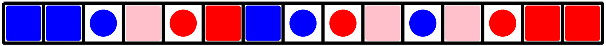
途中で先手が真中に打った場合



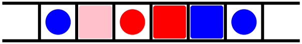
必ず青に囲まれた区間が一箇所だけできる



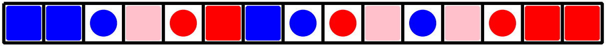
途中で先手が真中に打った場合



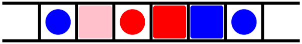
青に囲まれた区間の中に打つ



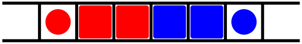
途中で先手が真中に打った場合



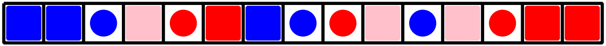
青に囲まれた区間の中に打つ



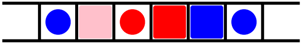
両端以外のすべての区間が引き分けになる



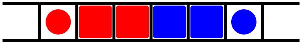
途中で先手が真中に打った場合



青に囲まれた区間の中に打つ



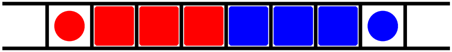
両端以外のすべての区間が引き分けになる



以降はこの状態をキープするように打っていく

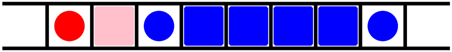
途中で先手が真中に打った場合

赤と青の間に青を打つと



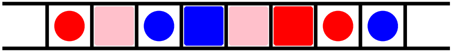
途中で先手が真中に打った場合

青に囲まれた区間が一箇所だけできる



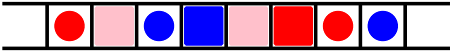
途中で先手が真中に打った場合

青で囲まれた区間の中に打つ

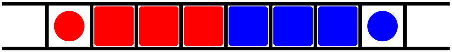


途中で先手が真中に打った場合

青で囲まれた区間の中に打つ

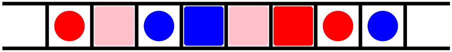


先手が青にくっつけて打ってきたら？

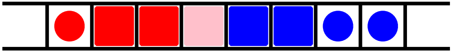


途中で先手が真中に打った場合

青で囲まれた区間の中に打つ

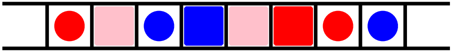


先手が青にくっつけて打ってきたら?

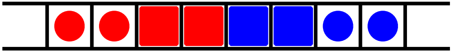


途中で先手が真中に打った場合

青で囲まれた区間の中に打つ

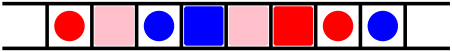


赤もくっつけて打てばいい

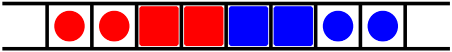


途中で先手が真中に打った場合

青で囲まれた区間の中に打つ



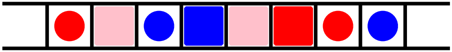
赤もくっつけて打てばいい



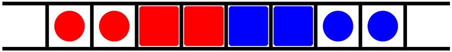
端の区間に先手が打ってきたら

途中で先手が真中に打った場合

青で囲まれた区間の中に打つ



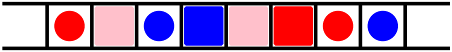
赤もくっつけて打てばいい



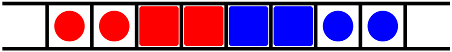
端の区間に先手が打ってきたら

途中で先手が真中に打った場合

青で囲まれた区間の中に打つ

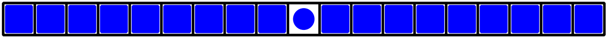


赤もくっつけて打てばいい

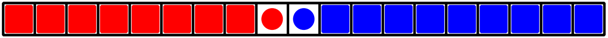


対称なところに打てばいい

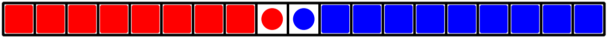
初手で先手が真中に打った場合



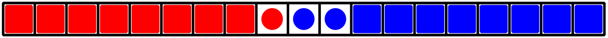
初手で先手が真中に打った場合



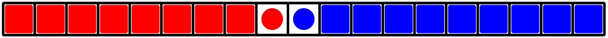
初手で先手が真中に打った場合



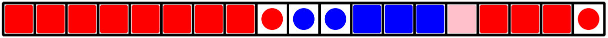
もしこんなところに打たれたら



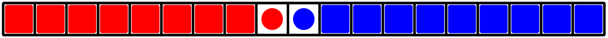
初手で先手が真中に打った場合



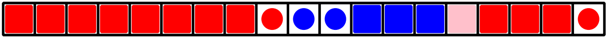
もしこんなところに打たれたら



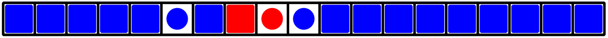
初手で先手が真中に打った場合



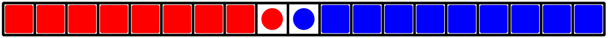
もしこんなところに打たれたら



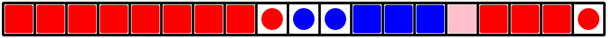
もしこんなところに打たれたら



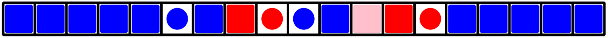
初手で先手が真中に打った場合



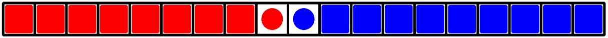
もしこんなところに打たれたら



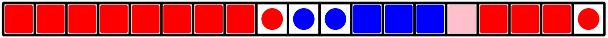
もしこんなところに打たれたら



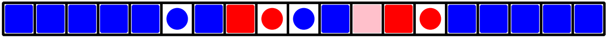
初手で先手が真中に打った場合



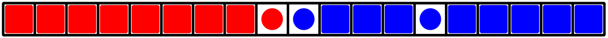
もしこんなところに打たれたら



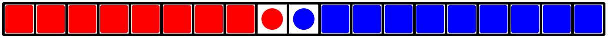
もしこんなところに打たれたら



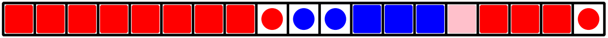
もしこんなところに打たれたら



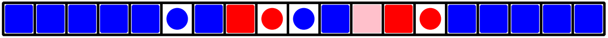
初手で先手が真中に打った場合



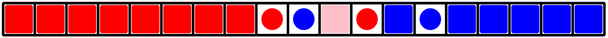
もしこんなところに打たれたら



もしこんなところに打たれたら



もしこんなところに打たれたら

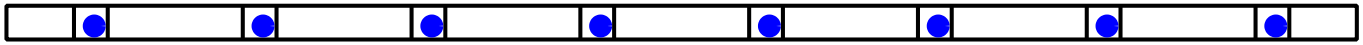


ということは

- 後手は負けることはない
- 先手に引き分け戦略はあるのか?

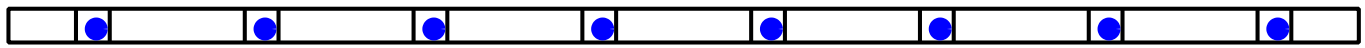
基本的なアイデア

等間隔に石を配置する

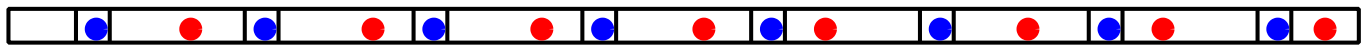


基本的なアイデア

等間隔に石を配置する

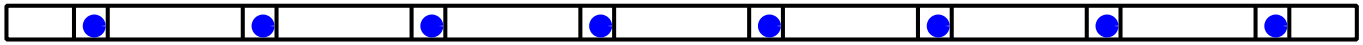


後手がどう置こうと引き分け

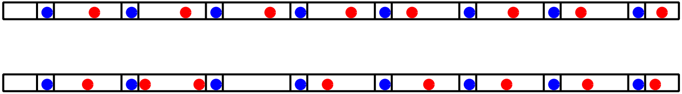


基本的なアイデア

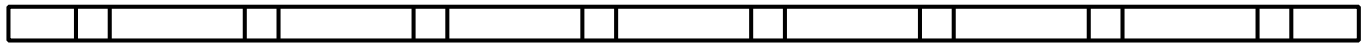
等間隔に石を配置する



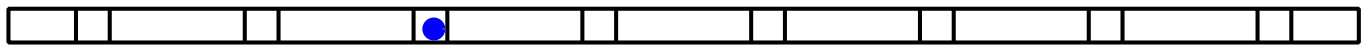
後手がどう置こうと引き分け



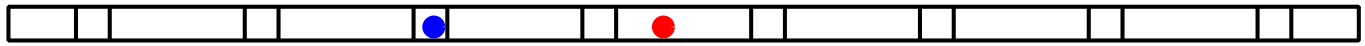
当然，そんなにうまくはいきません



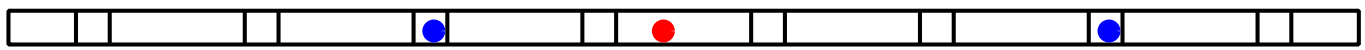
当然，そんなにうまくはいきません



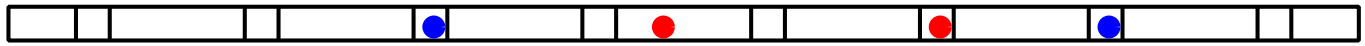
当然，そんなにうまくはいきません



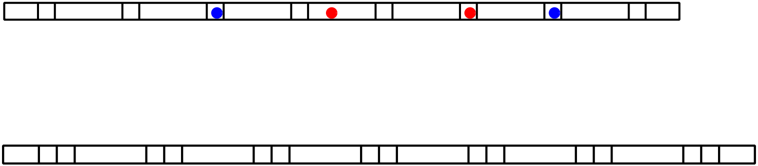
当然，そんなにうまくはいきません



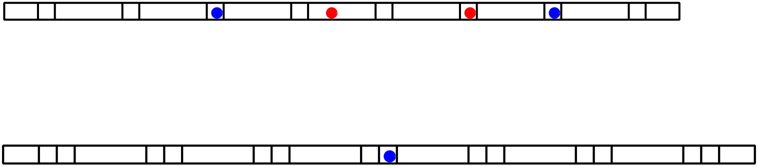
当然，そんなにうまくはいきません



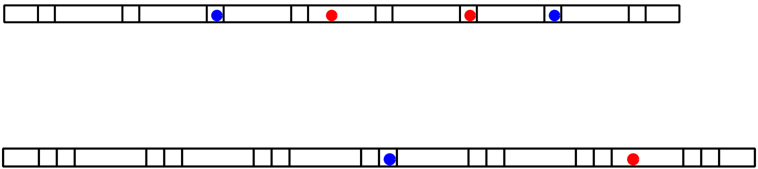
当然，そんなにうまくはいきません



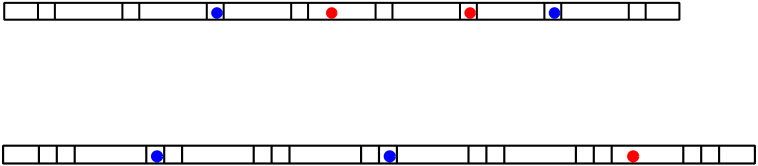
当然，そんなにうまくはいきません



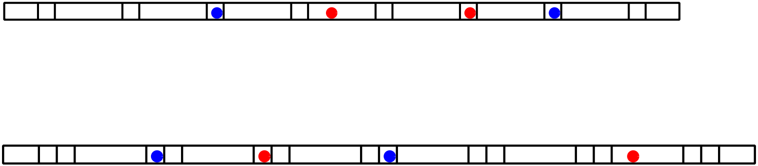
当然，そんなにうまくはいきません



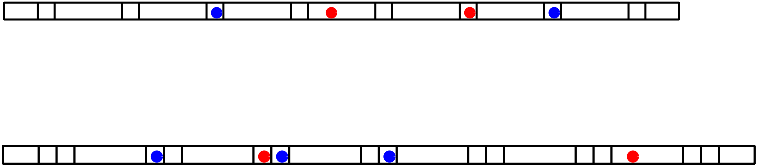
当然，そんなにうまくはいきません



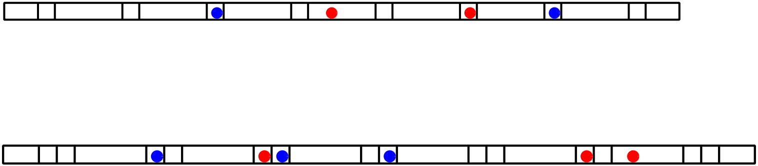
当然，そんなにうまくはいきません



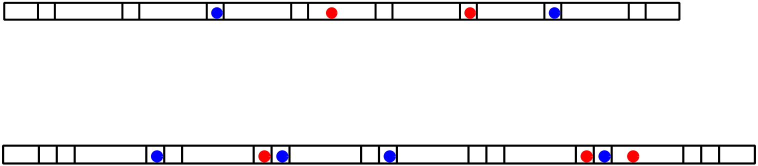
当然，そんなにうまくはいきません



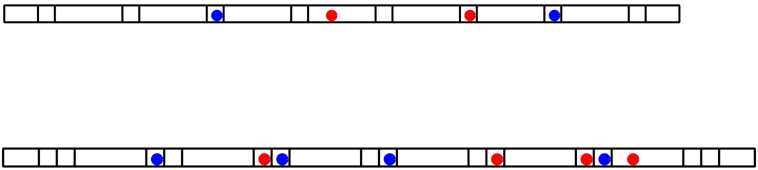
当然，そんなにうまくはいきません



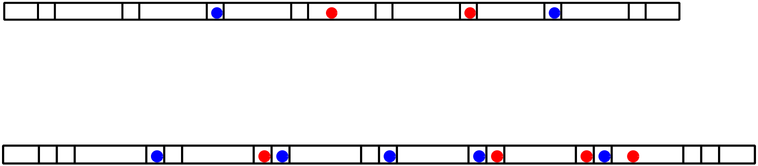
当然，そんなにうまくはいきません



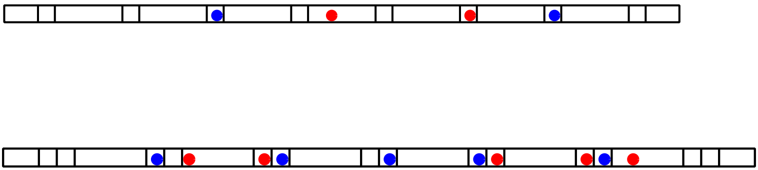
当然，そんなにうまくはいきません



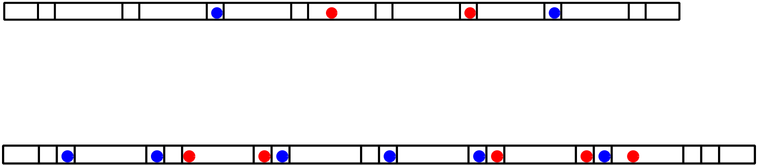
当然，そんなにうまくはいきません



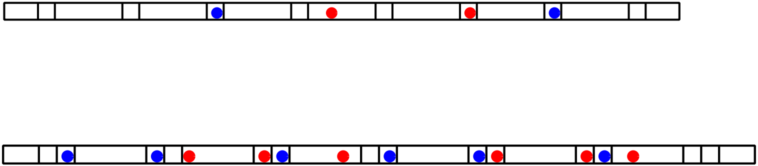
当然，そんなにうまくはいきません



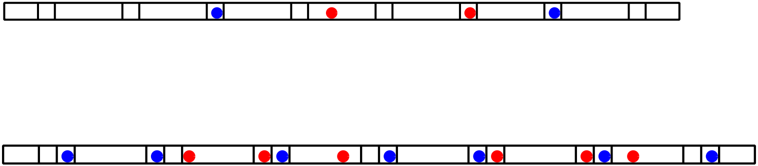
当然，そんなにうまくはいきません



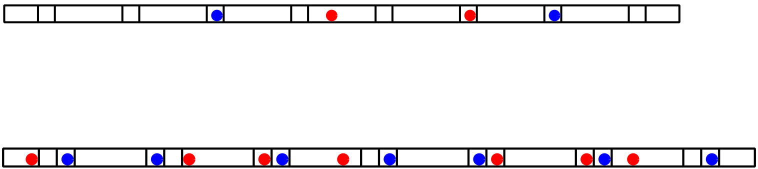
当然，そんなにうまくはいきません



当然，そんなにうまくはいきません

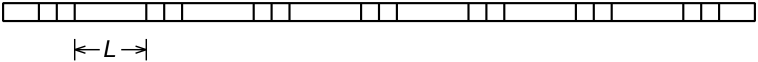


当然，そんなにうまくはいきません



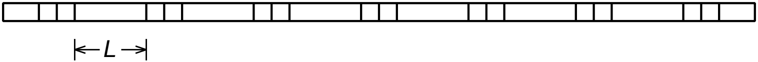
当然，そんなにうまくはいきません (その 2)

n : パス中の頂点数
k : ラウンド数
L : ブロック長



当然，そんなにうまくはいきません (その 2)

n : パス中の頂点数
k : ラウンド数
L : ブロック長

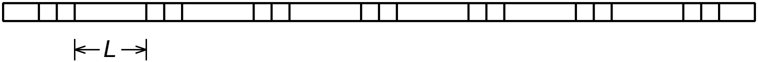


$$n = 2k + Lk$$

を満たす L が存在しなければならない

当然, そんなにうまくはいきません (その 2)

n : パス中の頂点数
k : ラウンド数
L : ブロック長

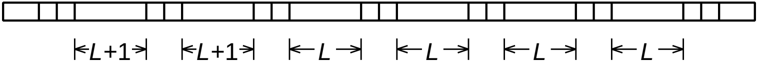


$n \ = \ 2k \ + \ Lk$
を満たす L が存在しなければならない

$n - 2k = Lk$
つまり, $n - 2k$ が k で割り切れなければならない

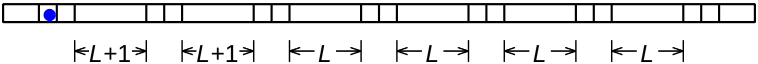
$(n-2k) \mod k \le k/2$ の場合

いくつかのブロック長を $L+1$ にする



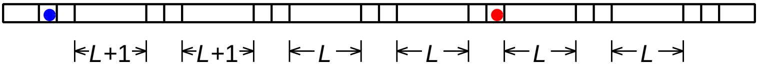
$(n-2k) \mod k \leq k/2$ の場合

いくつかのブロック長を $L+1$ にする



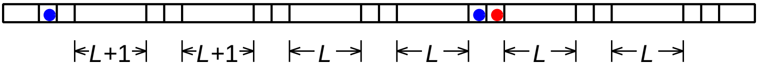
$(n-2k) \mod k \leq k/2$ の場合

いくつかのブロック長を $L+1$ にする



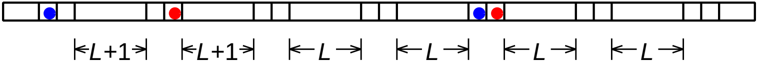
$(n-2k) \bmod k \le k/2$ の場合

いくつかのブロック長を $L+1$ にする



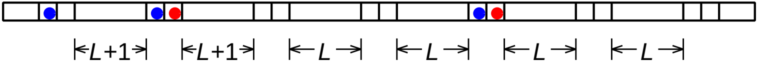
$(n-2k) \mod k \leq k/2$ の場合

いくつかのブロック長を $L+1$ にする



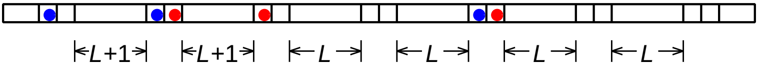
$(n-2k) \mod k \leq k/2$ の場合

いくつかのブロック長を $L+1$ にする



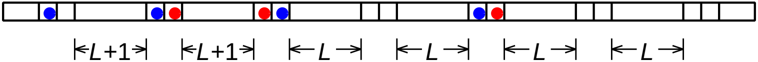
$(n-2k) \mod k \leq k/2$ の場合

いくつかのブロック長を $L+1$ にする



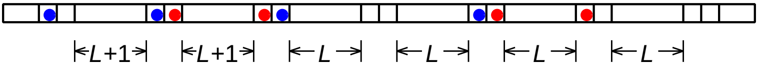
$(n-2k) \bmod k \le k/2$ の場合

いくつかのブロック長を $L+1$ にする



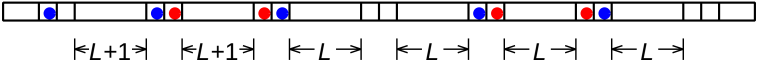
$(n-2k) \mod k \le k/2$ の場合

いくつかのブロック長を $L+1$ にする



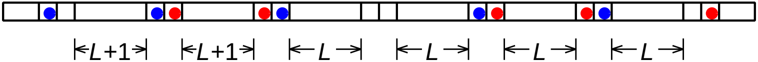
$(n-2k) \mod k \leq k/2$ の場合

いくつかのブロック長を $L+1$ にする



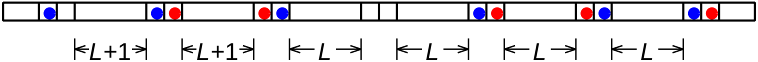
$(n-2k) \mod k \ \leq \ k/2$ の場合

いくつかのブロック長を $L+1$ にする



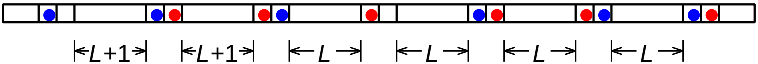
$(n-2k) \mod k \le k/2$ の場合

いくつかのブロック長を $L+1$ にする



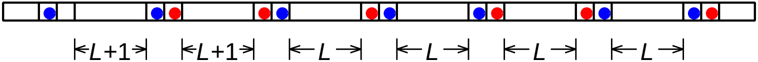
$(n-2k) \mod k \leq k/2$ の場合

いくつかのブロック長を $L+1$ にする



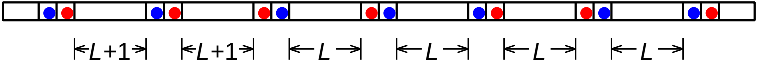
$(n-2k) \mod k \leq k/2$ の場合

いくつかのブロック長を $L+1$ にする



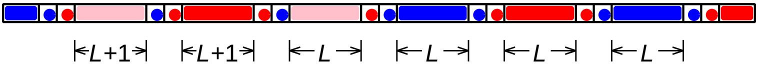
$(n-2k) \bmod k \le k/2$ の場合

いくつかのブロック長を $L+1$ にする



$(n-2k) \mod k \le k/2$ の場合

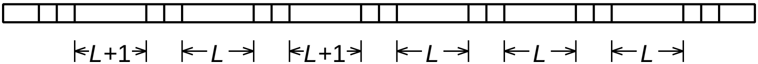
いくつかのブロック長を $L+1$ にする



とっているブロック数は等しいが，後手の勝ち

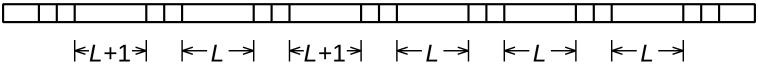
$(n-2k) \mod k \leq k/2$ の場合

長さ $L+1$ のブロックが連続しないように交互に配置

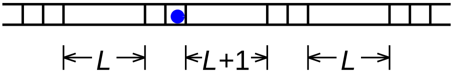


$(n-2k) \mod k \leq k/2$ の場合

長さ $L+1$ のブロックが連続しないように交互に配置

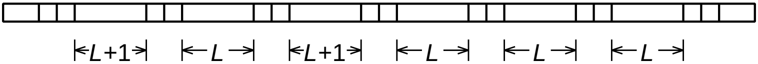


自分から L 側には打たず，$L+1$ 側に打つ

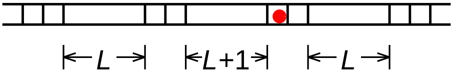


$(n-2k) \mod k \leq k/2$ の場合

長さ $L+1$ のブロックが連続しないように交互に配置

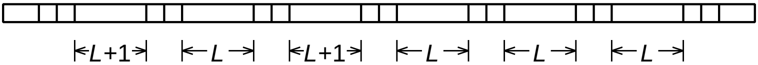


さらに，後手が $L+1$ のブロックをとりにきたら

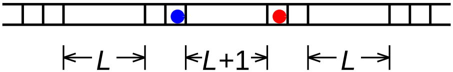


$(n-2k) \mod k \leq k/2$ の場合

長さ $L+1$ のブロックが連続しないように交互に配置

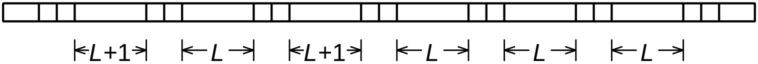


それを防ぐように打つ

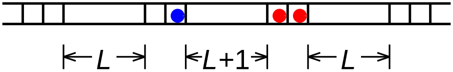


$(n-2k) \mod k \leq k/2$ の場合

長さ $L+1$ のブロックが連続しないように交互に配置

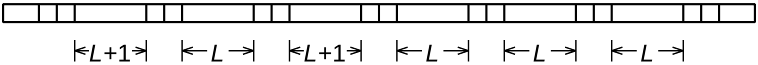


こうされたら，後手はブロック 1 つ分損をしているので大抵のところで勝てます

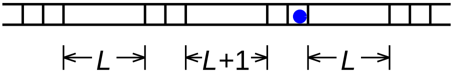


$(n-2k) \mod k \ \leq \ k/2$ の場合

長さ $L+1$ のブロックが連続しないように交互に配置

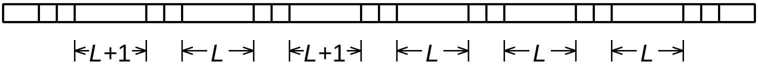


これや

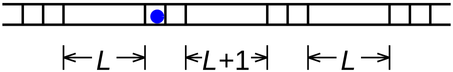


$(n-2k) \mod k \le k/2$ の場合

長さ $L+1$ のブロックが連続しないように交互に配置

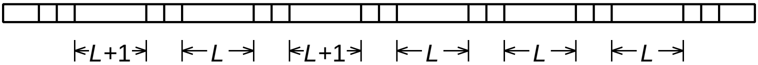


これやこれはありえない

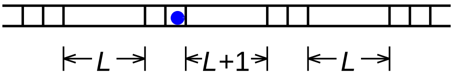


$(n-2k) \bmod k \le k/2$ の場合

長さ $L+1$ のブロックが連続しないように交互に配置

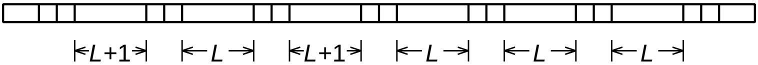


この場合は

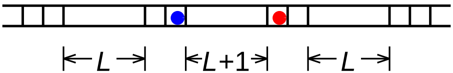


$(n-2k) \mod k \le k/2$ の場合

長さ $L+1$ のブロックが連続しないように交互に配置

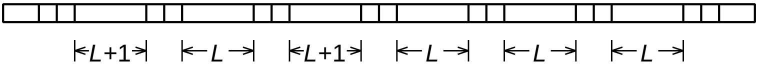


この場合は

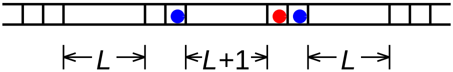


$(n-2k) \bmod k \le k/2$ の場合

長さ $L+1$ のブロックが連続しないように交互に配置

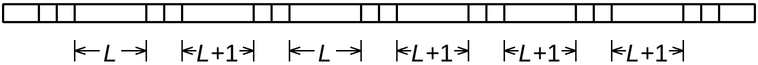


この場合は普通に打てば良い



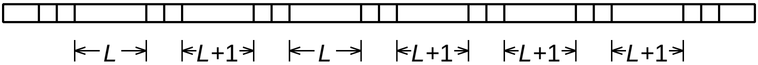
$(n-2k) \mod k > k/2$ の場合

長さ L のブロックが連続しないように交互に配置

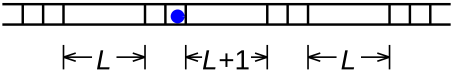


$(n-2k) \mod k > k/2$ の場合

長さ L のブロックが連続しないように交互に配置

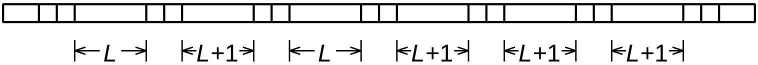


自分から L 側には打たず，$L+1$ 側に打つ

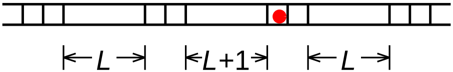


$(n-2k) \mod k > k/2$ の場合

長さ L のブロックが連続しないように交互に配置

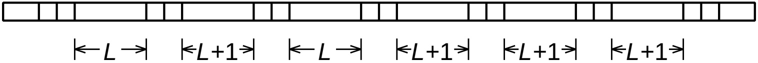


さらに，後手が L のブロックをとりにこさせたら

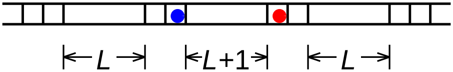


$(n-2k) \mod k > k/2$ の場合

長さ L のブロックが連続しないように交互に配置

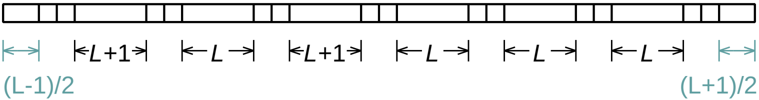


それを防ぐように打つ



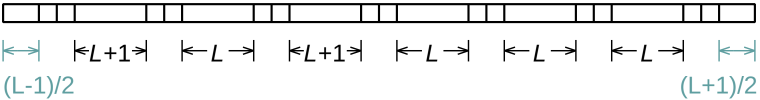
L が奇数のときはどうするの?

両端の長さをそれぞれ $\lfloor L/2 \rfloor$, $\lceil L/2 \rceil$ にすれば大丈夫

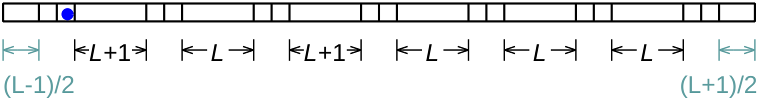


L が奇数のときはどうするの?

両端の長さをそれぞれ $\lfloor L/2 \rfloor$, $\lceil L/2 \rceil$ にすれば大丈夫



1 手目は必ずここに打つ



まとめ

- パス上のボロノイゲームは (自明な場合を除き) 引き分け
- 他のグラフクラスではどうか?
  - グリッドグラフ
  - 木