# 正四面体が通過できる小さな壁穴、およびその高次元版

徳重典英

## 1. はじめに

講演は板書でおこなったので、そこで話したことの概略といくらかの補足を書いてみようと思います。以下の話は、前原潤先生 (琉球大学)、Imre Ruzsa さん (Rényi Institute) との共同研究を元にしています。

与えられた凸体が通過できる小さな壁穴を見つけよ、という問題は例えば既に 1920 年代の Zindler[15] の研究がある。関連する話題として Prince Rupert's problem [3] も有名で、しばしばパズルの本に取り上げられる。(ガードナーの本にもあるかも？)

一般に凸体と凸な壁穴を与えて、凸体が壁穴を通過できるか、できるならその手順はどうかを問うことができる。これは計算量の点やアルゴリズムの点から面白い問題だが、大分難しそうなので、ここではごく特別な場合を詳しく調べてみよう。つまり、正四面体 (あるいは $n$ 次元正則単体) が、平面 (あるいは $n-1$ 次元超平面) の壁にあいた特別な種類の穴を通過できるかどうかについて考える。

凸体 $K \subset \mathbb{R}^n$ と $d > 0$ に対し、$K$ と相似で、かつ直径が $K$ の直径の $d$ 倍である凸体を $dK$ とかく。$S_n, Q_n, B_n$ はそれぞれ直径が 1 の $n$ 次元正則単体、$n$ 次元立方体、$n$ 次元球体とする (従って $S_n$ の一辺の長さは 1、$Q_n$ は一辺 $1/\sqrt{n}$)。

$H$ を直径 1 の $n-1$ 次元凸体とする。これが $\mathbb{R}^n$ の超平面上にあるとき、$H$ を壁穴と呼ぶ。興味があるのは、以下の二種類の壁穴の直径の最小値である。

$$\gamma(n,H) := \min\{d : S_n \text{ は } dH \text{ の壁穴を通過する }\},$$
$$\Gamma(n,H) := \min\{d : S_n \subset (dH) \times \mathbb{R}\}.$$

$\gamma$ が壁の厚みを 0 だとして、あらゆる方法で壁穴を通過することを許しているのに対し、$\Gamma$ は壁に直交する平行移動のみで壁穴を通過する場合、即ち壁が十分厚い場合を考えている。$\gamma(n,H) \le \Gamma(n,H)$ である。

$\Gamma(n,B_n)$ の決定は、次元 $n$ が奇数の場合は Pukhov [12] および Weißback [14] により、また偶数次元 (と奇数次元) の場合は Brandenberg–Theobald

*Date*: March 9, 2009, 10:30am.

[1, 2] によってなされた。

$$\Gamma(n,B_{n-1})=\begin{cases}\sqrt{\frac{2(n-1)}{n+1}} & n\text{ が奇数のとき},\\ \frac{2n-1}{\sqrt{2n(n+1)}} & n\text{ が偶数のとき}.\end{cases} \tag{1}$$

## 2. 三次元の話

我々の研究の出発点は、Itoh–Tanoue–Zamfirescu [7] による次の結果だった。

$$\gamma(3,B_2)=2r=0.8956\ldots, \tag{2}$$

$$\gamma(3,Q_2)=\Gamma(3,Q_2)=1. \tag{3}$$

ただし (2) の $r$ は方程式 $216x^6-9x^4+38x^2-9=0$ の $(0,1)$ 区間の唯一の根である。単位正四面体を、頂点を通る平面で切ると、切断面は三角形であるが、その外接円の直径の最小値が $2r$ となる。また一辺 $1/\sqrt{2}$ の立方体の頂点のうち 4 個をうまく選んで、単位正四面体をなすようにできる。この配置から (3) を実現する壁穴の通過が得られる。

我々は [10] において、

$$\gamma(3,S_2)=\Gamma(3,S_2)=\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=0.9855...$$

を示した。講演で説明した穴を通過する手順は、数学セミナー 2009 年 3 月号の 93 ページにある。最小性を証明する急所は、「凸体が三角形 (正三角形でなくてよい) の壁穴を通過するなら、壁に直交する方向の平行移動だけで通過できる」という事実である。

## 3. 高次元の話

**3.1. 正則単体の穴.** $S_n$ の幅は Steinhagen [13] の結果から、$n$ が奇数なら $\sqrt{\frac{2}{n+1}}$、$n$ が偶数なら $\sqrt{\frac{2n+2}{n(n+2)}}$ となる。これを用いて次を得る。

$$\gamma(n,S_{n-1})\geq\begin{cases}\sqrt{1-\frac{1}{n}} & n\text{ が奇数のとき},\\ \sqrt{1-\frac{1}{n+2}} & n\text{ が偶数のとき}.\end{cases} \tag{4}$$

これと $\gamma(n,S_{n-1})\leq\Gamma(n,S_{n-1})\leq 1$ から、

$$\lim_{n\to\infty}\gamma(n,S_{n-1})=\lim_{n\to\infty}\Gamma(n,S_{n-1})=1.$$

上の事実は、以下の方針でも示せる。まず、凸体が壁穴を通過するなら、凸体の重心が壁穴上にあるとき、凸体を壁で切断すると、切断面の $n-1$ 次元体積は、壁穴の $n-1$ 次元体積より大きくはないことに注意する。[5] の結果を用いると、$S_n$ の中心切断 (重心を通る超平面での切り口) の体積は、$\mathrm{vol}(S_{n-1})/(2\sqrt{3})$ より大きいことがわかる。ここから

$\gamma(n,S_{n-1}) \to 1$ が従う。この議論は、Jiří Matoušek と Matthieu Fradelizi による。ちなみに、$S_n$ の中心切断の体積が最小になるのは、切断面が $S_n$ のある facet と平行なときだと予想されており、未解決である。

なお、3 次元の場合と同様にして、$n \geq 4$ の場合でも $\Gamma(n,S_{n-1}) < 1$ であることを示せる。また (4) は $\Gamma(n,S_{n-1})$ の下界を与えるが、$n$ が奇数の場合は、$S_n$ の外接球の直径が $\sqrt{2(n-1)/n}$ であることと (1) を用いて、

$$\Gamma(n,S_{n-1}) \geq \sqrt{1-\tfrac{1}{n+1}}$$

と改善できる。

$n$ 次元空間内の凸体が、(正則とは限らない、一般の)$n-1$ 次元単体の壁穴を通過するなら、平行移動だけで通過することを証明できる。しかし、これが壁に直交する平行移動で実現できるのか ($n \geq 4$ の場合は) 不明である。つまり、$\gamma(n,S_{n-1}) = \Gamma(n,S_{n-1})$ は成り立つだろうか？3 次元と 4 次元以上の違いの一つは次の事実 [4, 8] である。3 次元空間においては、三角形の底面を垂直に持ち上げて (無限に長い) 三角柱を作り、これを平面で切ると、切断面は必ず底面と合同な三角形を含む。しかし、同様のことは 4 次元以上では成立しない。

3.2. **球体の壁穴.** (1) より $n \to \infty$ のとき $\Gamma(n,B_{n-1}) \to \sqrt{2}$ である。一方、$\gamma(n,B_{n-1}) \to 3\sqrt{2}/4 = 1.06\ldots$ が成り立つ。つまり、球体の壁穴においては、通過に際して回転を許せば ($\gamma$)、平行移動だけの場合 ($\Gamma$) より穴を小さくできる。我々は $\gamma(n,B_{n-1})$ について $n=3$ の議論を自然に拡張することで以下の結果を得た [11]。$n$ が偶数なら、

$$\gamma(n,B_{n-1}) = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2n}{n+1}} = \frac{3}{4\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{3}{8n^2}-\frac{5}{16n^3}+O(n^{-4})\right).$$

$n$ が奇数なら、

$$\gamma(n,B_{n-1}) = 2r = \frac{3}{4\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{3}{8n^2}-\frac{13}{16n^3}+O(n^{-4})\right),$$

ただし、$r^2$ は次の 3 次方程式

$$2048(n+1)n^3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 = 0$$

の唯一の実根であり、ここで係数 $a_0, a_1, a_2$ は以下のようにとる。

$$\begin{aligned}
a_0 &= -9(n^2-1)^2(n^4-4n^3+2n^2+4n+13),\\
a_1 &= 16(n^2-1)(2n^6-6n^5-15n^4+38n^3+42n^2+48n-29),\\
a_2 &= 64(8n^6-8n^5-41n^4-28n^3-10n^2+36n+27).
\end{aligned}$$

なお、$\Gamma(n,B_{n-1})$ の決定では、$n$ が偶数の場合が奇数の場合よりずっと難しく、$\gamma(n,B_{n-1})$ の決定では、$n$ が奇数の場合が偶数の場合より面倒

である。このことは、この種の問題の一般論に容易な処方箋が期待できないことを示唆していると思う。

3.3. **立方体の壁穴.** 我々は [9] において、次のことを示した。任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $N$ が存在し、もし $n > N$ ならば、

$$S_n \subset (2+\varepsilon)Q_n.$$

ここから次が従う。

$$\lim_{n\to\infty} \Gamma(n, Q_{n-1}) \le 2.$$

$Q_{n-1} \subset B_{n-1}$ だから、$Q_{n-1}$ の壁穴を通過できるなら、$B_{n-1}$ の壁穴も通過できる。従って、$\gamma(n, B_{n-1})$ と $\Gamma(n, B_{n-1})$ は、それぞれ $\gamma(n, Q_{n-1})$ と $\Gamma(n, Q_{n-1})$ の下界を与える。私は

$$\gamma(n, Q_{n-1}) = \Gamma(n, Q_{n-1}) \to \sqrt{2} \quad (n \to \infty)$$

と予想する。ちなみに、$n+1$ 次のアダマール行列が存在することと、$S_n \subset \sqrt{(2n)/(n+1)}\,Q_n$ は同値である。例えば

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

はアダマール行列だから

$$A \otimes A = \begin{pmatrix} A & A \\ A & -A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

もアダマール行列で、この行列の 1 列目を取り除いて得られる 4 本の 3 次元行ベクトルは、(この 4 点を $\mathbb{R}^3$ 内の四面体の頂点と見なすことにより) 正四面体の立方体への最適な埋め込みを与える。

3.4. **面積最小の壁穴.** [6] において、$S_n$ が通過できる壁穴の $n-1$ 次元体積の最小値は何か、という問題が提起されている。もし、通過を壁に直交する方向の平行移動に限れば、問題はいくぶん易しくなるだろう。後者は、$S_n$ をどの方向から正射影すれば、影が最も小さくなるか、ということだが、以下に良さそうに見える正射影の方向を挙げてみよう。

まず $\sqrt{2}S_n$ を $\mathbb{R}^{n+1}$($\mathbb{R}^n$ でないことに注意) に固定する。ただし頂点を $e_1, \ldots, e_{n+1}$ とし、$e_i$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の $i$ 番目の標準基底とする。この $\sqrt{2}S_n$ を

$$(1, -1, \overbrace{0, \ldots, 0}^{n-1})$$

方向に射影すると、影の体積は

$$\frac{1}{(n-1)!}\sqrt{\frac{n+1}{2}} \tag{5}$$

となる。次に $n$ を奇数とし、$n=2k+1$ とおく。今度は $\sqrt{2}S_n$ を

$$(\overbrace{1,\dots,1}^{k+1},\overbrace{-1,\dots,-1}^{k+1})$$

方向に射影する。このとき影の体積は

$$\frac{2}{(n-1)!}. \tag{6}$$

最後に $n$ を偶数とし、$n=2k$ とおく。$\sqrt{2}S_n$ を

$$(\overbrace{k+1,\dots,k+1}^{k},\overbrace{-k,\dots,-k}^{k+1})$$

方向に射影すると、影の体積は

$$\frac{2}{(n-1)!}\sqrt{\frac{n}{n+2}} \tag{7}$$

となる。この三つの例を比べると、その中で体積が最小となるのは $n\le 5$ なら (5) であり、$n=7$ なら (5) と (6) は一致し、その他の場合は (6) と (7) が最小である。これらの例が真の最小値を与えるだろうか？

3.5. **東大入試問題.** 研究集会後に、数セミ読者からの指摘で、東大の入試問題に関連するものがあることがわかった。1988 年度の問題に、$S_3$ が壁に直交する平行移動で通過できる壁穴の面積の最小値を問うものがある。(ちなみに通過に回転も許した場合に、もし壁穴の面積が $1/\sqrt{8}$ より小さくなるなら、壁穴は三角形ではないことが示せる。) また 1990 年度の問題に、一辺の長さが 1 の正 8 面体が、一辺の長さが 1 の正方形の壁穴を壁に触れずに通過できるかを問うものがある。

## References


[1] R. Brandenberg, T. Theobald. Radii of simplices and some applications to geometric inequalities. *Beiträge Algebra Geom*. 45 (2004) 581–594.

[2] R. Brandenberg, T. Theobald. Radii minimal projections of polytopes and constrained optimization of symmetric polynomials. *Adv. Geom.* 6 (2006) 71–83.

[3] H. T. Croft, K. J. Falconer, R. K. Guy. *Unsolved Problems in Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[4] H. E. Debrunner, P. Mani-Levitska. Can you cover your shadows? *Discrete Comput. Geom.* 1 (1986) 45–58.

[5] M. Fradelizi. Hyperplane sections of convex bodies in isotropic position. *Beiträge Algebra Geom.* 40 (1999) 163–183.

[6] J. I. Itoh, T. Zamfirescu. Simplices passing through a hole, *J. Geom.* 83 (2005) 65–70.

[7] J. Itoh, Y. Tanoue, T. Zamfirescu. Tetrahedra passing through a circular or square hole, *Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. No. 77* (2006) 349–354.

[8] G. Kós, J. Törőcsik. Convex disks can cover their shadow. *Discrete Comput. Geom.* 5 (1990) 529–531.

[9] H. Maehara, I. Ruzsa, N. Tokushige. Large regular simplices contained in a hypercube. *Period. Math. Hungarica*, 58 (2009) 121–126.
[10] H. Maehara, N. Tokushige. A regular tetrahedron passes through a hole smaller than its face. *submitted*.
[11] H. Maehara, N. Tokushige. Regular simplices passing through holes. *in preparation*.
[12] S. V. Pukhov. Kolmogorov diameters of a regular simplex. *Mosc. Univ. Math. Bull.* 35 (1980) 38–41.
[13] P. Steinhagen. Über die grösste Kugel in einer konvexen Punktmenge. *Abh. Math. Sem. Hamburg*, 1 (1921) 15–26.
[14] B. Weißbach. Über die senkrechten Projektionen regulär Simplexe. *Beitr. Algebra Geom.* 15 (1983) 35–41.
[15] K. Zindler. Über konvexe Gebilde, *Monatsh. Math. Physik* 30 (1920) 87–102.

琉球大学教育学部,
*E-mail address*: `hide@edu.u-ryukyu.ac.jp`