ゲーム planarity.net の難しさ

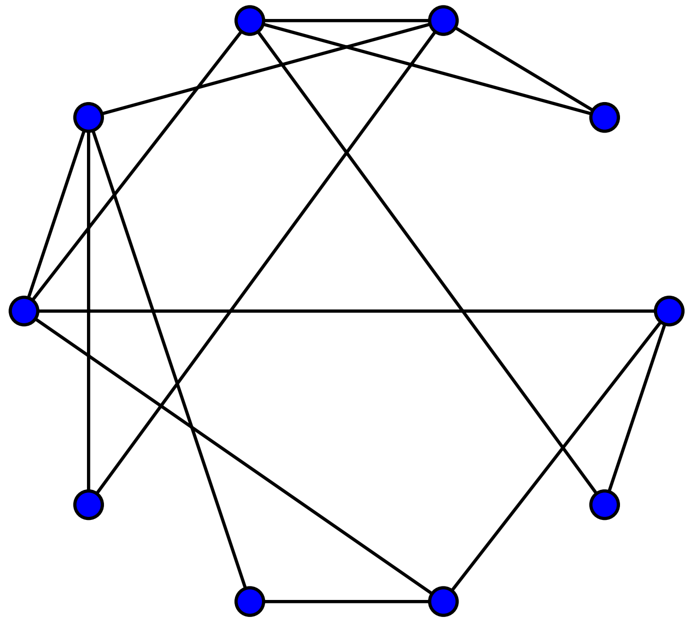
岡本 吉央	東京工業大学	日本

共同研究者：

Xavier Goaoc	INRIA Lorraine	フランス
Jan Kratochvíl	Charles U	チェコ
Chan-Su Shin	Hankuk U Foreign Studies	韓国
Alexander Wolff	TU Eindhoven	オランダ

http://www.planarity.net/

入力： 平面的グラフ G の直線描画

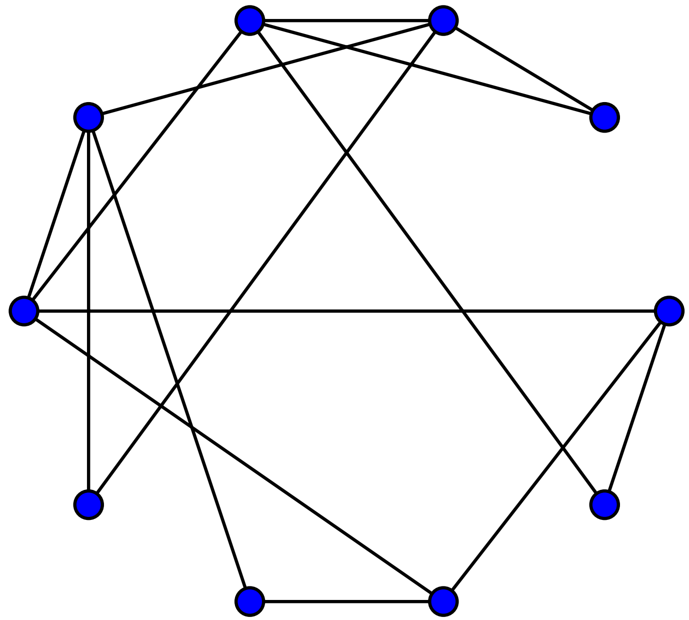


ゲーム planarity.net (by John Tantalo)

http://www.planarity.net/

入力： 平面的グラフ G の直線描画

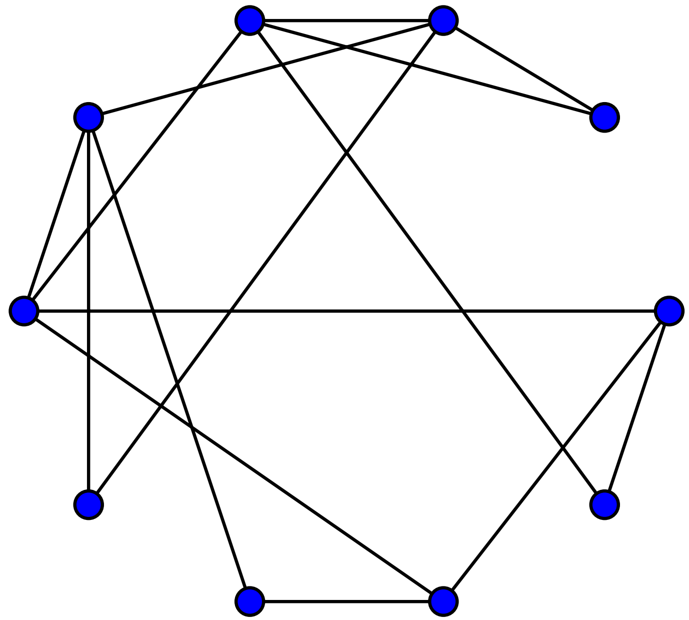
目標： 描画から交差をなくす (平面にする)



ゲーム planarity.net (by John Tantalo)

http://www.planarity.net/

入力：	平面的グラフ G の直線描画
目標：	描画から交差をなくす (平面にする)
操作：	頂点を (ドラッグして) 動かす

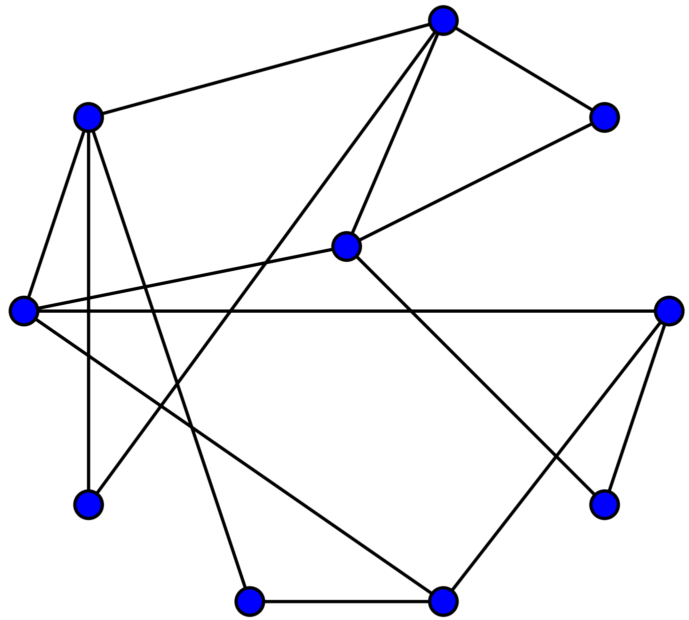


http://www.planarity.net/

入力： 平面的グラフ G の直線描画

目標： 描画から交差をなくす (平面にする)

操作： 頂点を (ドラッグして) 動かす

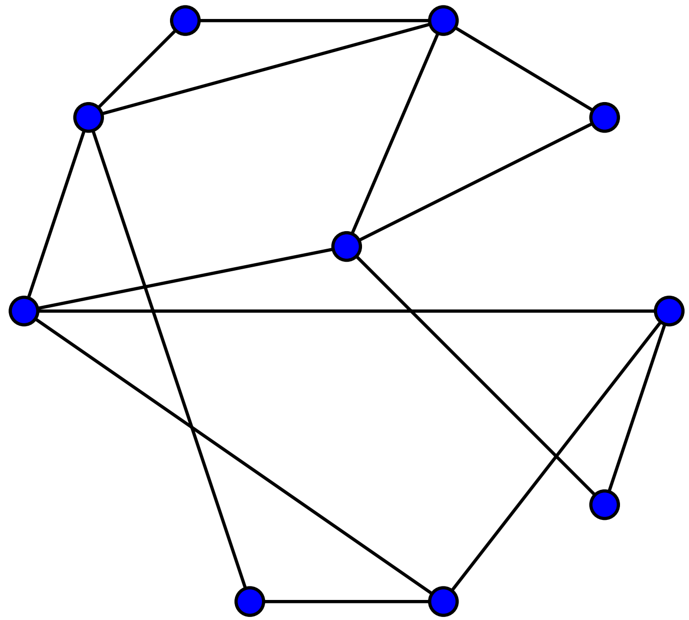


http://www.planarity.net/

入力： 平面的グラフ G の直線描画

目標： 描画から交差をなくす (平面にする)

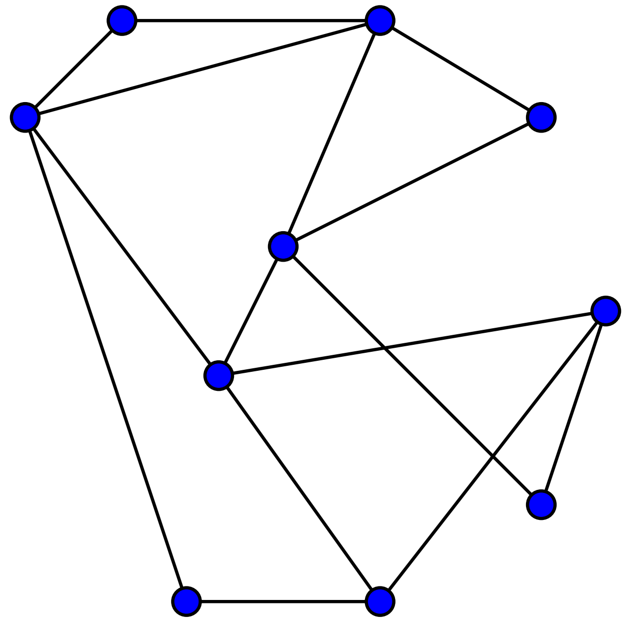
操作： 頂点を (ドラッグして) 動かす



ゲーム planarity.net (by John Tantalo)

http://www.planarity.net/

入力：	平面的グラフ G の直線描画
目標：	描画から交差をなくす (平面にする)
操作：	頂点を (ドラッグして) 動かす

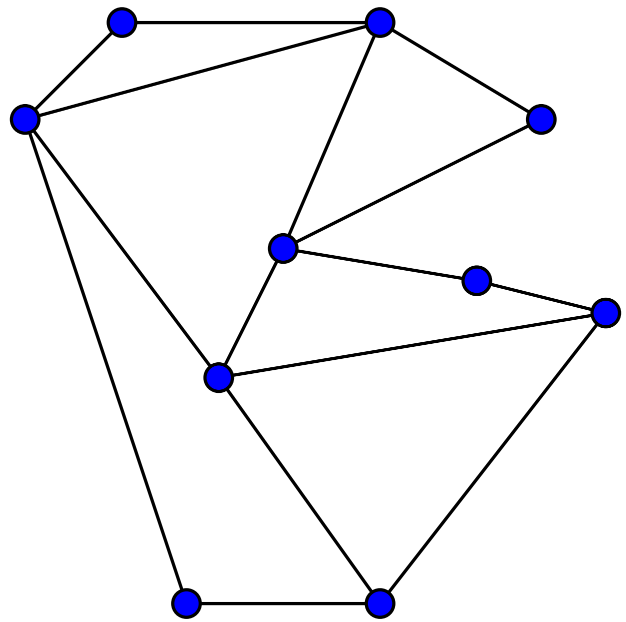


http://www.planarity.net/

入力： 平面的グラフ G の直線描画

目標： 描画から交差をなくす (平面にする)

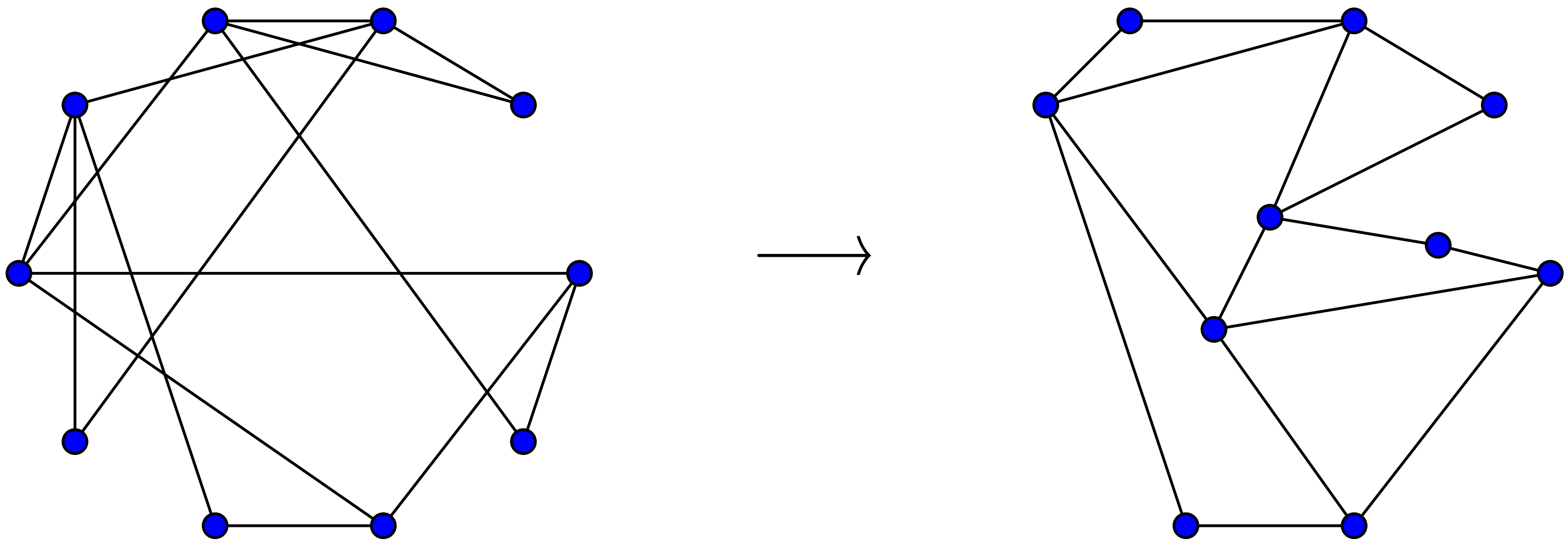
操作： 頂点を (ドラッグして) 動かす



問題

- (アルゴリズム的問題)

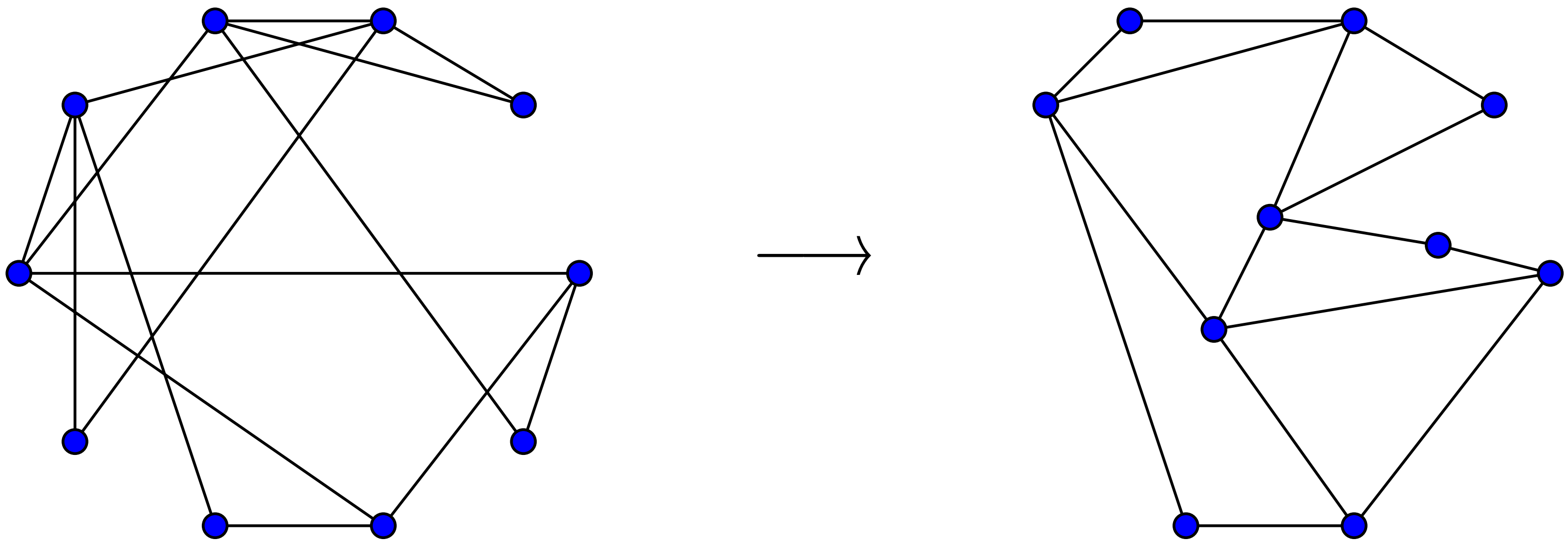
- (数学的問題)



問題

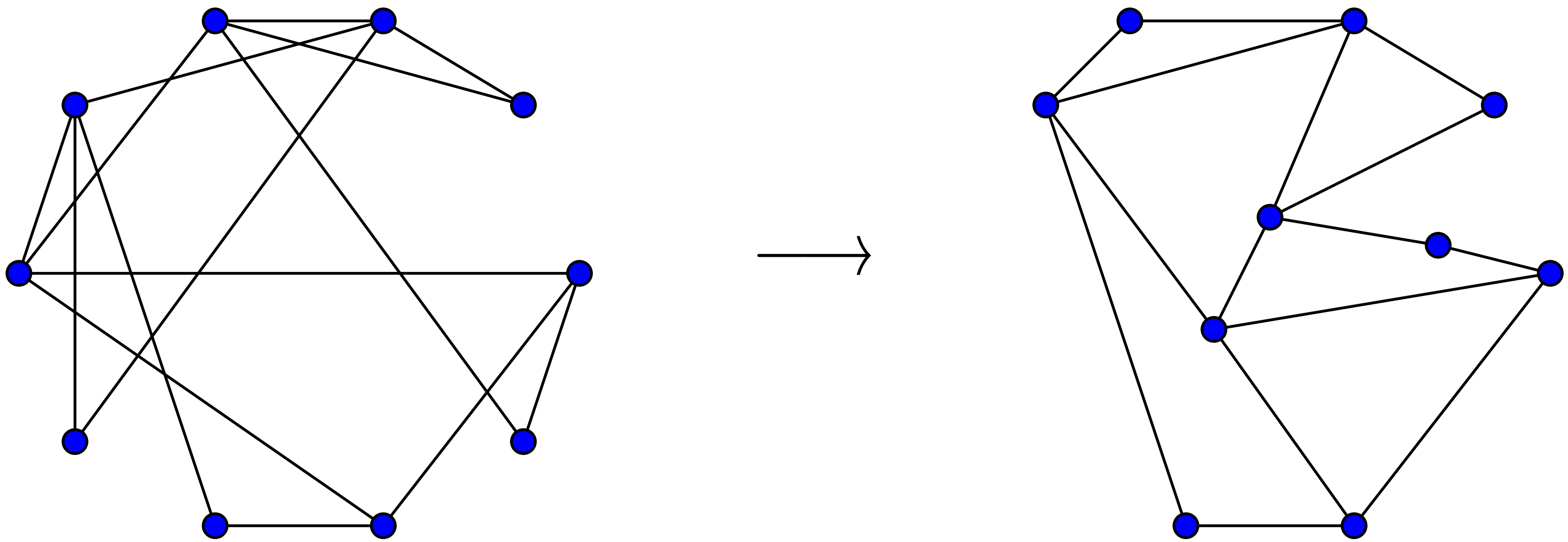
- (アルゴリズム的問題)
  動かす頂点数最小化は難しい？

- (数学的問題)



問題

- (アルゴリズム的問題)
  動かす頂点数最小化は難しい？
- (数学的問題)
  最悪時どれだけ頂点を動かす必要がある？



定理

- 入力描画を平面にするのに動かす頂点数の最小化は NP 困難

定理

- **入力描画を平面にするのに動かす頂点数の最小化は NP 困難**
- **その最小数 $(+1)$ の多項式時間 $n^{1-\varepsilon}$ 倍近似は NP 困難**
  $(\varepsilon \in (0,1]$ **固定，** $n =$ **頂点数**$)$

動かさない頂点数の最大化に切り替え

定理

	下界	上界
閉路	$\sqrt{n}$	$O((n \log n)^{2/3})$
木	$\sqrt{n/2}$	$n/3+4$
一般	3	$\sqrt{n-2}+1$

Pach & Tardos (GD '01, DCG '02)

- Aug 06: 研究開始
- Jun 07: Graph Drawing '07 へ投稿
- Jul 07: Graph Drawing '07 に受理
- Sep 07: Graph Drawing '07 で発表

- **Aug 06: 研究開始**
- May 07: Verbitsky @ arXiv
- **Jun 07: Graph Drawing '07 へ投稿**
- **Jul 07: Graph Drawing '07 に受理**
- **Sep 07: Graph Drawing '07 で発表**

- **Aug 06: 研究開始**
- May 07: Verbitsky @ arXiv
- **Jun 07: Graph Drawing '07 へ投稿**
- Jun 07: Pach & Tardos (DCG '02) **を知る**
- **Jul 07: Graph Drawing '07 に受理**
- **Sep 07: Graph Drawing '07 で発表**

- **Aug 06: 研究開始**
- May 07: Verbitsky @ arXiv
- **Jun 07: Graph Drawing '07 へ投稿**
- Jun 07: Pach & Tardos (DCG '02) **を知る**
- **Jul 07: Graph Drawing '07 に受理**
- Jul 07: Kang, Schacht & Verbitsky @ arXiv

- **Sep 07: Graph Drawing '07 で発表**

- **Aug 06: 研究開始**
- May 07: Verbitsky @ arXiv
- **Jun 07: Graph Drawing '07 へ投稿**
- Jun 07: Pach & Tardos (DCG '02) **を知る**
- **Jul 07: Graph Drawing '07 に受理**
- Jul 07: Kang, Schacht & Verbitsky @ arXiv
- Sep 07: Spillner & Wolff @ arXiv
- **Sep 07: Graph Drawing '07 で発表**

- **Aug 06: 研究開始**
- May 07: Verbitsky @ arXiv
- **Jun 07: Graph Drawing '07 へ投稿**
- Jun 07: Pach & Tardos (DCG '02) **を知る**
- **Jul 07: Graph Drawing '07 に受理**
- Jul 07: Kang, Schacht & Verbitsky @ arXiv
- Sep 07: Spillner & Wolff @ arXiv
- **Sep 07: Graph Drawing '07 で発表**
- Oct 07: Bose, Dujmovic, Hurtado, Langerman, Morin, Wood @ arXiv

- **Aug 06: 研究開始**
- May 07: Verbitsky @ arXiv
- **Jun 07: Graph Drawing '07 へ投稿**
- Jun 07: Pach & Tardos (DCG '02) **を知る**
- **Jul 07: Graph Drawing '07 に受理**
- Jul 07: Kang, Schacht & Verbitsky @ arXiv
- Sep 07: Spillner & Wolff @ arXiv
- **Sep 07: Graph Drawing '07 で発表**
- Oct 07: Bose, Dujmovic, Hurtado, Langerman, Morin, Wood @ arXiv
- Feb 08: Cibulka @ arXiv

渡辺 守: **高々**βn **個の頂点を動かすだけで頂点数** n **の閉路をほどけるか？** ($\beta < 1$ **定数**)

(5th Czech-Slovak Symposium on Combinatorics, Prague 1998)

渡辺 守: **高々**βn **個の頂点を動かすだけで頂点数** n **の閉路をほどけるか？** ($\beta < 1$ **定数**)

(5th Czech-Slovak Symposium on Combinatorics, Prague 1998)

Pach & Tardos '02: **「できない」**$n - O((n \log n)^{2/3})$ **個は頂点を動かさないといけない閉路の描画が存在**

渡辺 守: 高々βn 個の頂点を動かすだけで頂点数 n の閉路をほどけるか？ ($\beta < 1$ 定数)

(5th Czech-Slovak Symposium on Combinatorics, Prague 1998)

Pach & Tardos '02: 「できない」$n - O((n \log n)^{2/3})$ 個は頂点を動かさないといけない閉路の描画が存在

Pach & Tardos '02: 任意の平面的グラフは $\Omega(n^\gamma)$ 以上頂点を動かさずにほどくことができるか？ ($\gamma > 0$ 定数)

渡辺 守: 高々βn 個の頂点を動かすだけで頂点数 n の閉路をほどけるか？ ($\beta < 1$ 定数)

(5th Czech-Slovak Symposium on Combinatorics, Prague 1998)

Pach & Tardos '02: 「できない」$n - O((n \log n)^{2/3})$ 個は頂点を動かさないといけない閉路の描画が存在

Pach & Tardos '02: 任意の平面的グラフは $\Omega(n^{\gamma})$ 以上頂点を動かさずにほどくことができるか？ ($\gamma > 0$ 定数)

Goaoc et al. '07: 3 個は動かさなくてよい．動かさない頂点数が高々$O(\sqrt{n})$ しかない平面的グラフの描画が存在

渡辺 守: 高々βn 個の頂点を動かすだけで頂点数 n の閉路をほどけるか？ ($\beta < 1$ 定数)

(5th Czech-Slovak Symposium on Combinatorics, Prague 1998)

Pach & Tardos '02: 「できない」$n - O((n \log n)^{2/3})$ 個は頂点を動かさないといけない閉路の描画が存在

Pach & Tardos '02: 任意の平面的グラフは $\Omega(n^{\gamma})$ 以上頂点を動かさずにほどくことができるか？ ($\gamma > 0$ 定数)

Goaoc et al. '07: 3 個は動かさなくてよい．動かさない頂点数が高々$O(\sqrt{n})$ しかない平面的グラフの描画が存在

Bose et al. '07: 「正しい」 常に $\Omega(\sqrt[4]{n})$ 個の頂点は動かさなくて済む

	下界	上界
閉路	$\sqrt{n}$	$O((n \log n)^{2/3})$
木	$\sqrt{n/2}$	$n/3 + 4$
一般	3	$\sqrt{n-2} + 1$

Pach & Tardos (GD'01, DCG'02)

Goaoc, Kratochvíl, Okamoto, Shin, Wolff (GD'07)

	下界	上界
閉路	$\sqrt{n}$	$O((n \log n)^{2/3})$
木	$\sqrt{n/2}$	$n/3+4$
外平面的	$\sqrt{n-1}/3$	$2\sqrt{n-1}+1$
一般	3 $\Omega(\sqrt{\log n / \log\log n})$	$\sqrt{n-2}+1$

Pach & Tardos (GD'01, DCG'02)

Spillner & Wolff (SOFSEM'08)

Goaoc, Kratochvíl, Okamoto, Shin, Wolff (GD'07)

数学的な結果：歴史

	下界	上界
閉路	$\sqrt{n}$	$O((n \log n)^{2/3})$
木	$\sqrt{n/2}$	$n/3+4$ $3\sqrt{n}-3$
外平面的	$\sqrt{n-1}/3$	$2\sqrt{n-1}+1$
一般	3 $\Omega(\sqrt{\log n/\log\log n})$ $\sqrt[4]{n/9}$	$\sqrt{n-2}+1$

Pach & Tardos (GD'01, DCG'02)

Spillner & Wolff (SOFSEM'08)

Goaoc, Kratochvíl, Okamoto, Shin, Wolff (GD'07)

Bose, Dujmovic, Hurtado, Langerman, Morin, Wood (TGGT'08)

数学的な結果：歴史

	下界	上界
閉路	$\sqrt{n}$ $\Omega(n^{2/3})$	$O((n \log n)^{2/3})$
木	$\sqrt{n/2}$	$n/3+4$ $3\sqrt{n}-3$
外平面的	$\sqrt{n-1}/3$	$2\sqrt{n-1}+1$
一般	3 $\Omega(\sqrt{\log n / \log\log n})$ $\sqrt[4]{n/9}$	$\sqrt{n-2}+1$

Pach & Tardos (GD'01, DCG'02)
Spillner & Wolff (SOFSEM'08)
Goaoc, Kratochvíl, Okamoto, Shin, Wolff (GD'07)
Cibulka (TGGT'08)
Bose, Dujmovic, Hurtado, Langerman, Morin, Wood (TGGT'08)

- 問題の定義 (より形式的に)
- 閉路に対する下界 [Pach & Tardos]
- 木に対する下界
- NP 困難性の証明
- 近似不可能性の証明

設定: $G = (V, E)$ **無向グラフ**

(自己ループ，多重辺は無し)

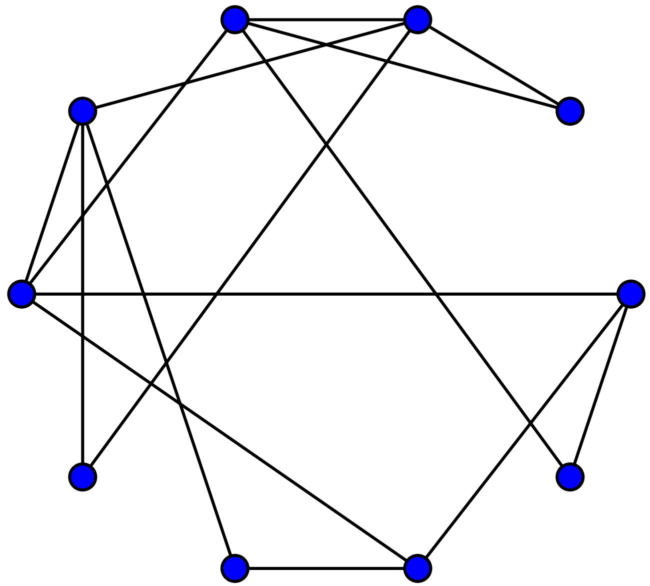
設定: $G = (V, E)$ 無向グラフ

(自己ループ，多重辺は無し)

定義: G の (直線) 描画とは

単射 $\delta\colon V \to \mathbb{R}^2$ で

辺 $\{u, v\} \in E$ の像は線分 $\overline{\delta(u)\delta(v)}$



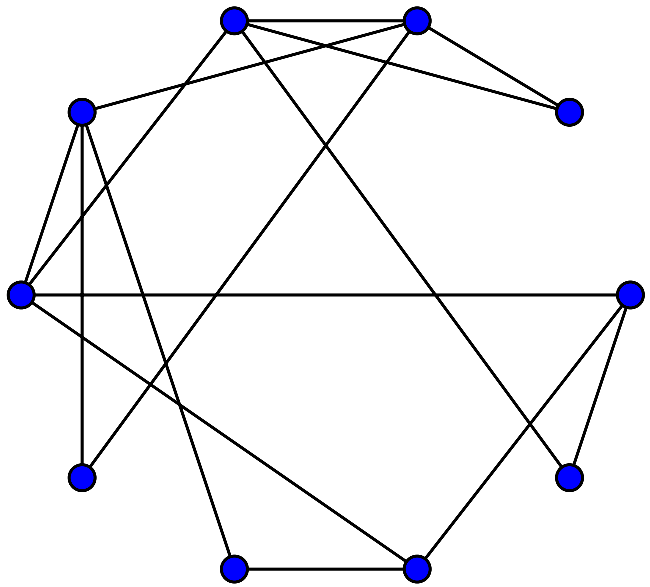
定義：平面描画

設定: $G = (V, E)$ 無向グラフ

(自己ループ，多重辺は無し)

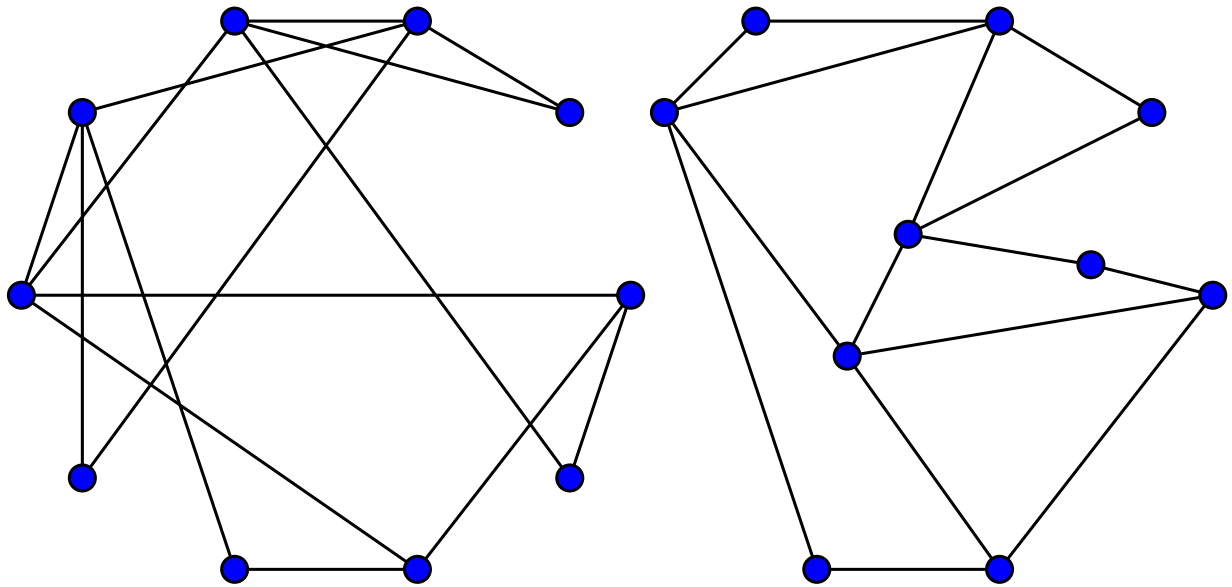
定義: G の描画 δ が**平面**であるとは

任意の 2 辺 (の δ による像) が
共通端点しか共有しないこと



設定: $G = (V, E)$ 無向グラフ
(自己ループ，多重辺は無し)

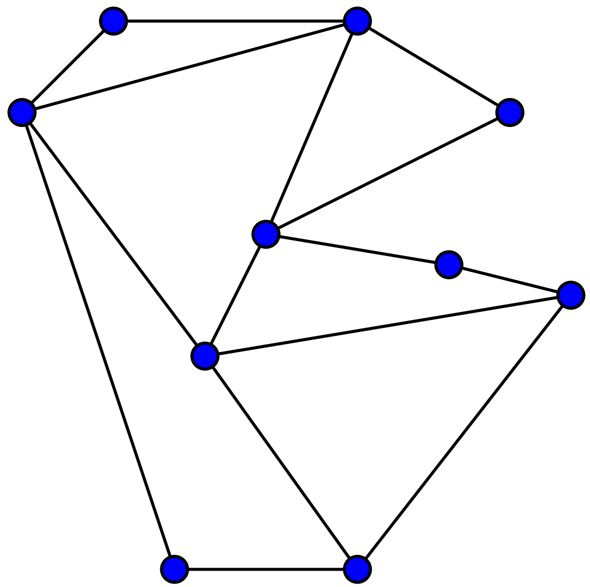
定義: G の描画 δ が**平面**であるとは
任意の 2 辺 (の δ による像) が
共通端点しか共有しないこと



定義：平面的グラフ

設定: $G = (V, E)$ 無向グラフ
(自己ループ，多重辺は無し)

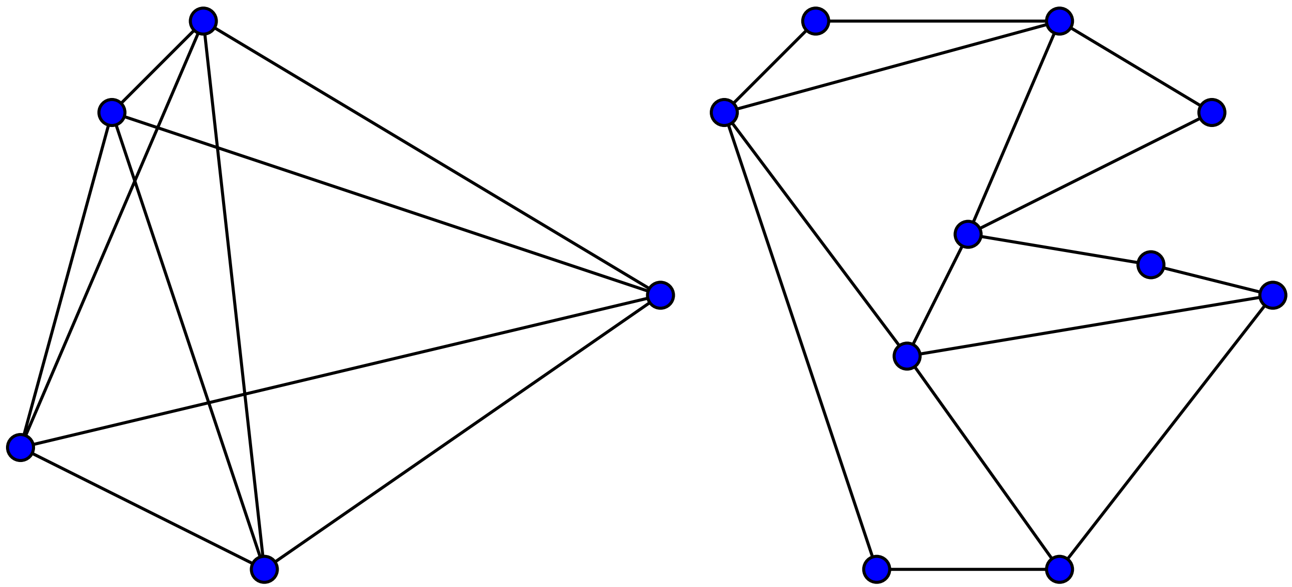
定義: グラフ G が**平面的**であるとは
G の平面描画が存在すること



定義：平面的グラフ

設定: $G = (V, E)$ 無向グラフ
(自己ループ，多重辺は無し)

定義: グラフ G が**平面的**であるとは
G の平面描画が存在すること

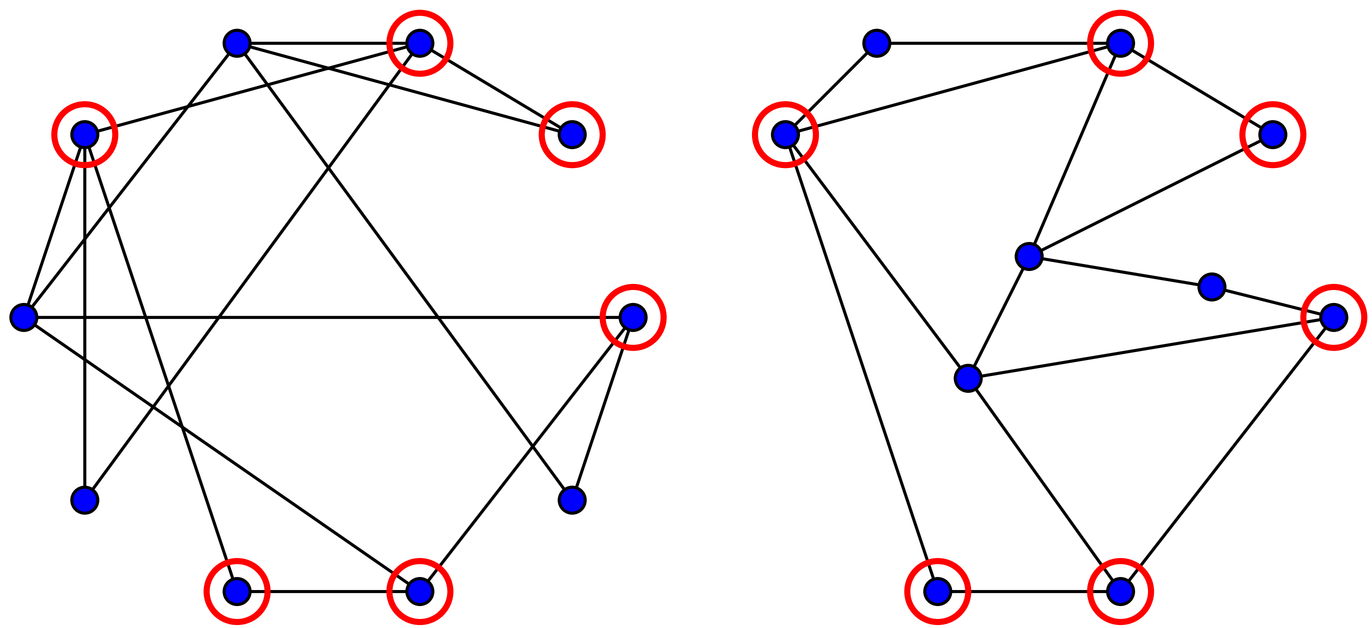


設定: $G = (V, E)$ **無向グラフ**

(自己ループ，多重辺は無し)

定義: G **の** 2 **描画** δ, δ' **の距離とは**

$$d(\delta, \delta') = |\{v \in V \mid \delta(v) \neq \delta'(v)\}|$$

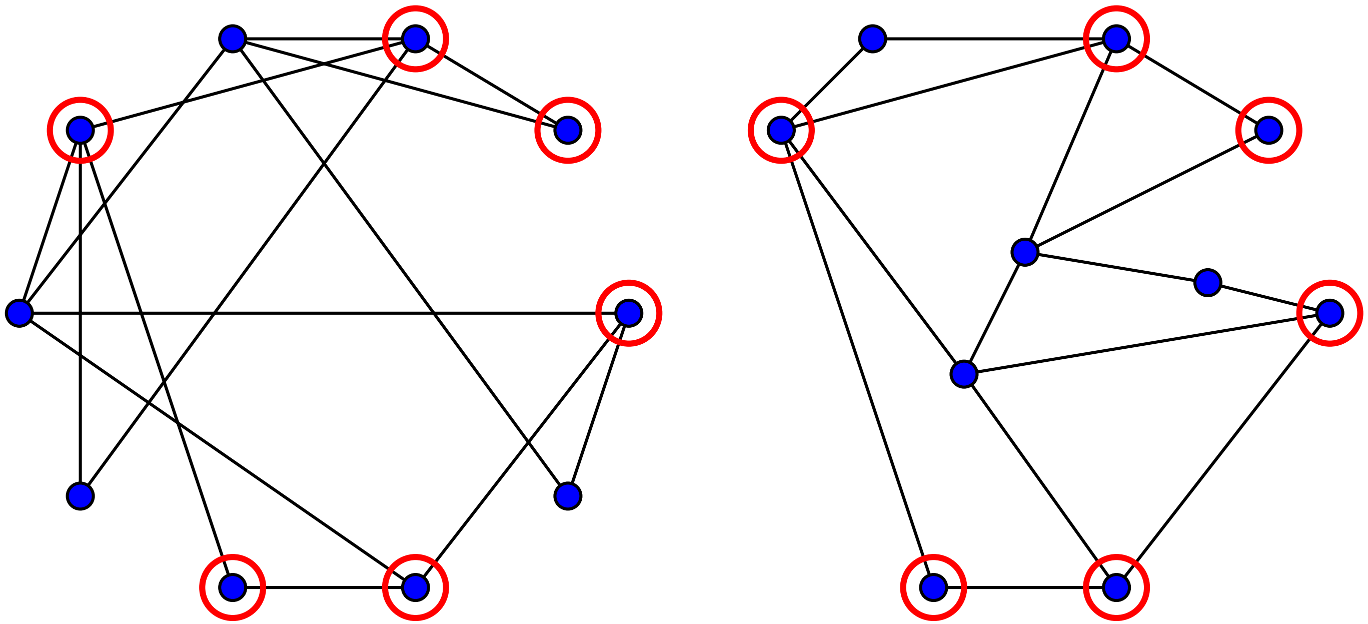


定義：shift (MinShiftedVertices)

設定: $G = (V, E)$: **単純無向グラフ**

δ: G **の描画**

定義: $\mathrm{shift}(G, \delta) = \min_{\delta' \text{平面}} d(\delta, \delta')$

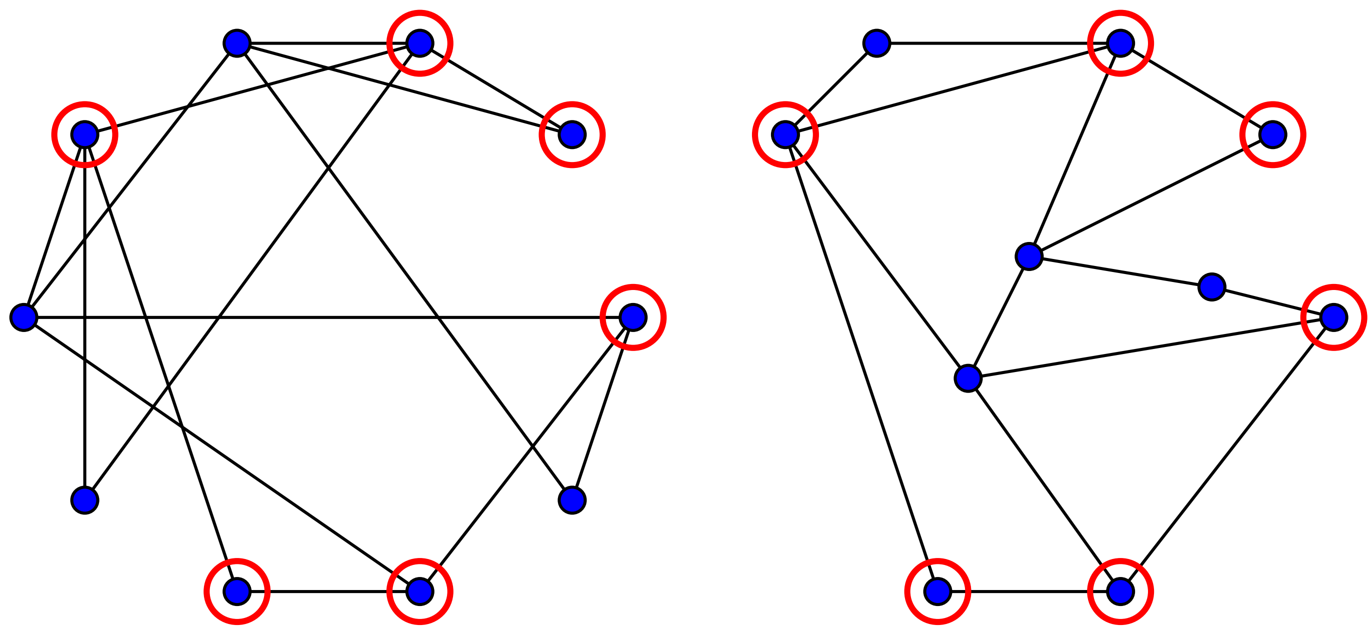


定義：fix (MaxFixedVertices)

設定: $G = (V, E)$: **頂点数** n **の単純無向グラフ**

δ: G **の描画**

定義: $\mathrm{fix}(G, \delta) = n - \mathrm{shift}(G, \delta)$



- 問題の定義 (より形式的に)
- 閉路に対する下界 [Pach & Tardos]
- 木に対する下界
- NP 困難性の証明
- 近似不可能性の証明

復習: $\mathrm{fix}(G, \delta) = \delta$ **を平面にするときに動かさない頂点数の最大値**

定理 (Pach & Tardos GD'01, DCG'02)

頂点数 n **の閉路** C_n **の任意の描画** δ **に対して**

$\mathrm{fix}(C_n, \delta) \geq \sqrt{n}$

復習: $\mathrm{fix}(G, \delta) = \delta$ **を平面にするときに動かさない頂点数の最大値**

定理 (Pach & Tardos GD'01, DCG'02)

頂点数 n **の閉路** C_n **の任意の描画** δ **に対して**
$\mathrm{fix}(C_n, \delta) \geq \sqrt{n}$

証明 Erdős–Szekeres **の定理を利用**

補題 (Erdős & Szekeres '35)

n 個の異なる実数の列には長さが $\lceil \sqrt{n} \rceil$ 以上の単調部分列が必ず存在する

3 9 12 16 7 6 13 1 10 11 4 8 2 15 5 14

$n = 16$

補題 (Erdős & Szekeres '35)

n 個の異なる実数の列には長さが $\lceil\sqrt{n}\rceil$ 以上の単調部分列が必ず存在する

3 9 12 16 7 6 13 1 10 11 4 8 2 15 5 14

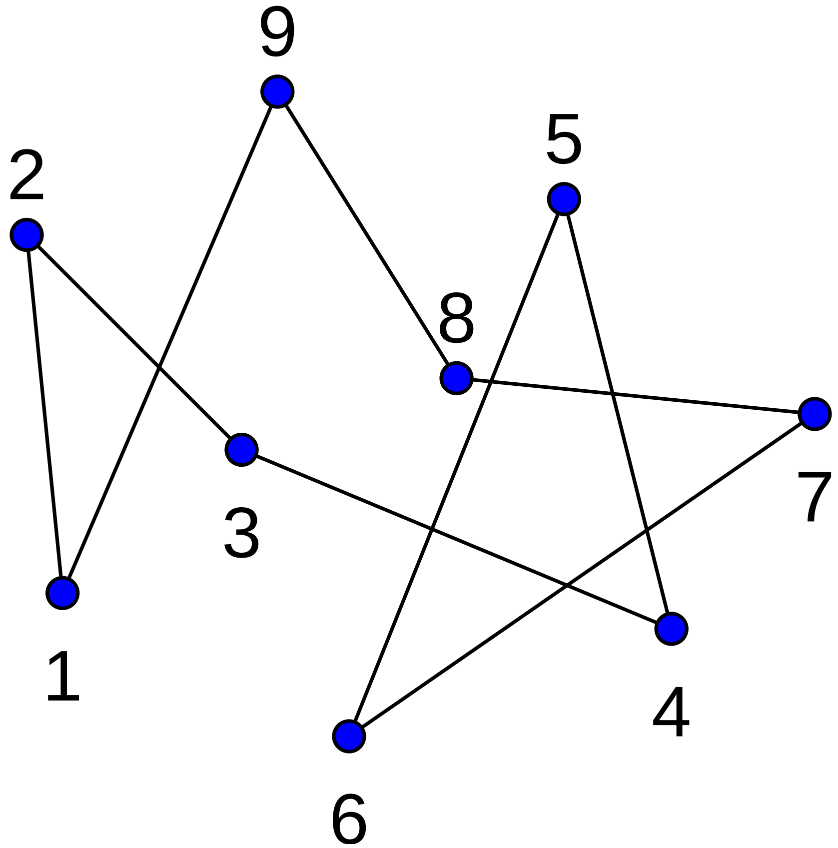
$n = 16$

補題 (Erdős & Szekeres '35)

n 個の異なる実数の列には長さが $\lceil\sqrt{n}\rceil$ 以上の単調部分列が必ず存在する

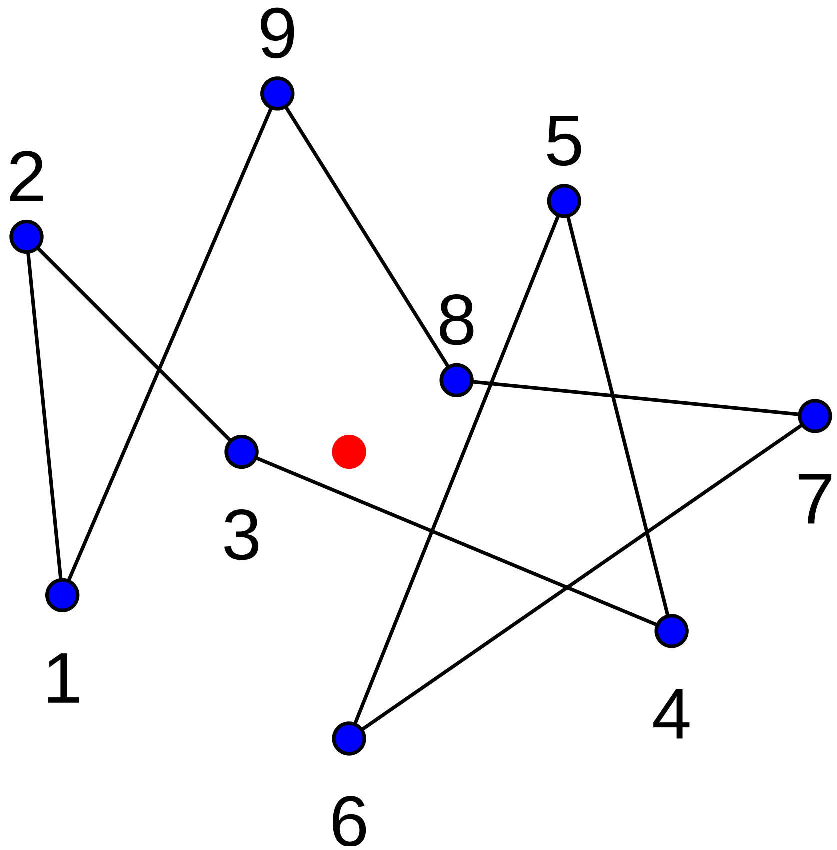
3 9 12 16 7 6 13 1 10 11 4 8 2 15 5 14

$n = 16$



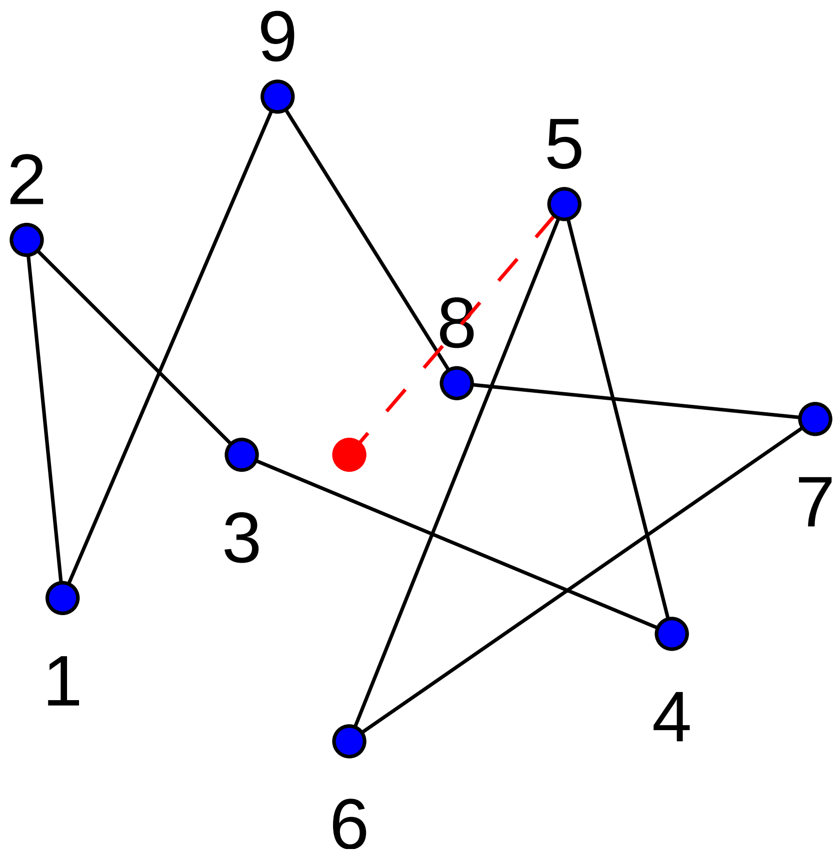
描画が与えられて……

描画から数列を



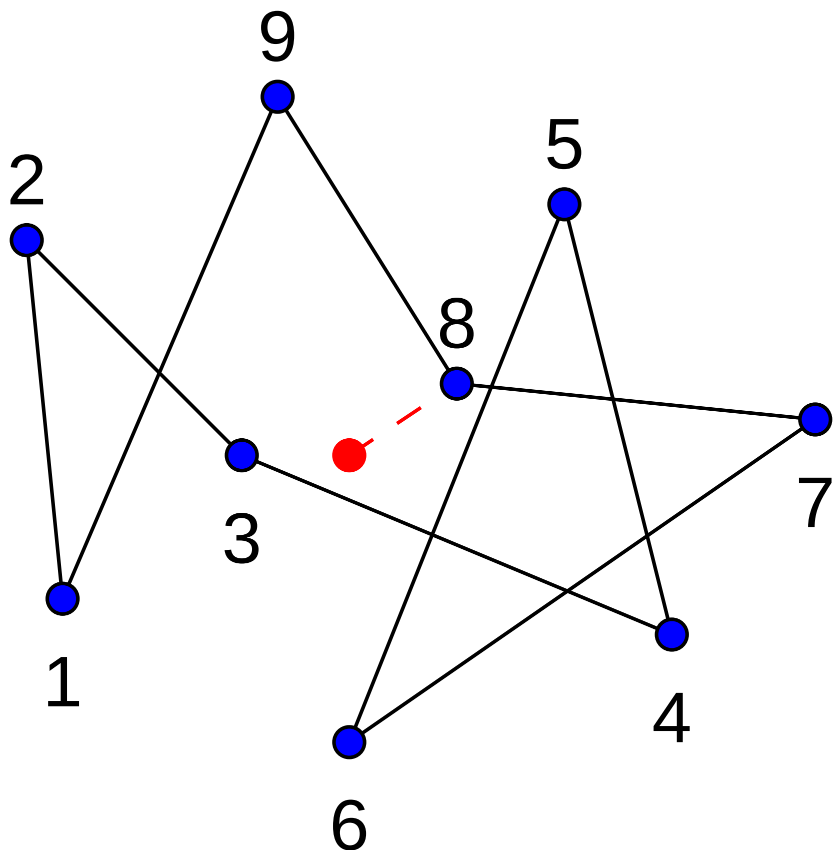
一般の位置にある１点

描画から数列を



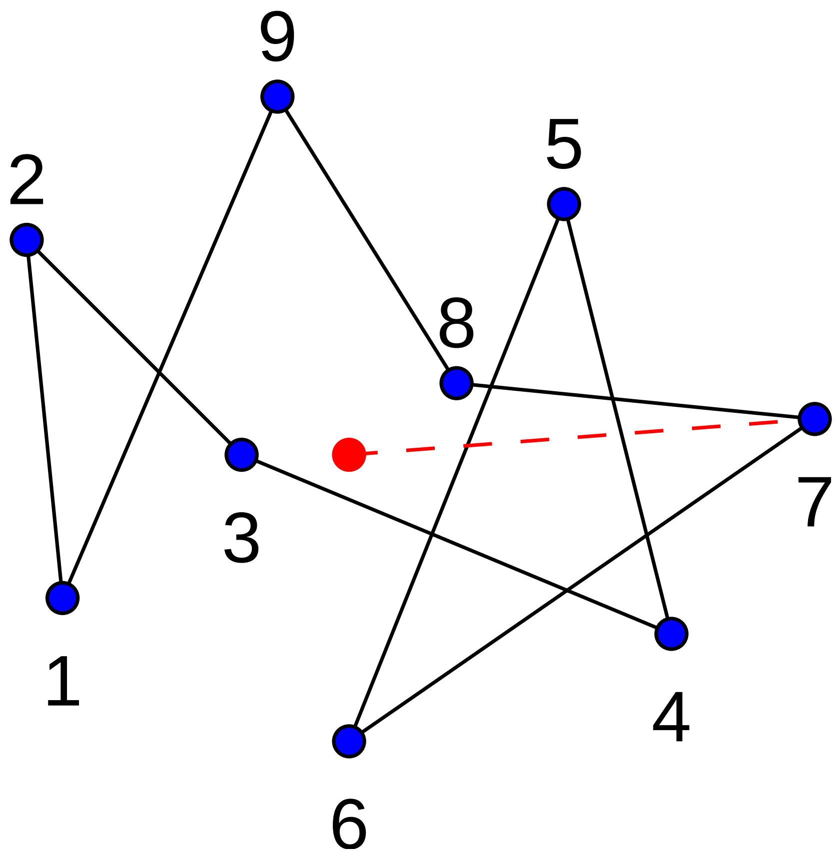
時計回りで数列を得る

5



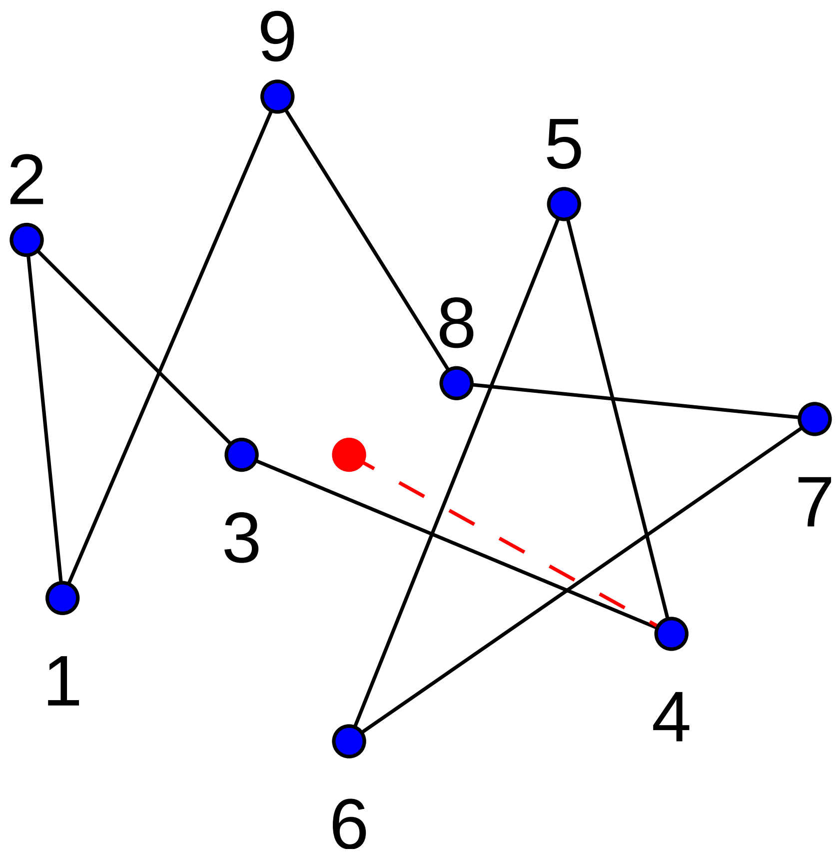
時計回りで数列を得る

5 8



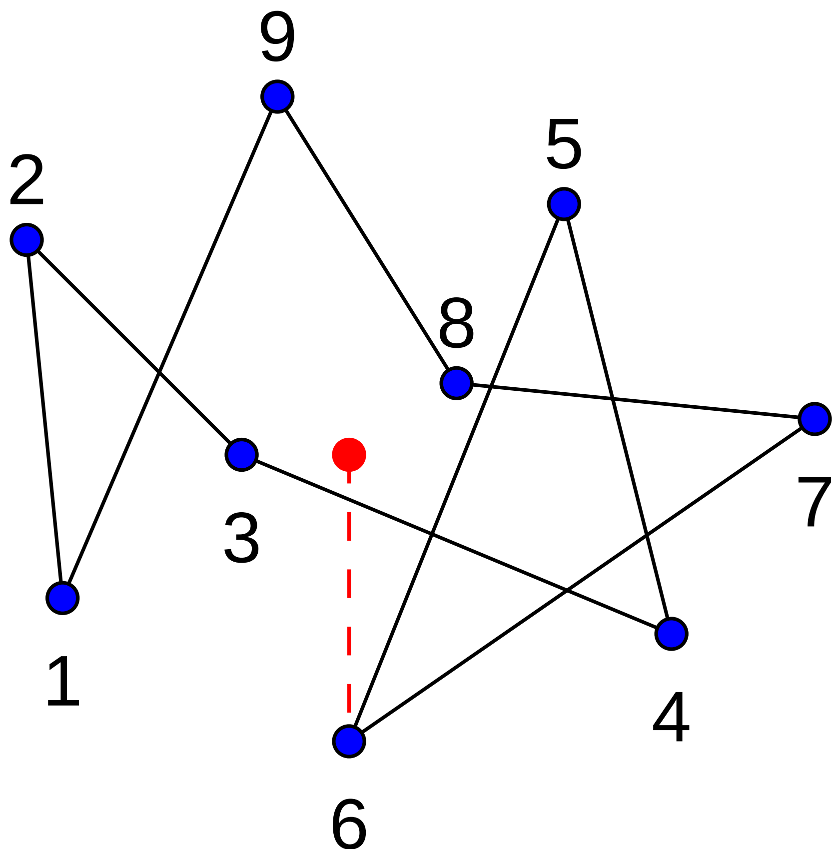
時計回りで数列を得る

5　8　7



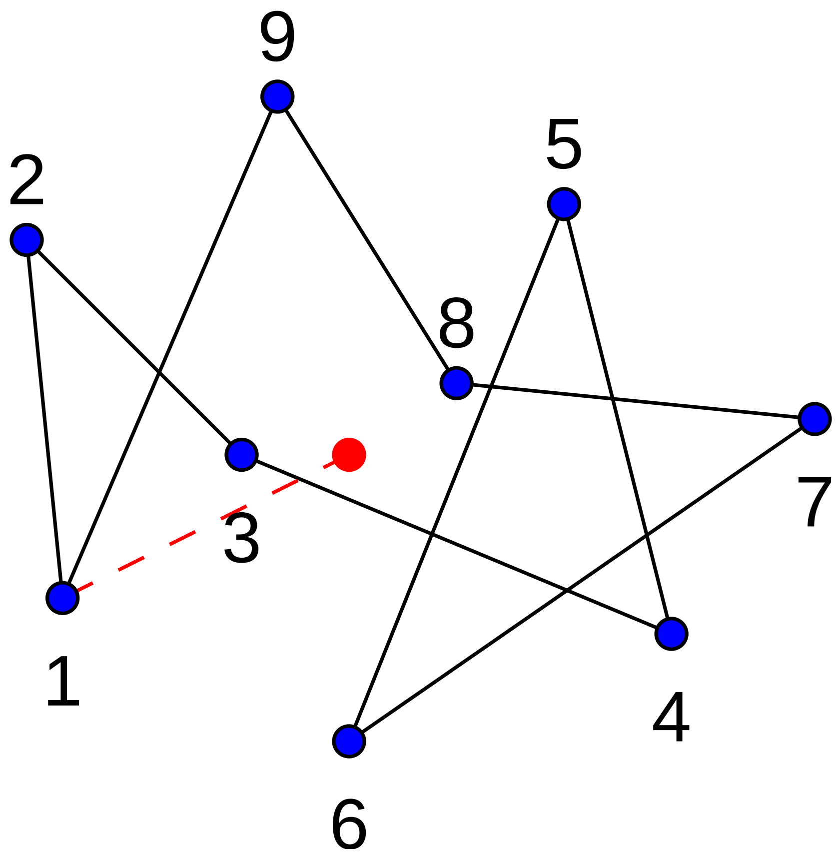
時計回りで数列を得る

5　8　7　4



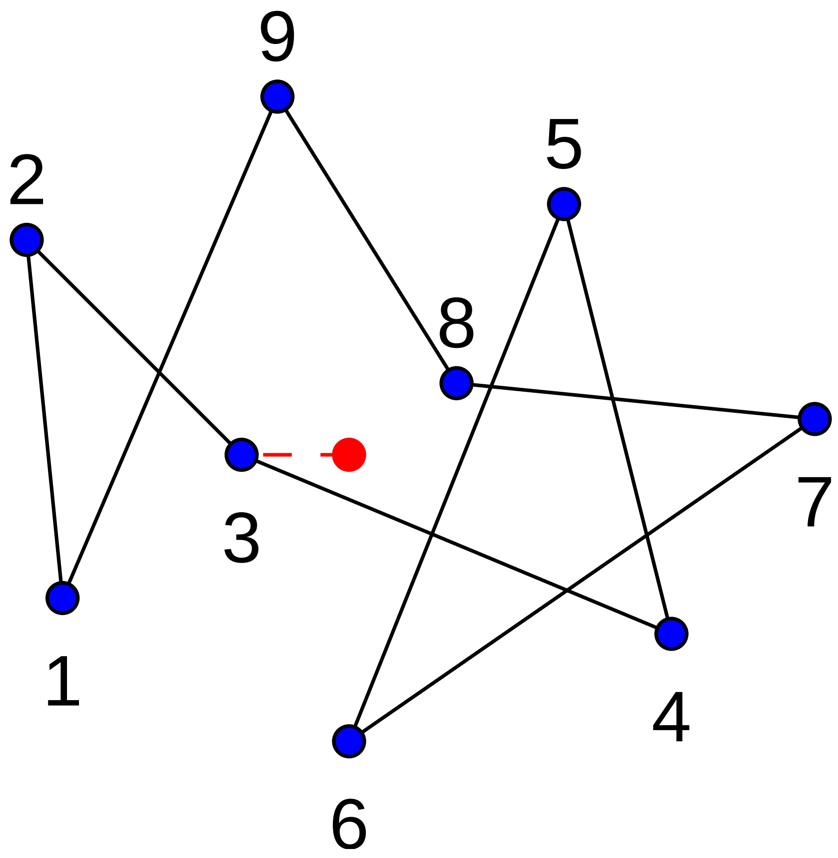
時計回りで数列を得る

5　8　7　4　6



時計回りで数列を得る

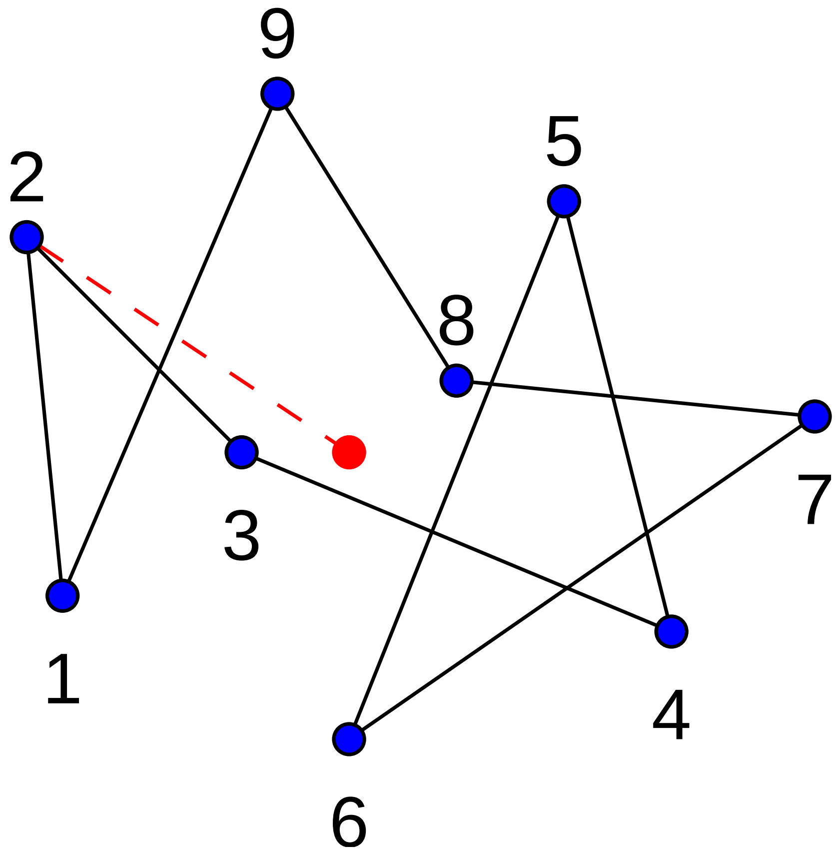
5 8 7 4 6 1



時計回りで数列を得る

5　8　7　4　6　1　3

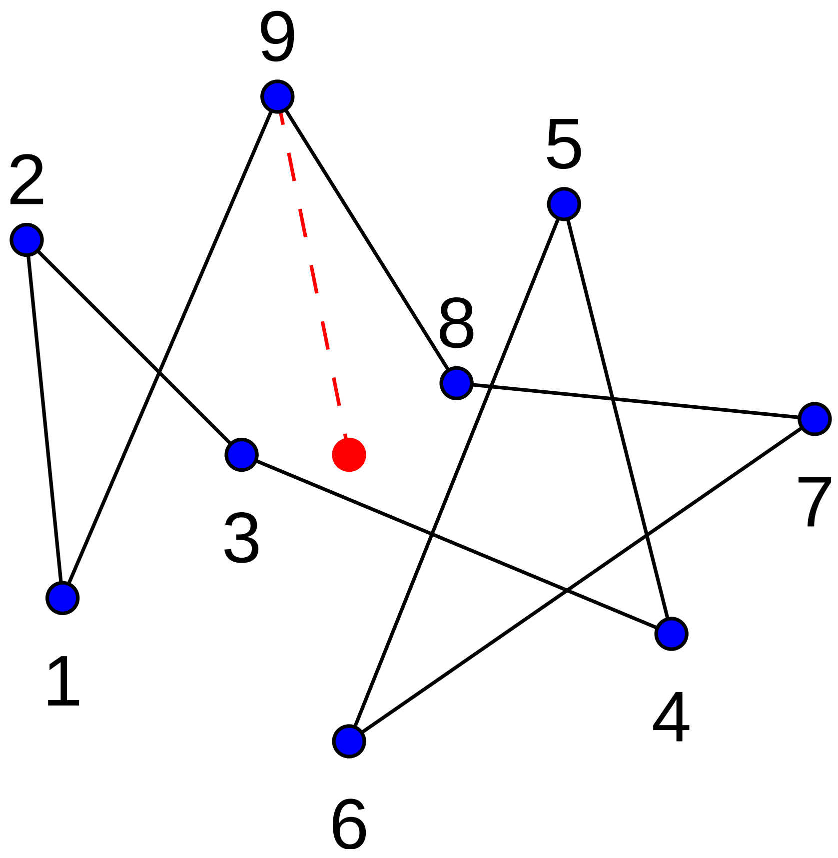
描画から数列を



時計回りで数列を得る

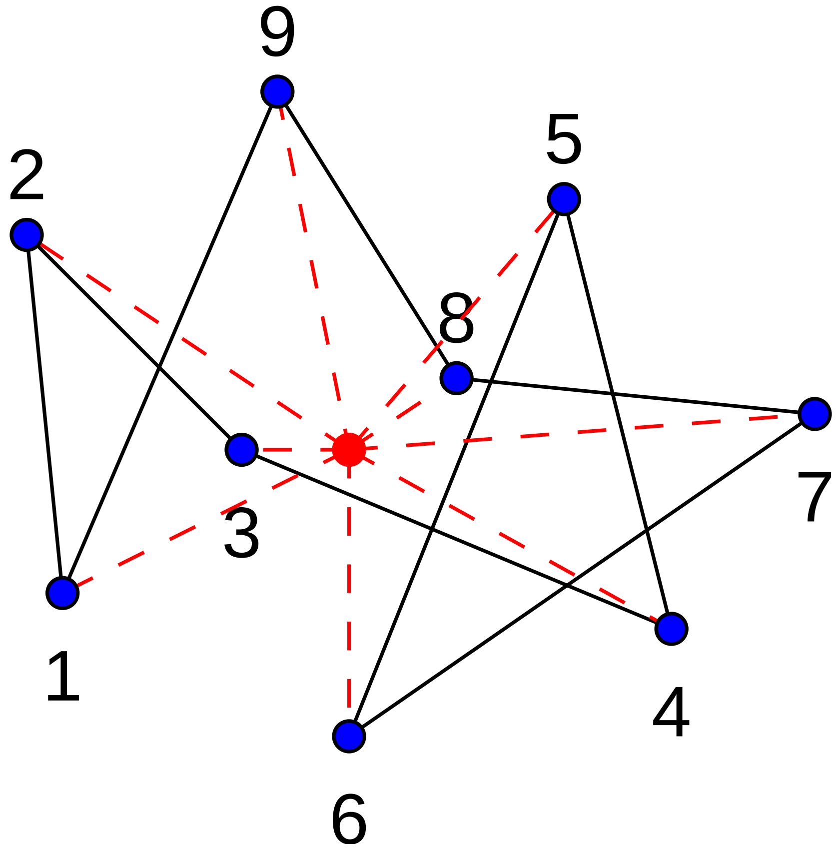
5　8　7　4　6　1　3　2

描画から数列を



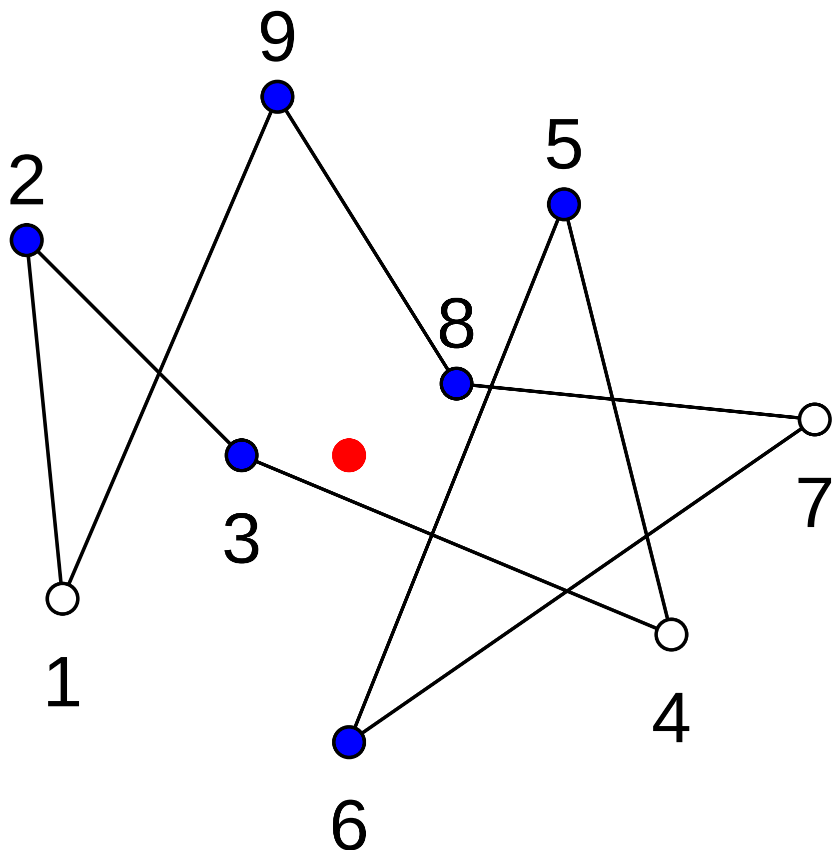
時計回りで数列を得る

5　8　7　4　6　1　3　2　9



長さ $\lceil \sqrt{n} \rceil$ の単調部分列が存在

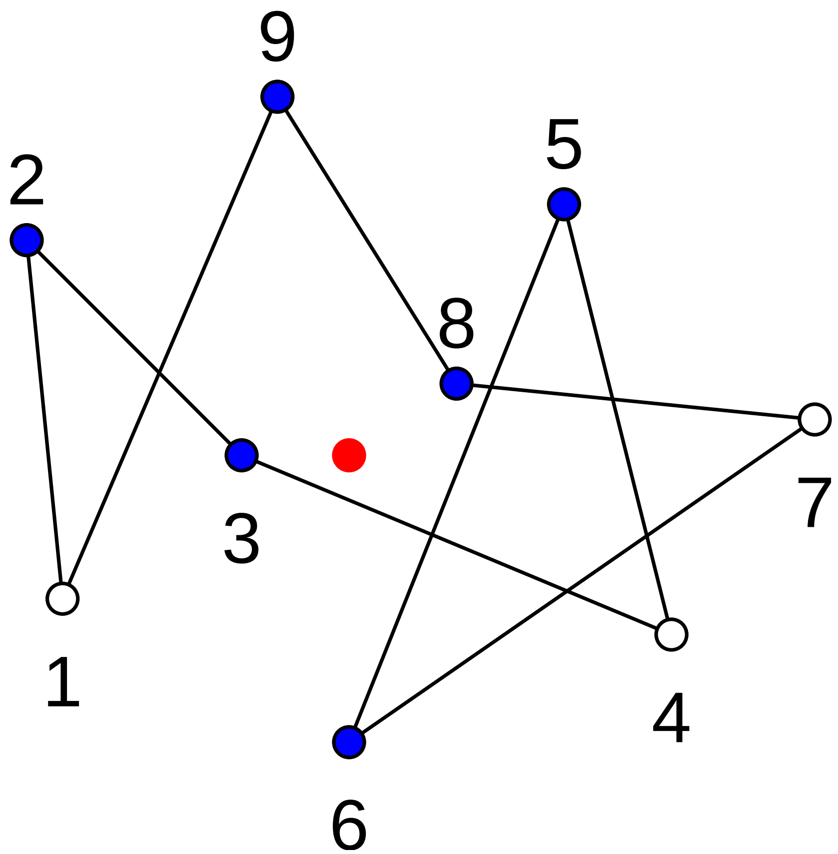
5 8 7 4 6 1 3 2 9



長さ $\lceil\sqrt{n}\rceil$ の単調部分列が存在

5 8 7 4 6 1 3 2 9

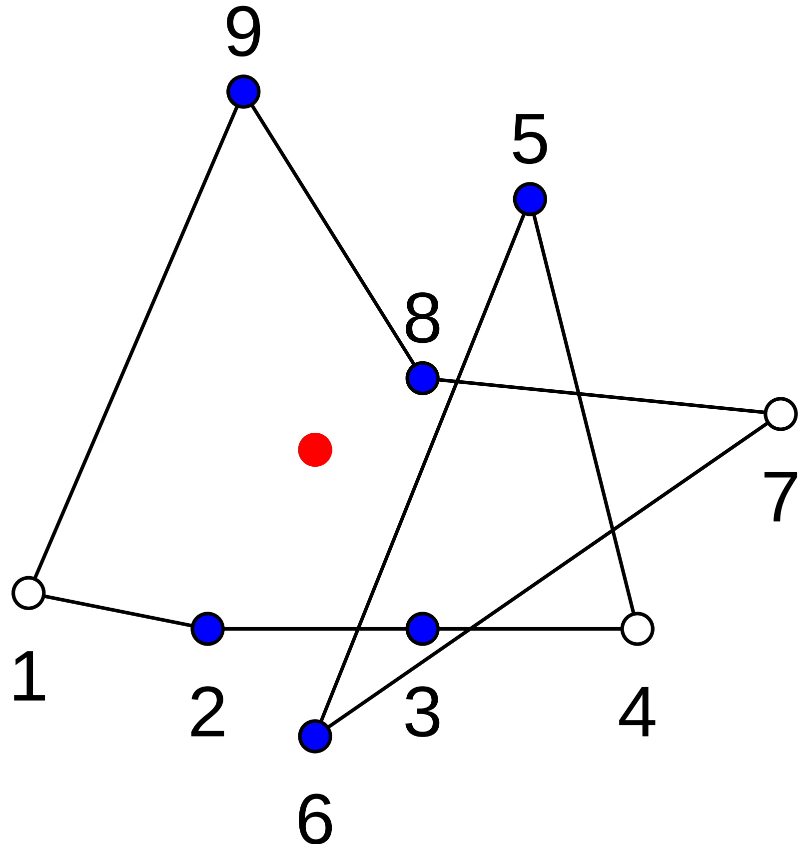
描画から数列を



その部分列の点は固定，それ以外を移動

5　8　7　4　6　1　3　2　9

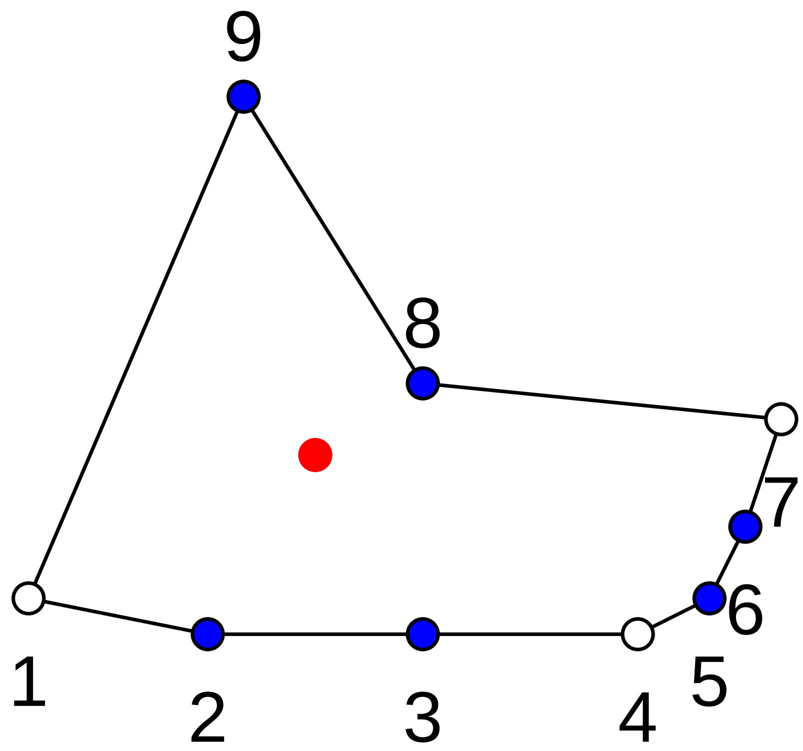
描画から数列を



その部分列の点は固定，それ以外を移動

5　8　7　4　6　1　3　2　9

描画から数列を



その部分列の点は固定，それ以外を移動

5 8 7 4 6 1 3 2 9

閉路に対する簡単な上界

復習: $\mathrm{fix}(G, \delta) = \delta$ **を平面にするときに動かさない頂点数の最大値**

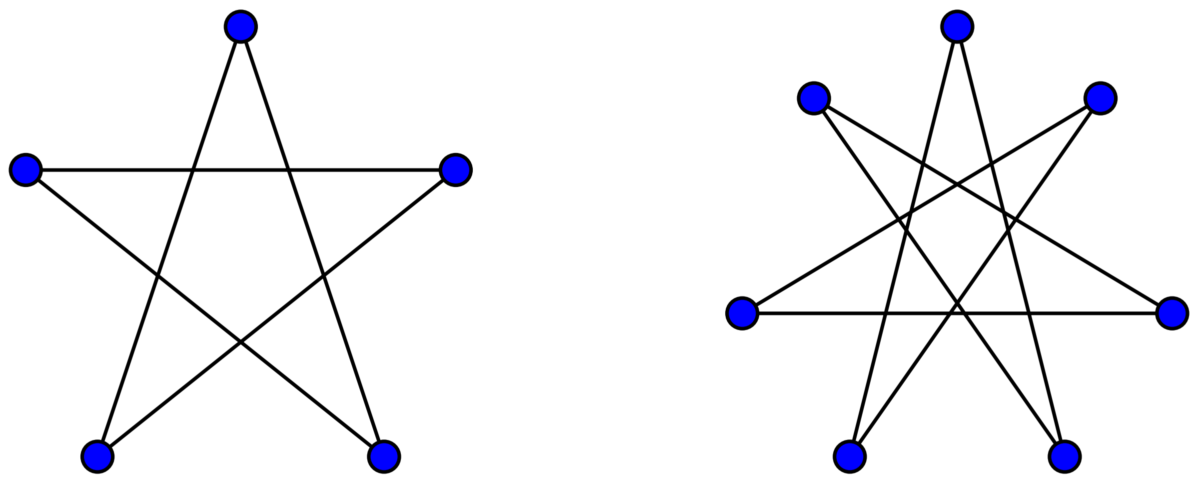
定理 C_n **の描画** δ **で** $\mathrm{fix}(C_n, \delta) \leq n/2$ **を満たすものが存在** (n **奇数**)

閉路に対する簡単な上界

復習: $\mathrm{fix}(G,\delta) = \delta$ を平面にするときに動かさない頂点数の最大値

定理 C_n の描画 δ で $\mathrm{fix}(C_n,\delta) \leq n/2$ を満たすものが存在 (n 奇数)

証明 Thrackle を利用



数学的な結果：歴史

	下界	上界
閉路	$\sqrt{n}$ $\Omega(n^{2/3})$	$O((n \log n)^{2/3})$
木	$\sqrt{n/2}$	$n/3+4$ $3\sqrt{n}-3$
外平面的	$\sqrt{n-1}/3$	$2\sqrt{n-1}+1$
一般	3 $\Omega(\sqrt{\log n/ \log \log n})$ $\sqrt[4]{n/9}$	$\sqrt{n-2}+1$

Pach & Tardos (GD'01, DCG'02)

Spillner & Wolff (SOFSEM'08)

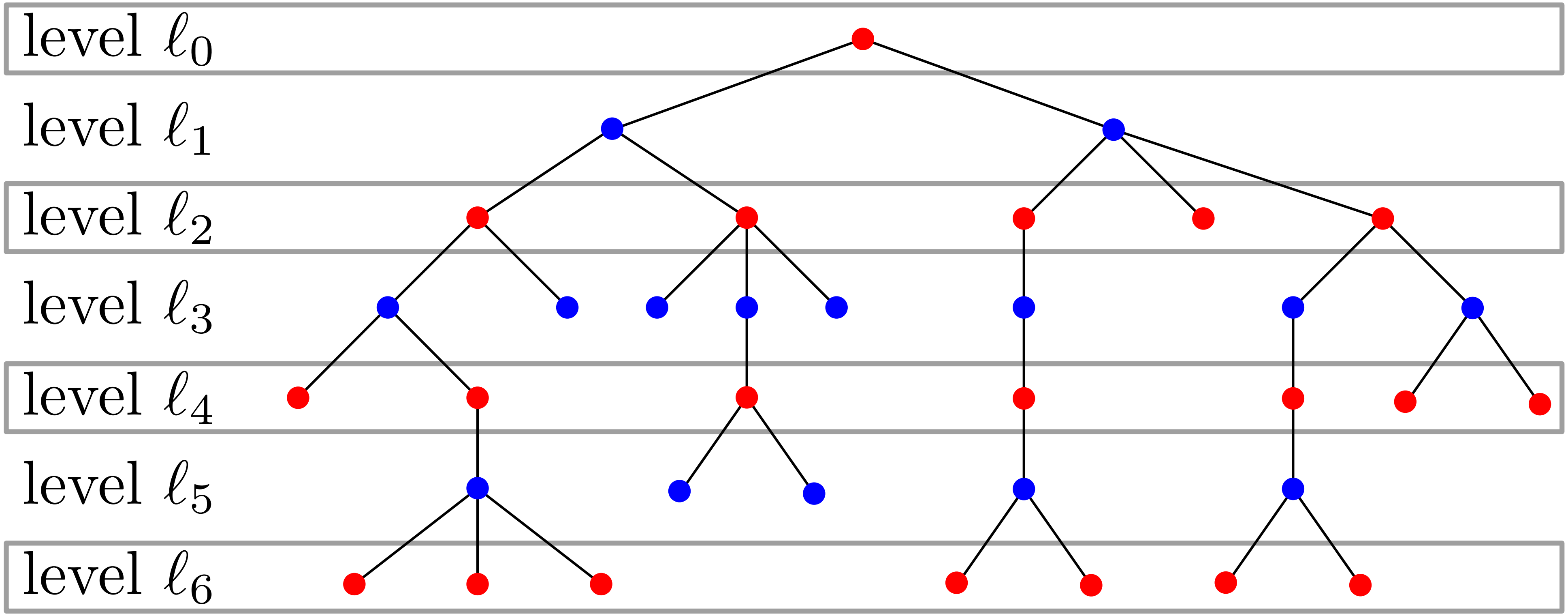
Goaoc, Kratochvíl, Okamoto, Shin, Wolff (GD'07)

Cibulka (TGGT'08)

Bose, Dujmovic, Hurtado, Langerman, Morin, Wood (TGGT'08)

- 問題の定義 (より形式的に)
- 閉路に対する下界 [Pach & Tardos]
- 木に対する下界
- NP 困難性の証明
- 近似不可能性の証明

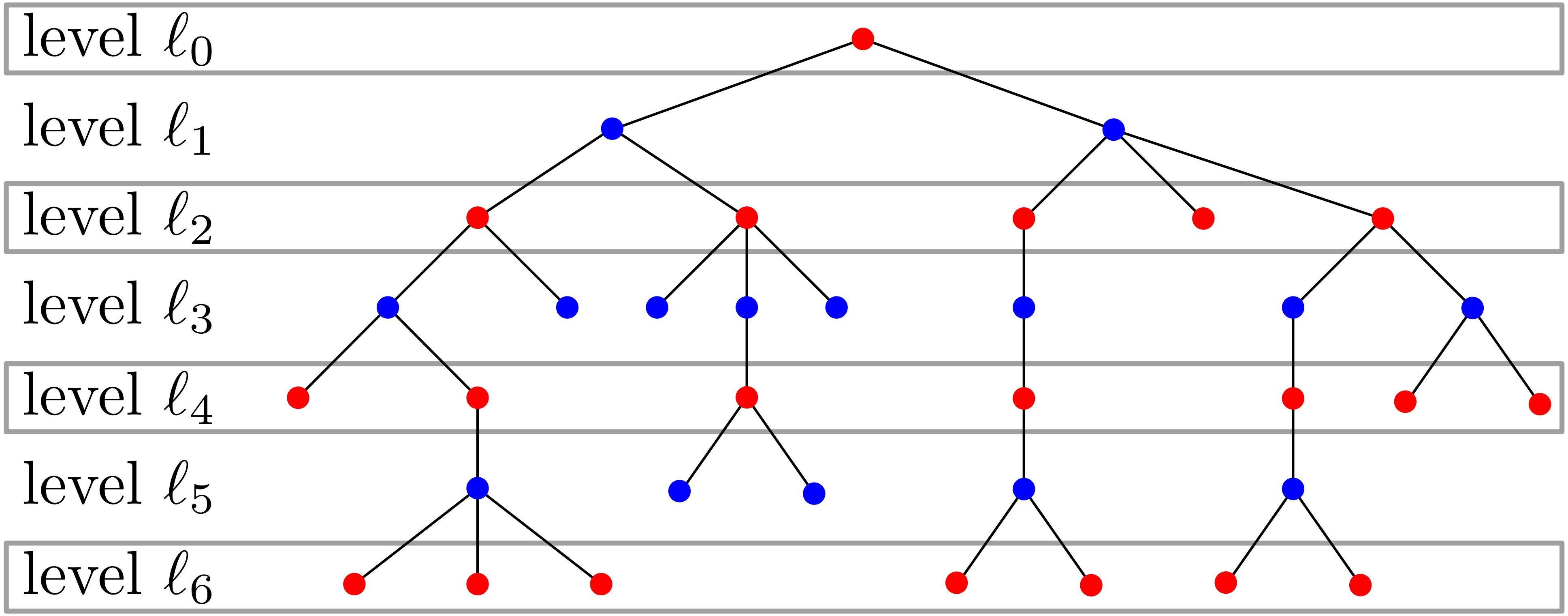
δ 与えられた描画　β 平面描画
例えば



木に対する下界

δ 与えられた描画　β 平面描画

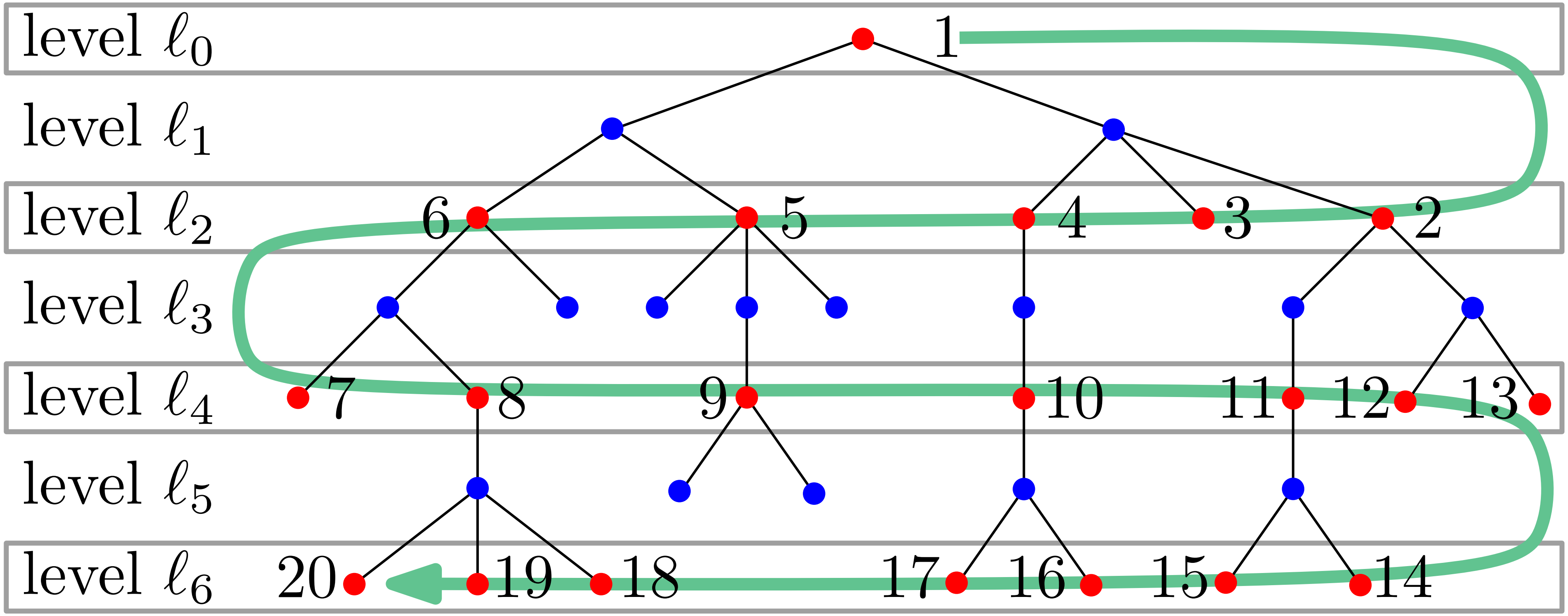
例えば



観察: **偶数レベルの頂点数** $\geq n/2$

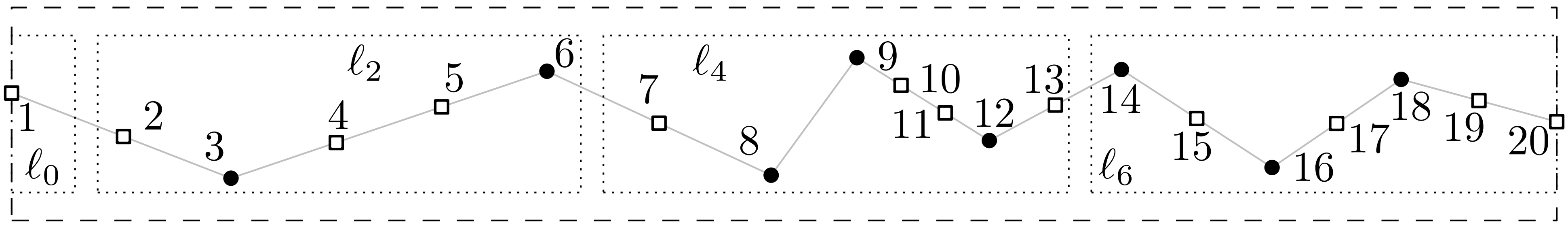
または 奇数レベルの頂点数 $\geq n/2$

δ 与えられた描画　β 平面描画
例えば



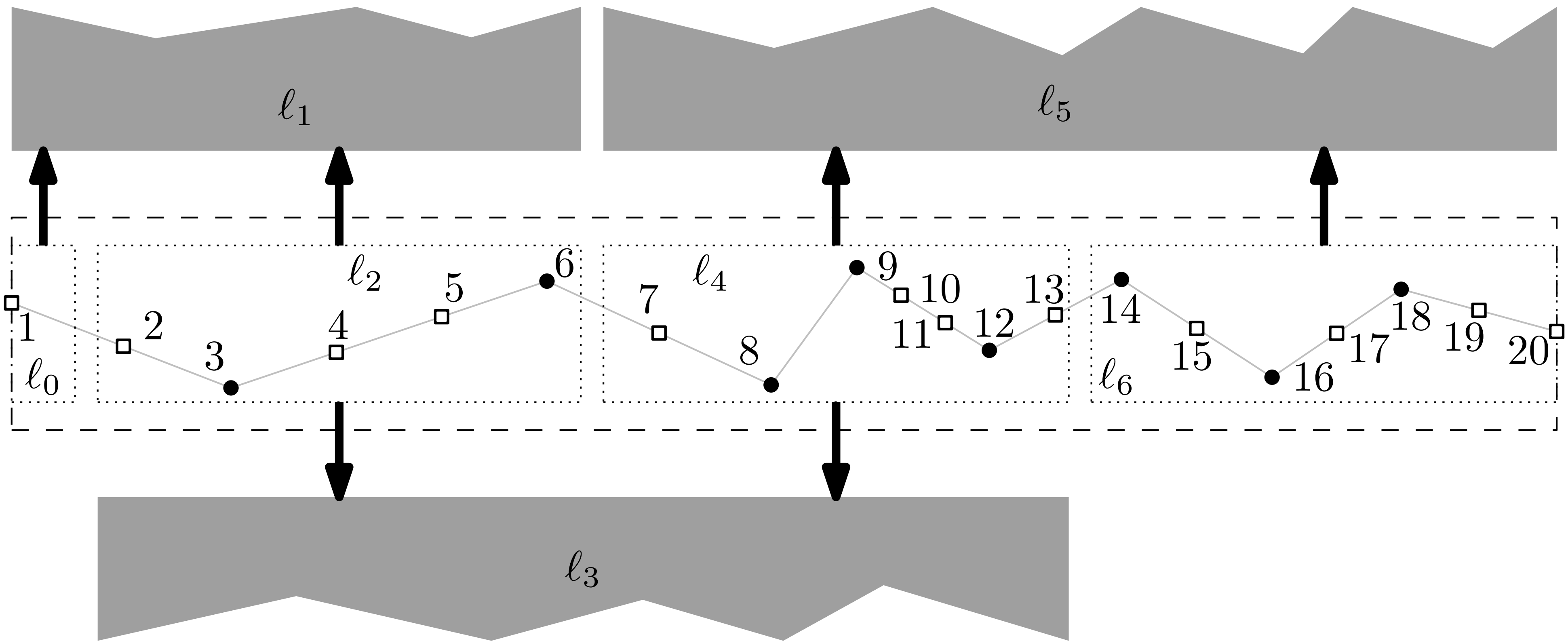
- V_{even}: 偶数レベルの頂点全体の集合
- V_{even} を蛇行順に番号づけ

1) V_{even} の処理

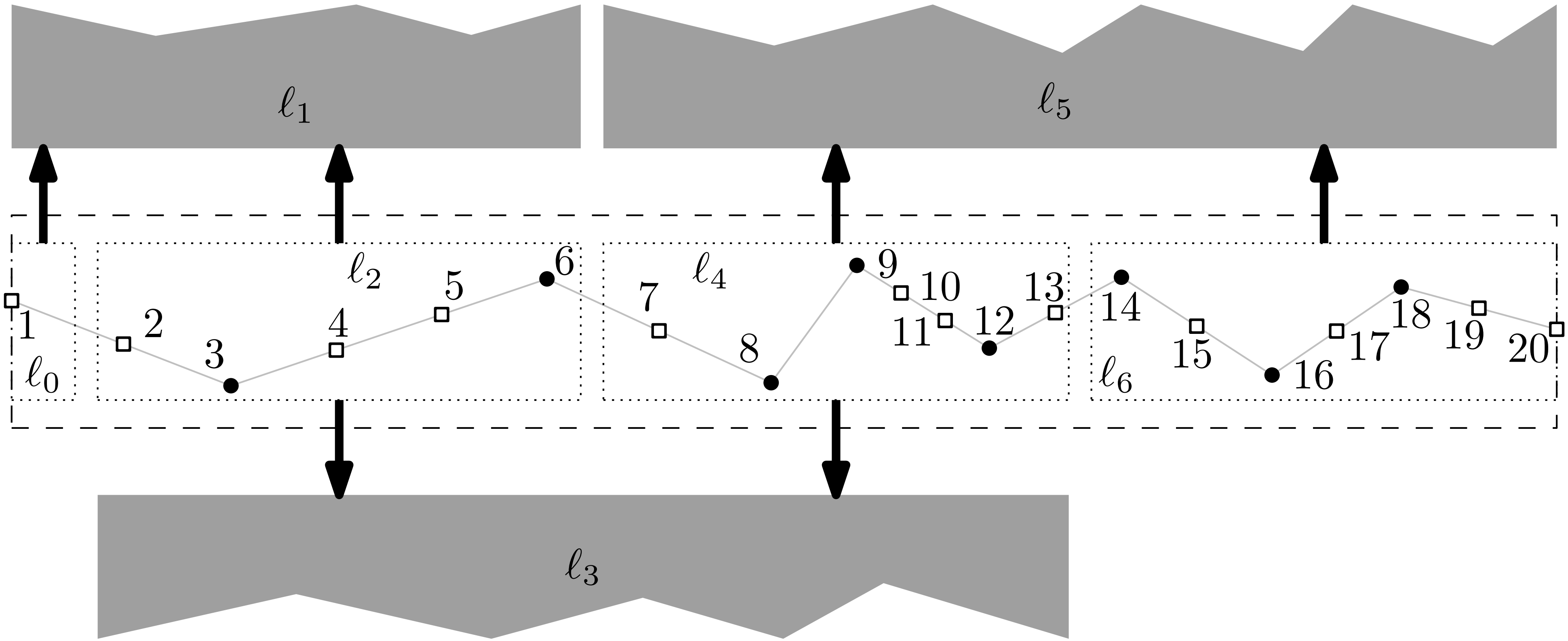


- δ のどの頂点の x 座標も同じでないように x 軸を取る
- Erdős–Szekeres を適用
- 最大単調列内の頂点を固定
- 他の頂点を間に動かし入れる

2) $V \backslash V_{\mathrm{even}}$ の処理

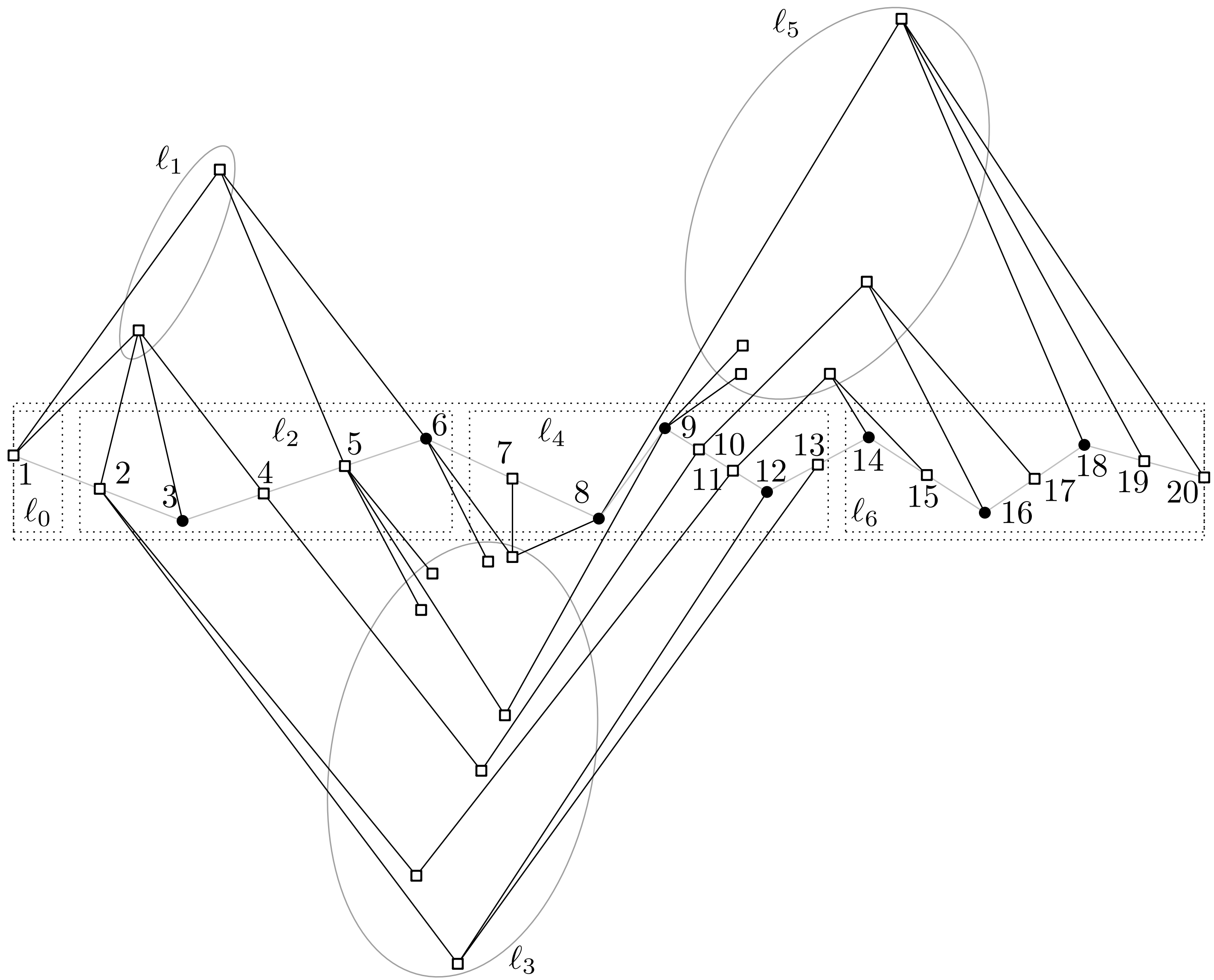


2) $V \backslash V_{\mathrm{even}}$ の処理



$\Rightarrow v \in \ell_i$ と $w \in \ell_j$ に接続する辺が交差しないのは
$i \neq j$ が奇数のとき

木に対する下界



- 問題の定義 (より形式的に)
- 閉路に対する下界 [Pach & Tardos]
- 木に対する下界
- **NP 困難性の証明**
- 近似不可能性の証明

困難性の結果

定理

- 平面的グラフ G とその描画 δ が与えられたとき $\mathrm{shift}(G, \delta)$ を計算する問題は NP 困難

定理

- **平面的グラフ** G **とその描画** δ **が与えられたとき** $\mathrm{shift}(G, \delta)$ **を計算する問題は** NP **困難**

証明

- **平面的** 3SAT **を帰着**

NP **完全** (Lichtenstein SICOMP'82)

困難性の結果

定理

- 平面的グラフ G とその描画 δ が与えられたとき shift(G, δ) を計算する問題は NP 困難

証明

- 平面的 3SAT を帰着

NP 完全 (Lichtenstein SICOMP'82)

補足

- Verbitsky (arXiv '07) のより直接的な証明は近似不可能性を導かない

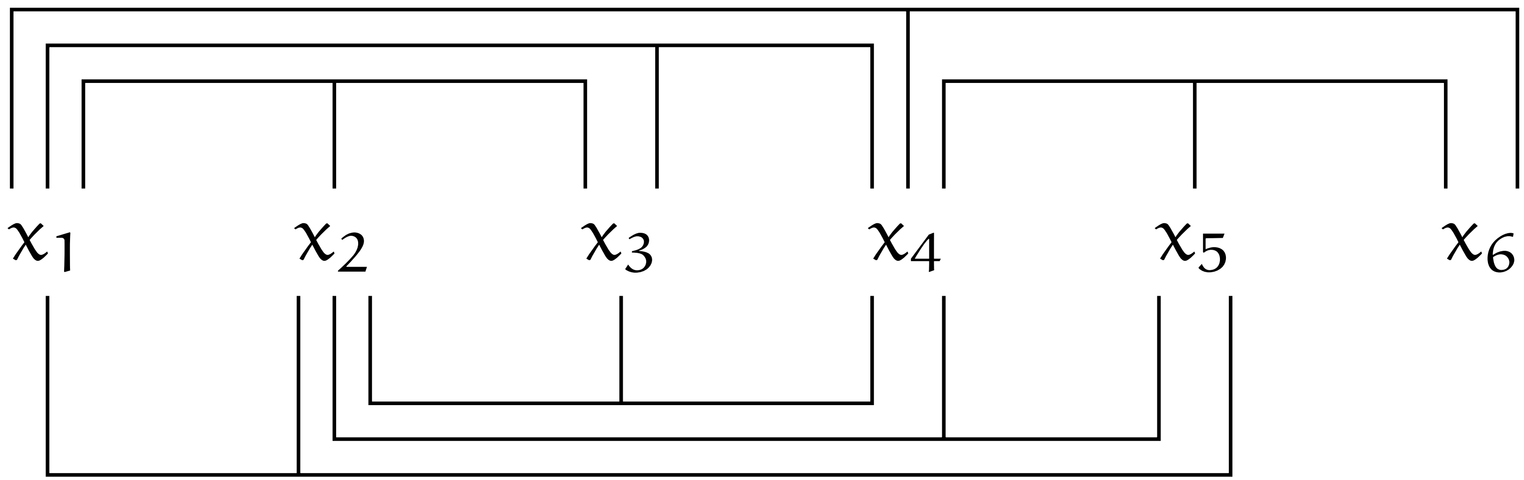
平面的 3SAT

入力 : 3CNF 論理式 φ で
変数–節接続グラフが平面的

質問 : φ は充足可能ですか？

補足: そのようなグラフは下図のように埋め込み可能

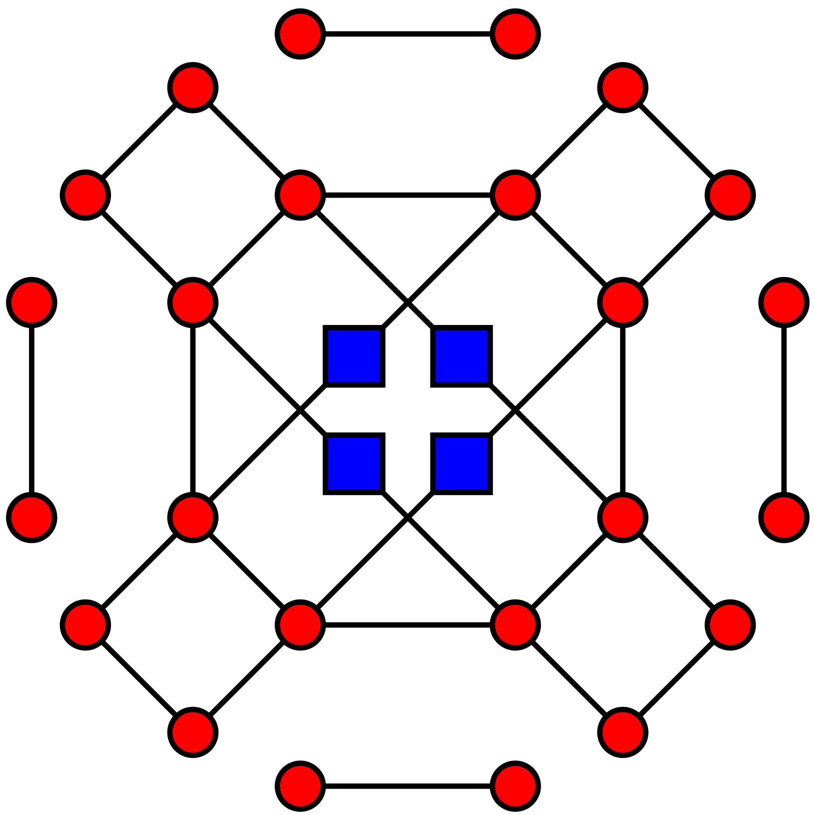
(Knuth & Ragunathan SIAMDM'92)



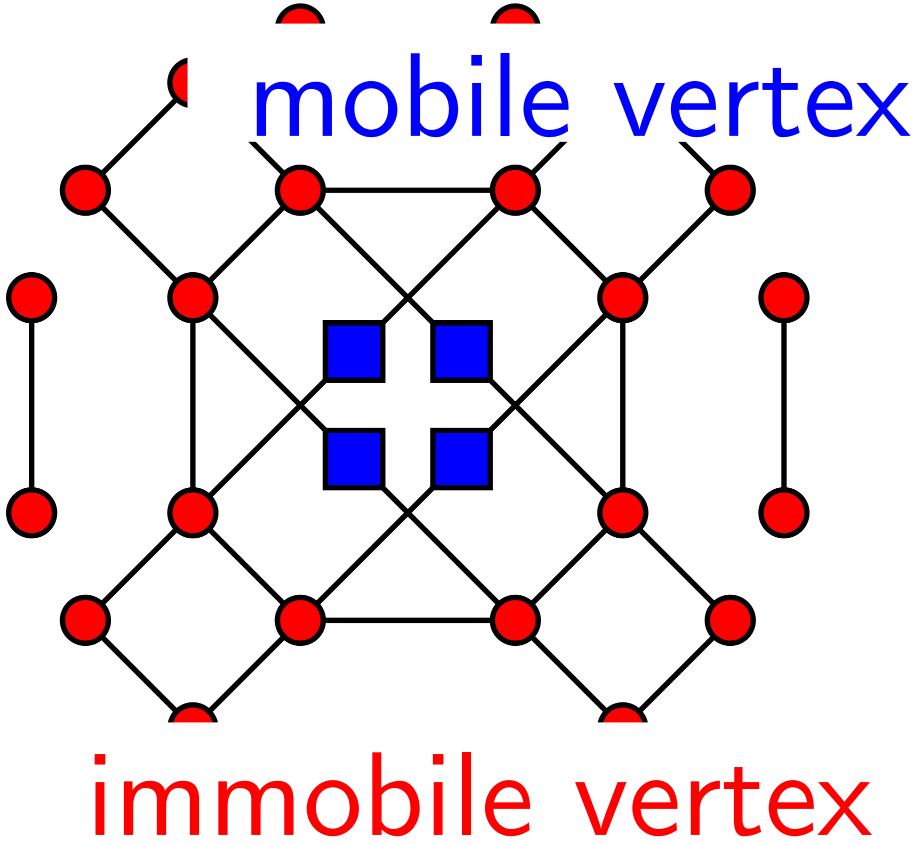
平面的 3CNF 論理式 φ が与えられて

- 平面的グラフ G_φ とその埋め込み δ_φ を次のように作成
- φ が充足可能 $\Leftrightarrow$ δ_φ は高々K 個の頂点を動かして平面にできる
- 頂点: 2 種類
  - Mobile (動かせる)
  - Immobile (動かさないつもり)
- 辺: どれも高々1 つの辺としか交差しない
- ガジェット: 2 種類
  - 変数ガジェット
  - 節ガジェット

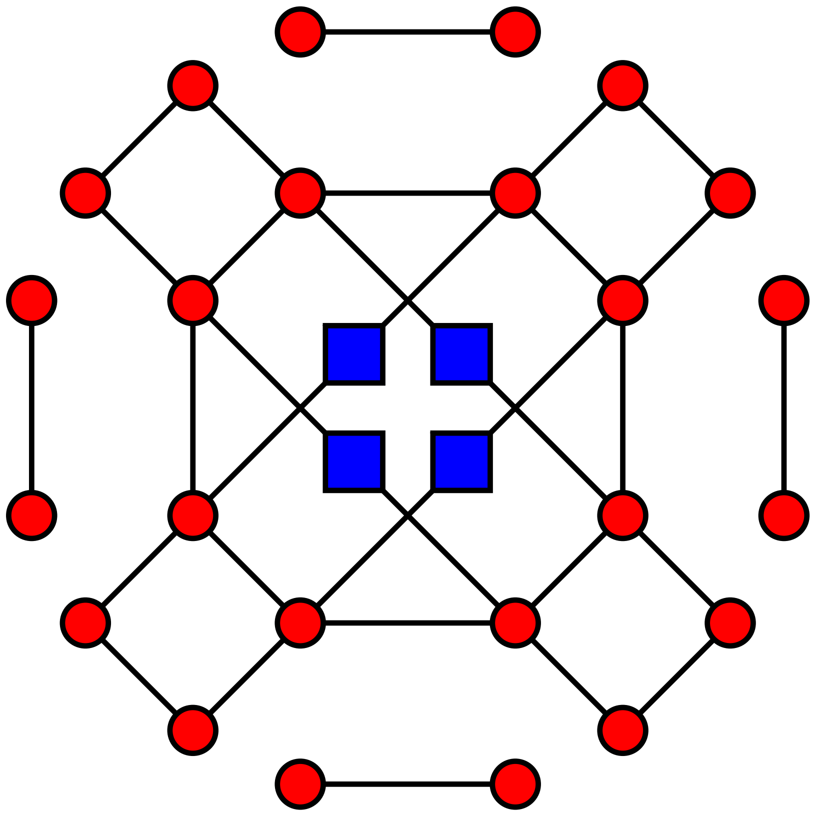
ガジェット：ブロック



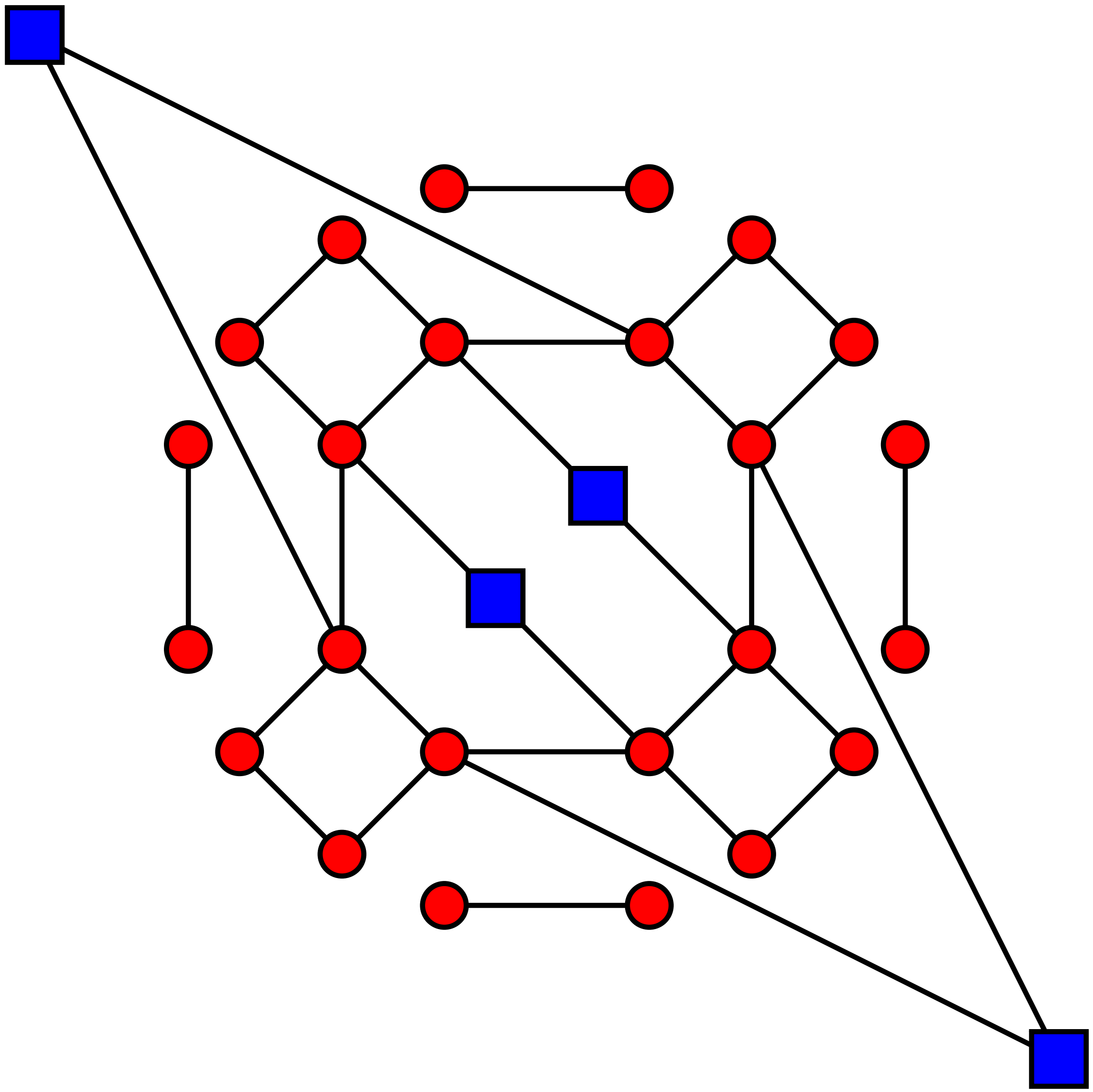
ガジェット：ブロック



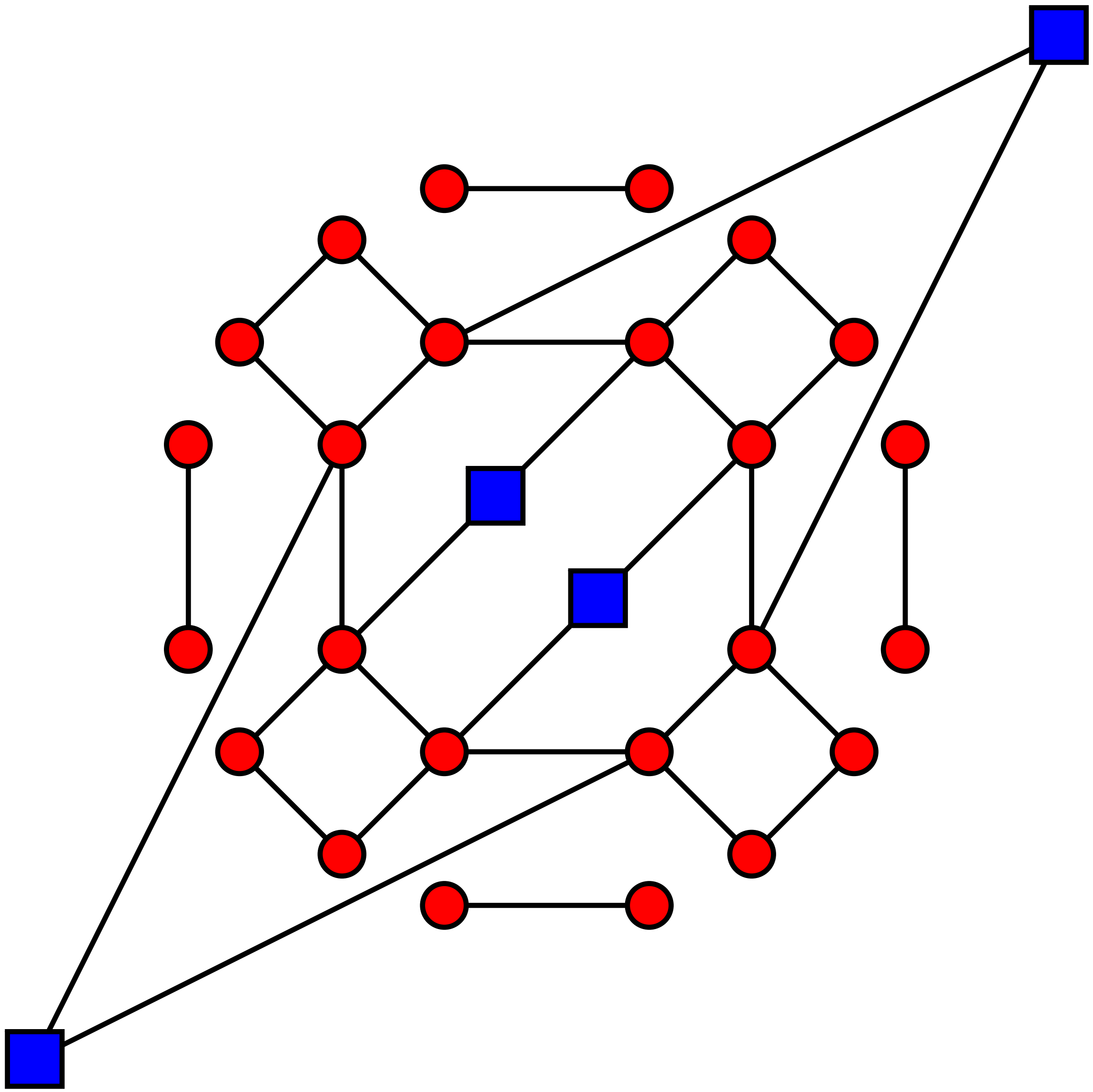
ガジェット：ブロック



ガジェット：ブロック

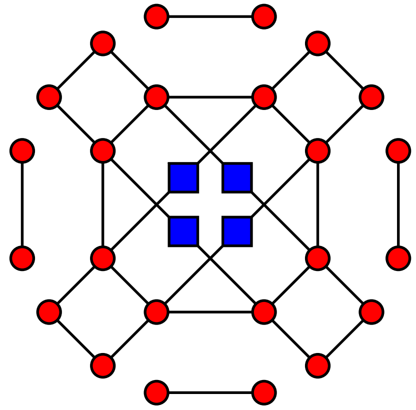


ガジェット：ブロック

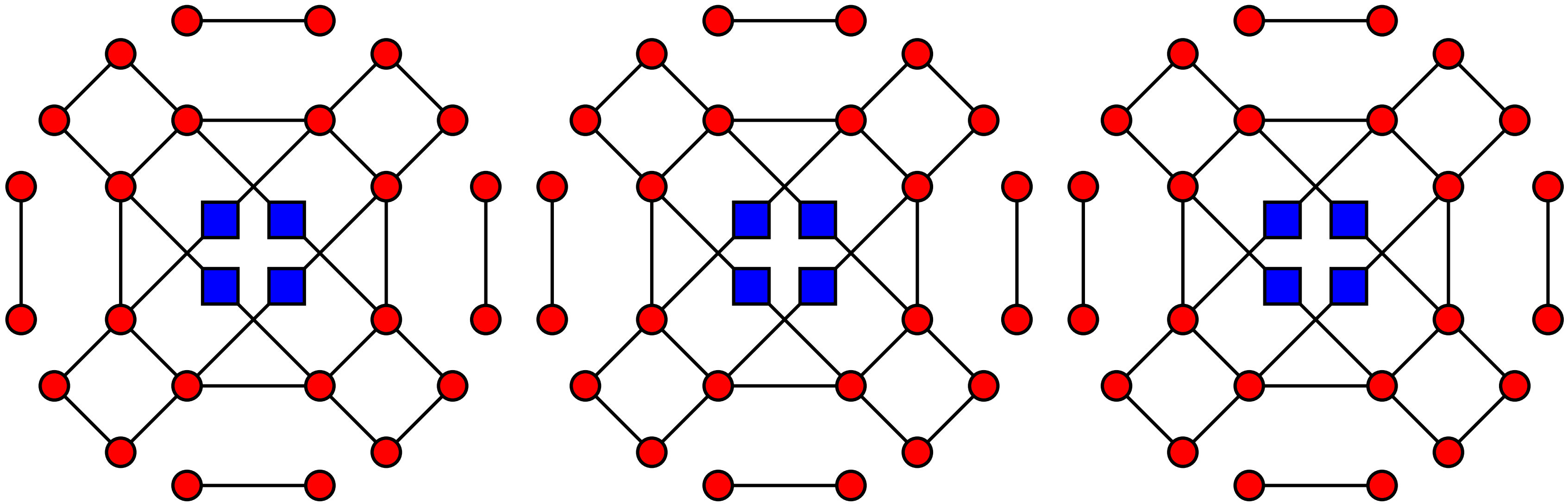


ガジェットの性質

- Mobile 頂点にはちょうど 2 辺が接続
- これら 2 辺は交差
- Mobile 頂点は隣接しない
- Mobile 頂点を 1 つ動かすと交差が 2 つ無くなる

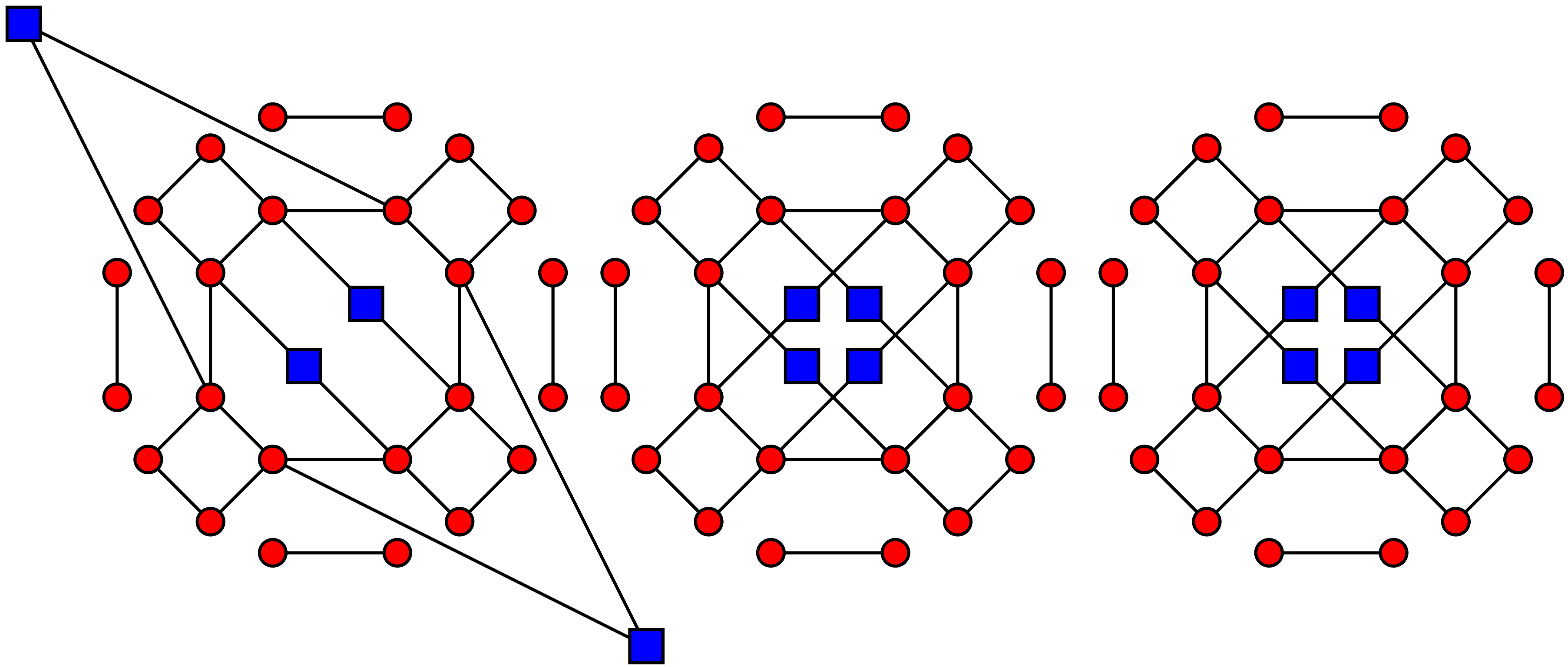


ガジェット：変数



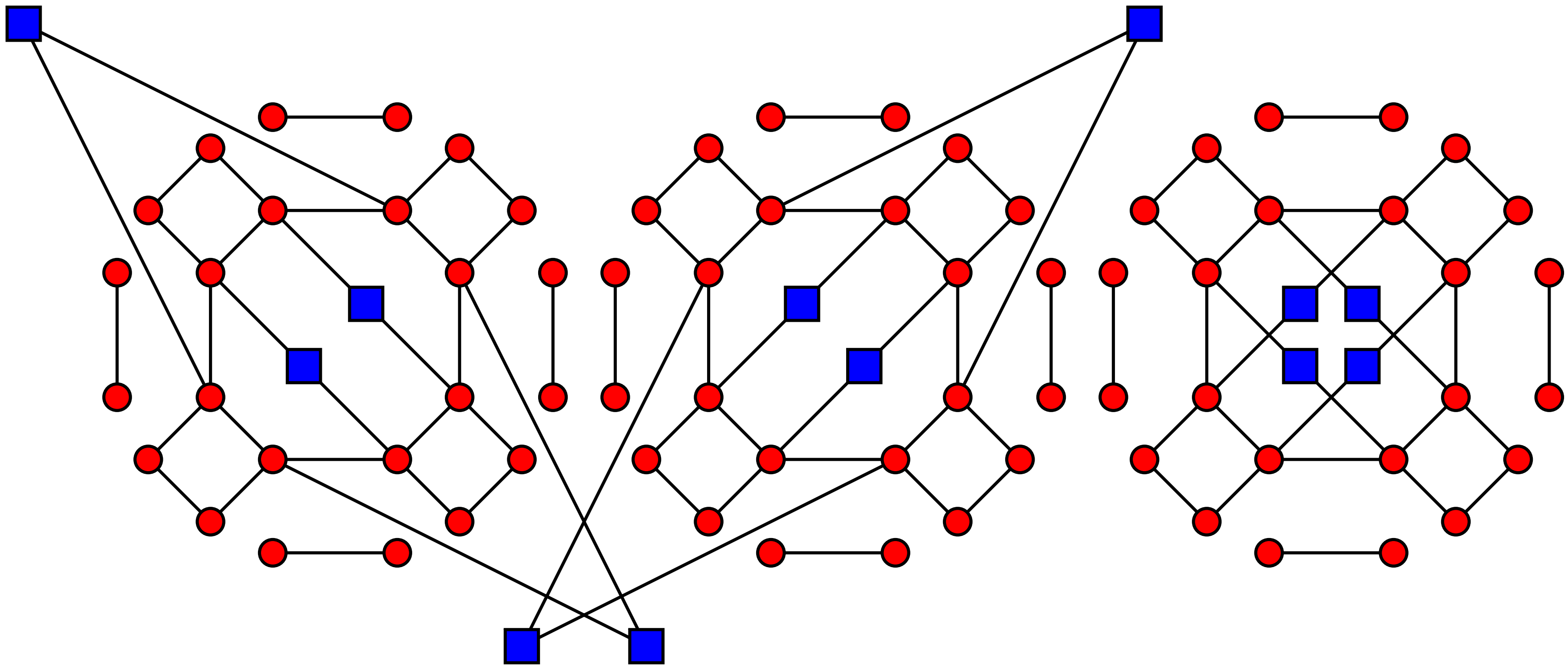
ブロック数 $=$ 変数の出現回数

ガジェット：変数

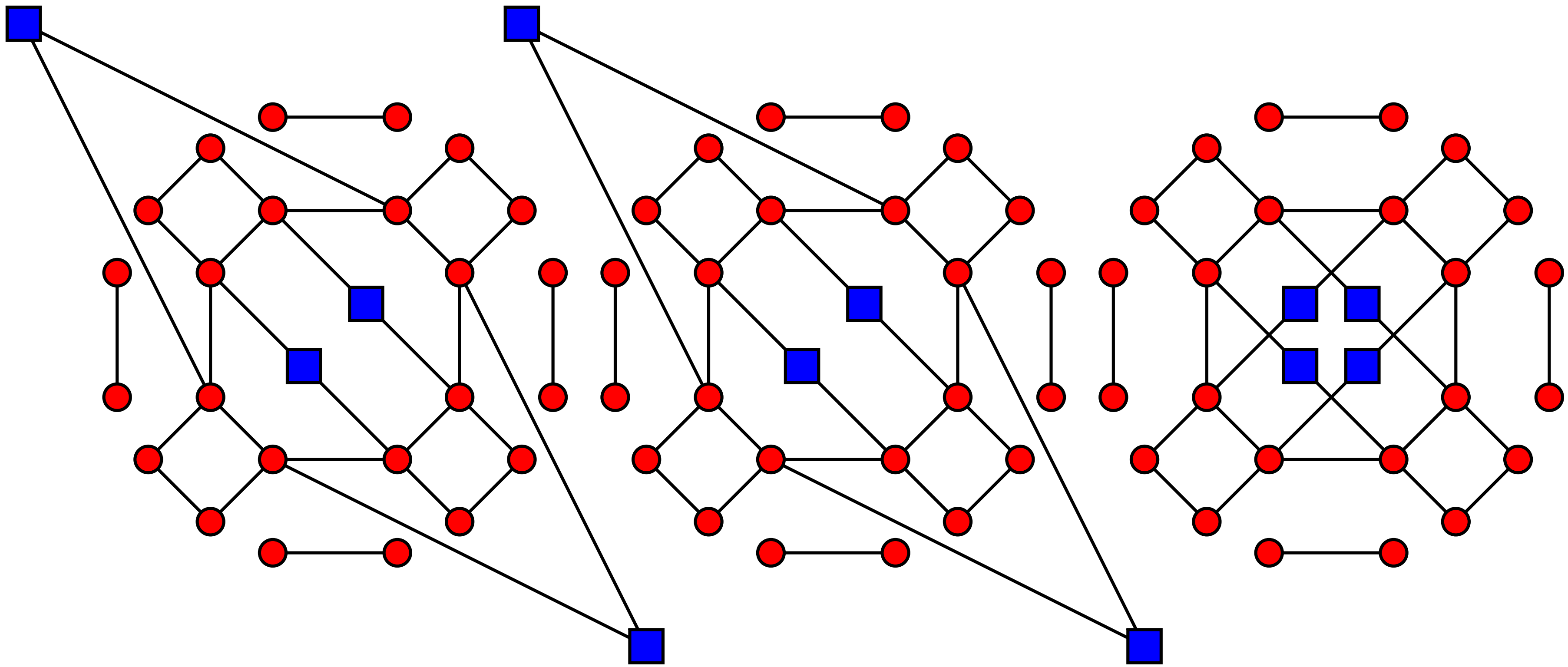


ブロック数 $=$ 変数の出現回数

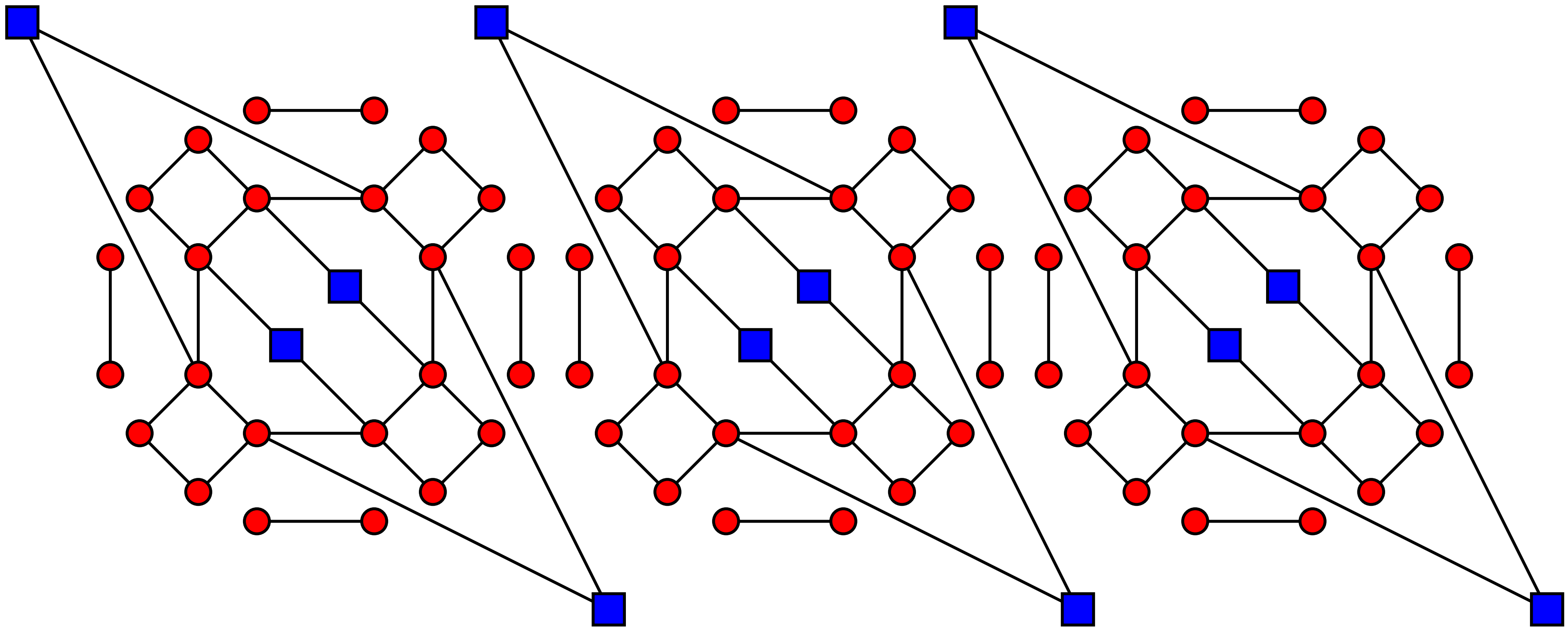
ガジェット：変数



ブロック数 = 変数の出現回数

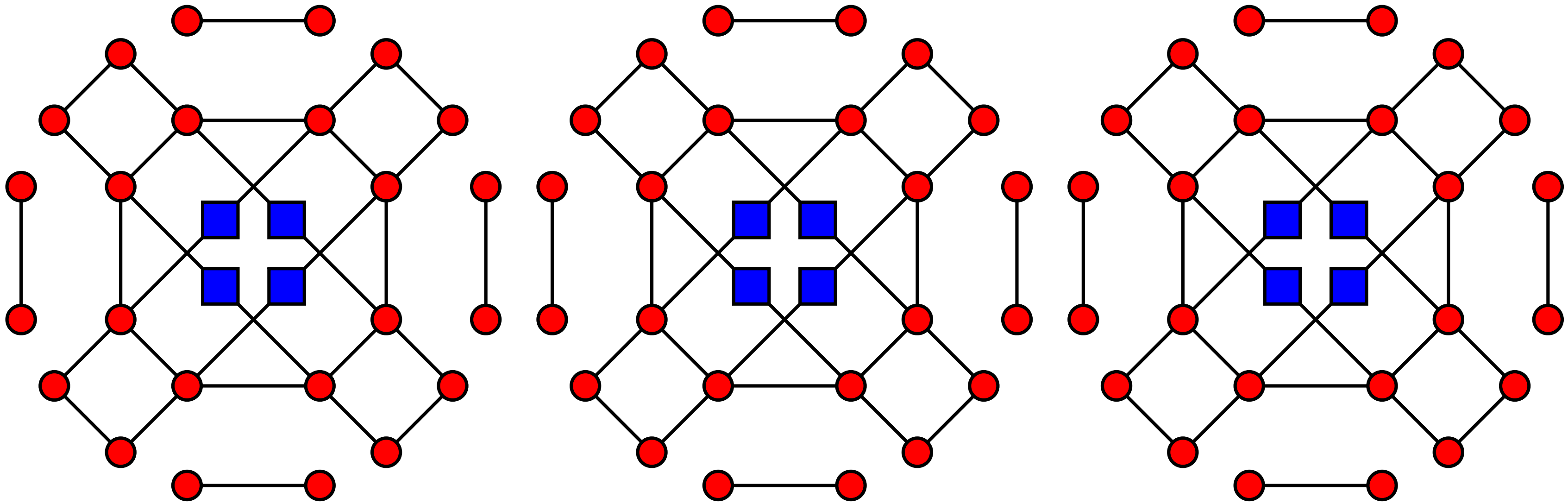


ブロック数 = 変数の出現回数



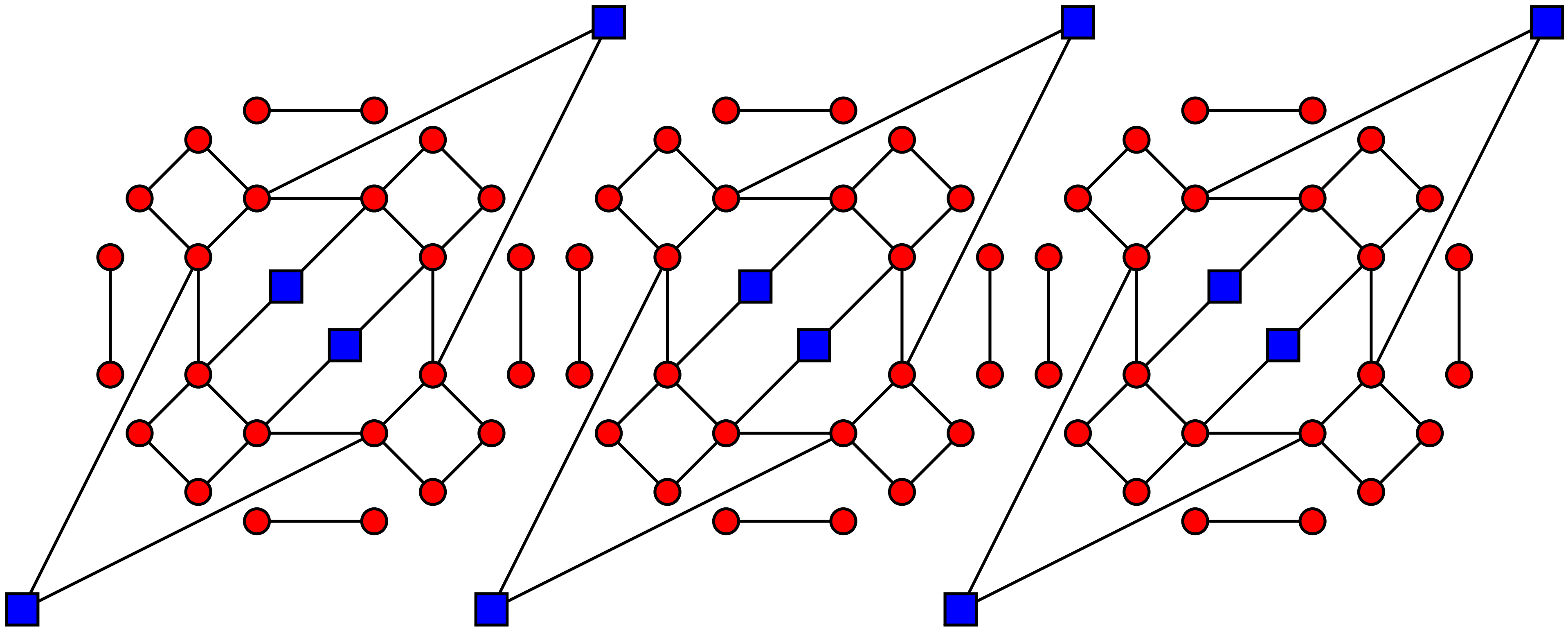
ブロック数 $=$ 変数の出現回数

ガジェット：変数

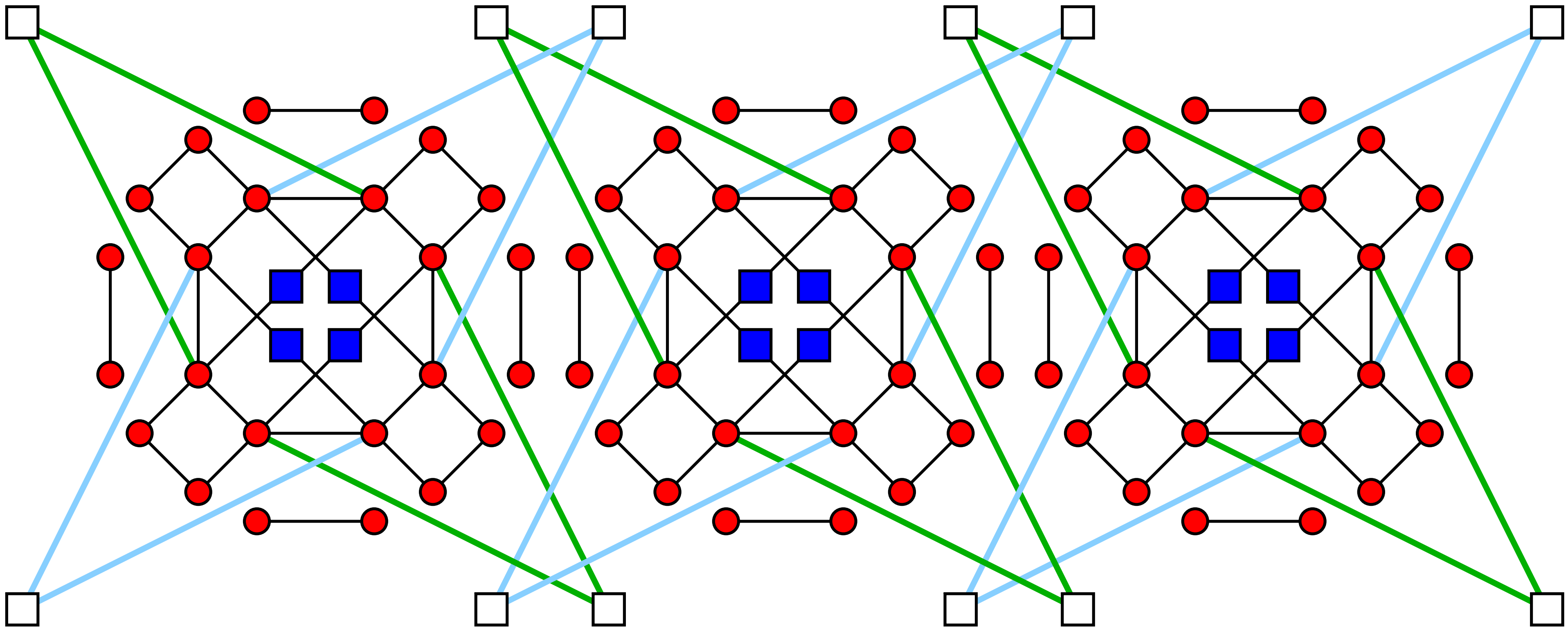


ブロック数 $=$ 変数の出現回数

ガジェット： 変数

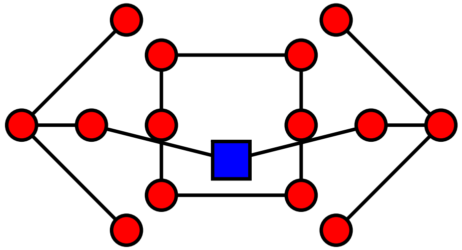


ブロック数 ＝ 変数の出現回数

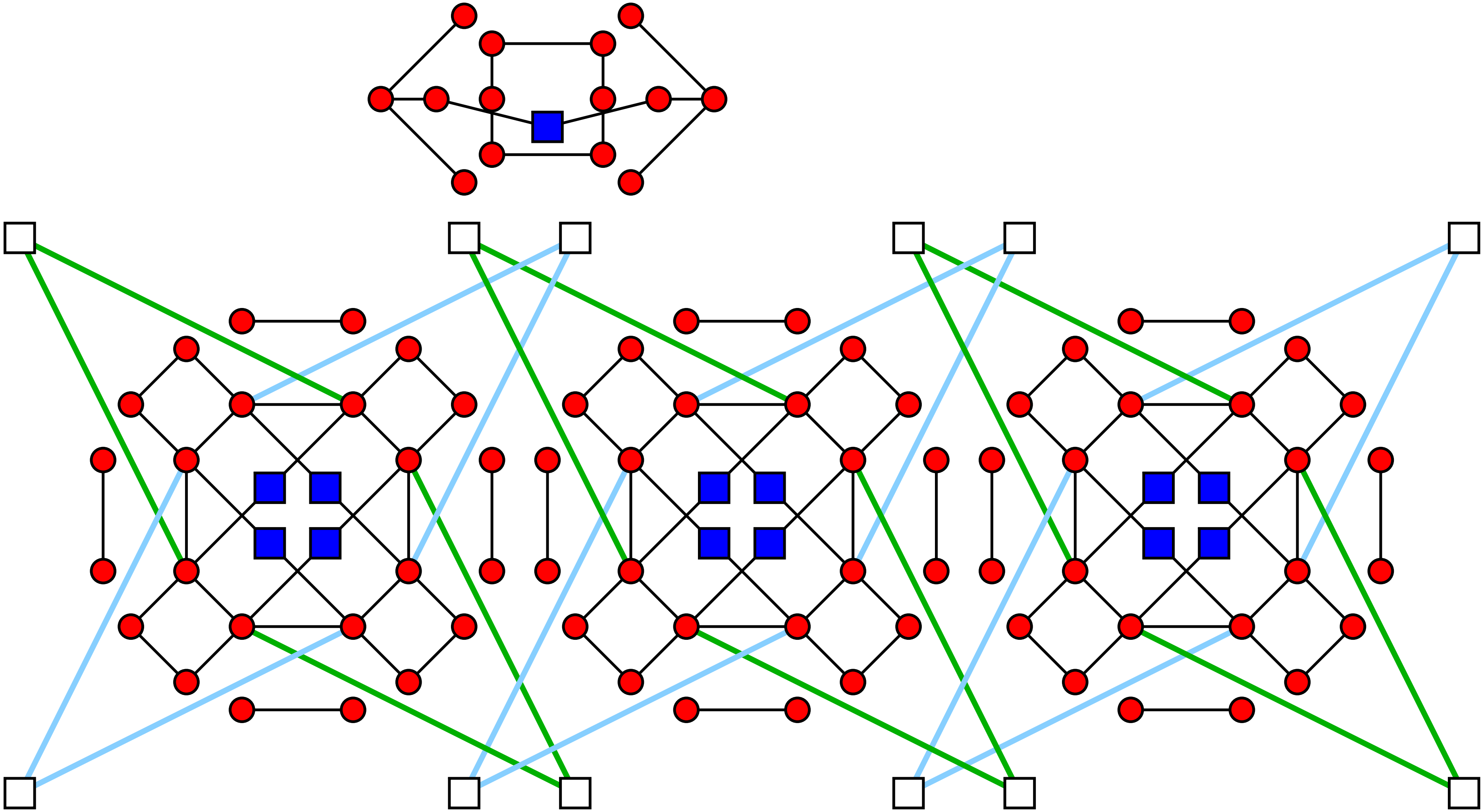


ブロック数 $=$ 変数の出現回数

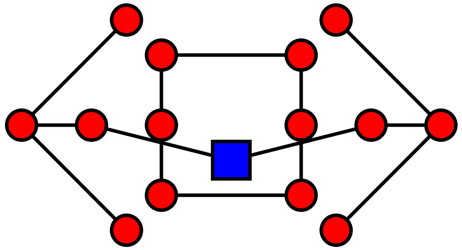
ガジェット：節ガジェットへの橋渡し



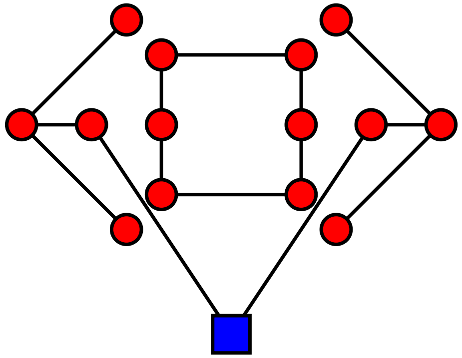
ガジェット：節ガジェットへの橋渡し



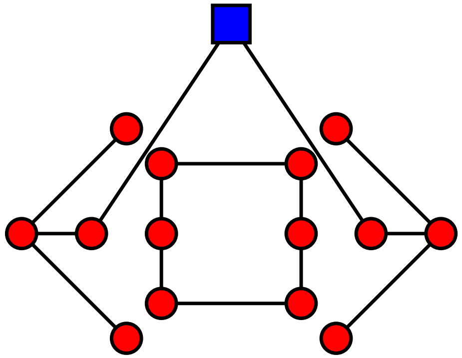
ガジェット：節ガジェットへの橋渡し



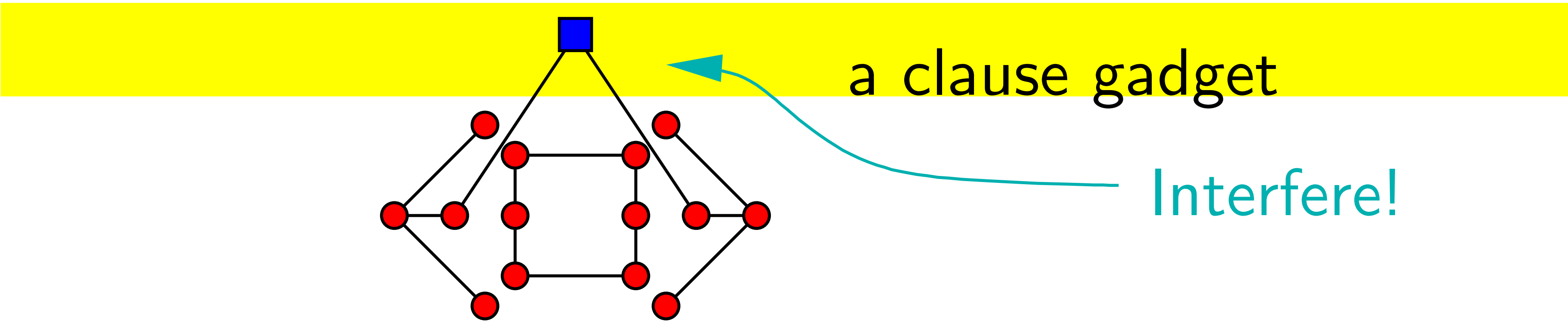
ガジェット：節ガジェットへの橋渡し



ガジェット：節ガジェットへの橋渡し

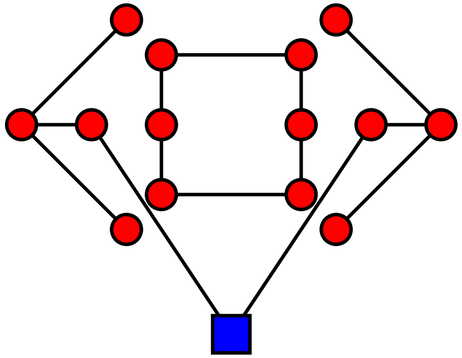


ガジェット: 節ガジェットへの橋渡し



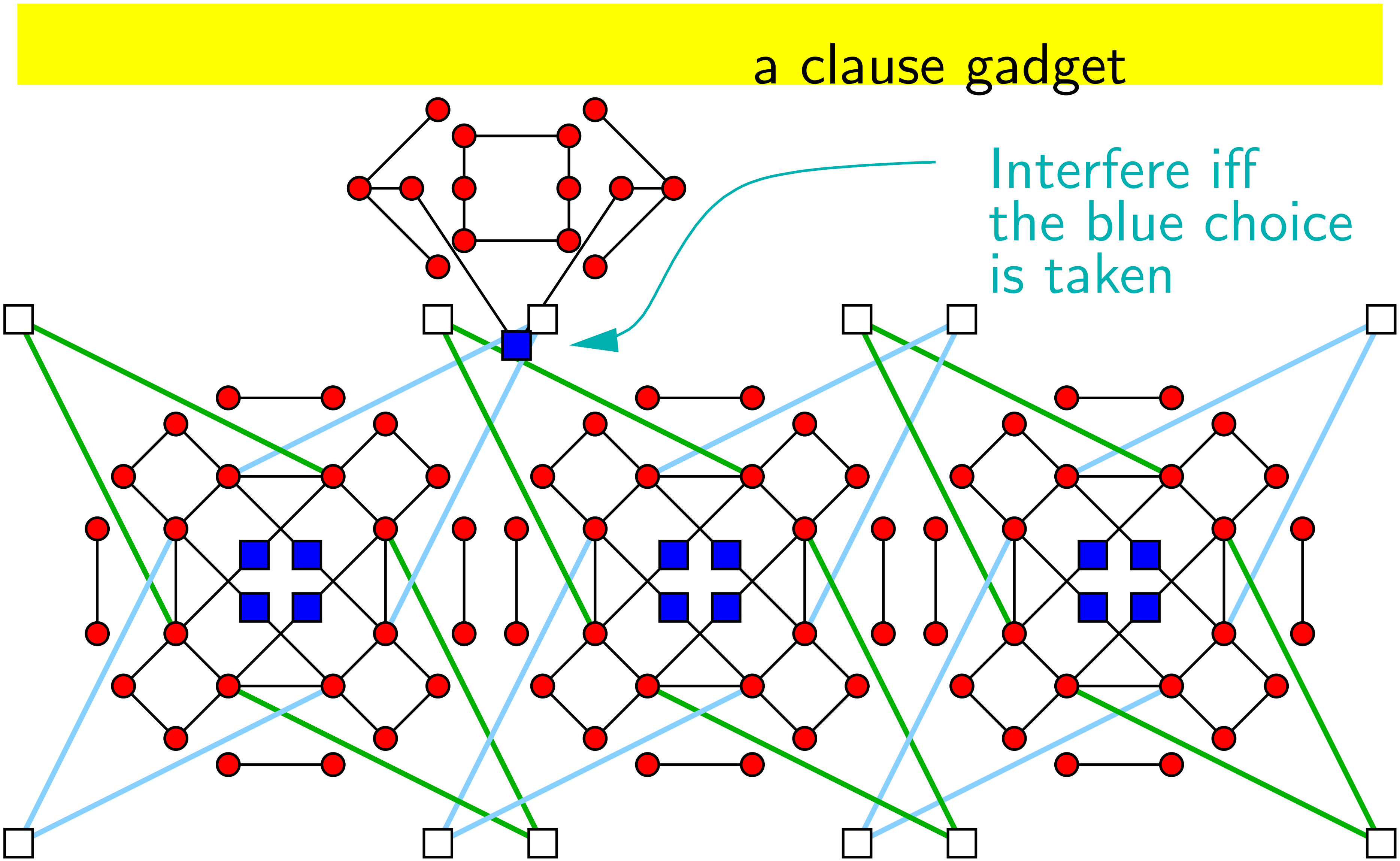
ガジェット：節ガジェットへの橋渡し

a clause gadget



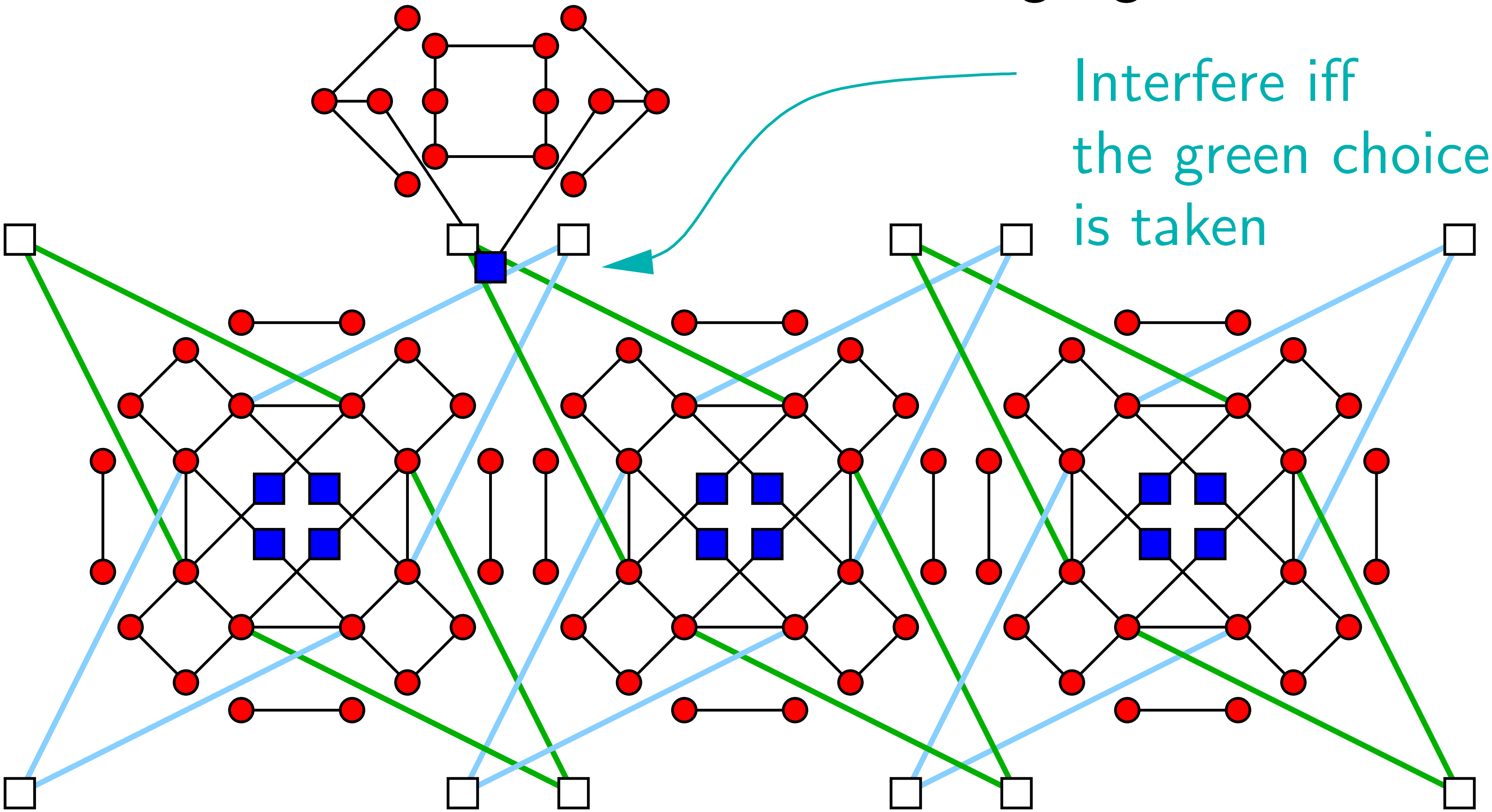
Interfere!

ガジェット：節ガジェットへの橋渡し



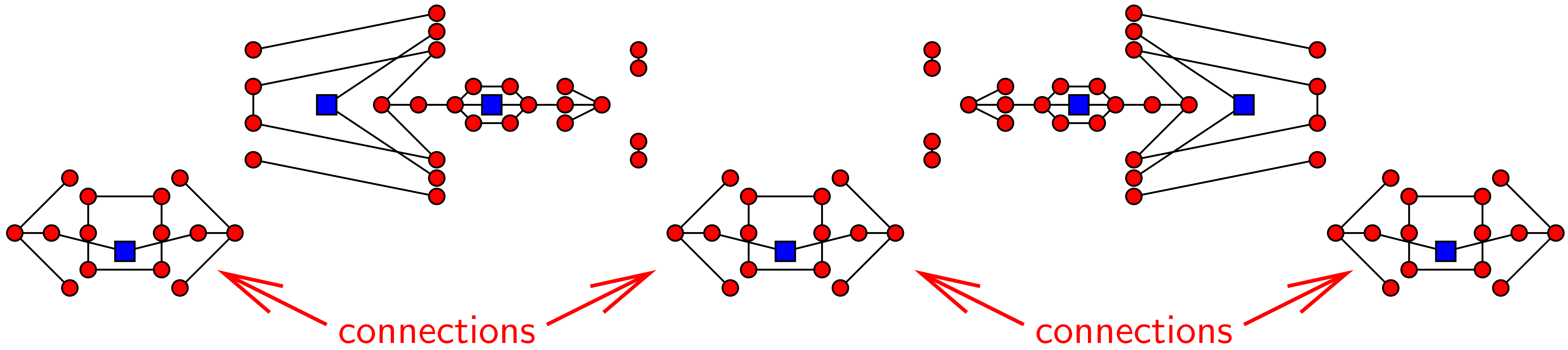
ガジェット：節ガジェットへの橋渡し

a clause gadget

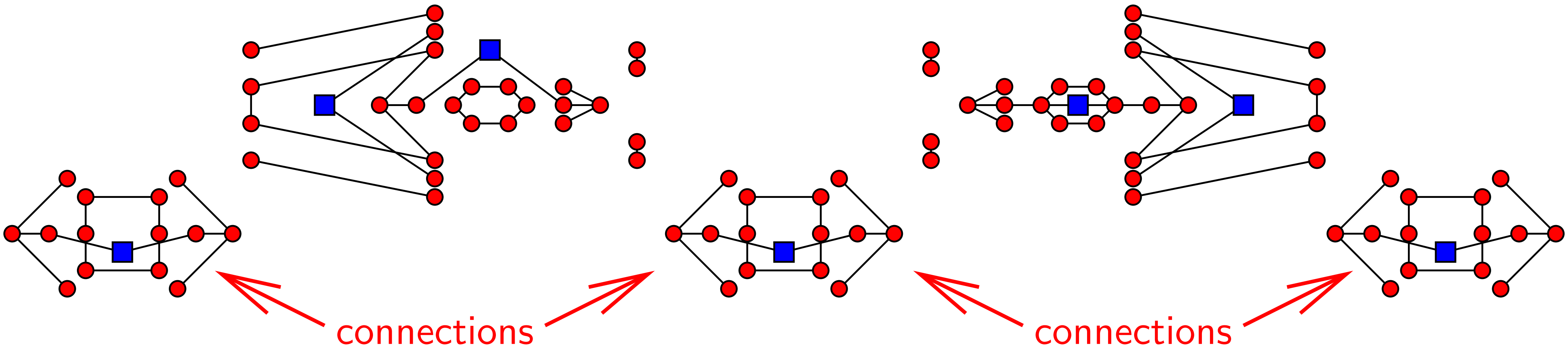


Interfere iff
the green choice
is taken

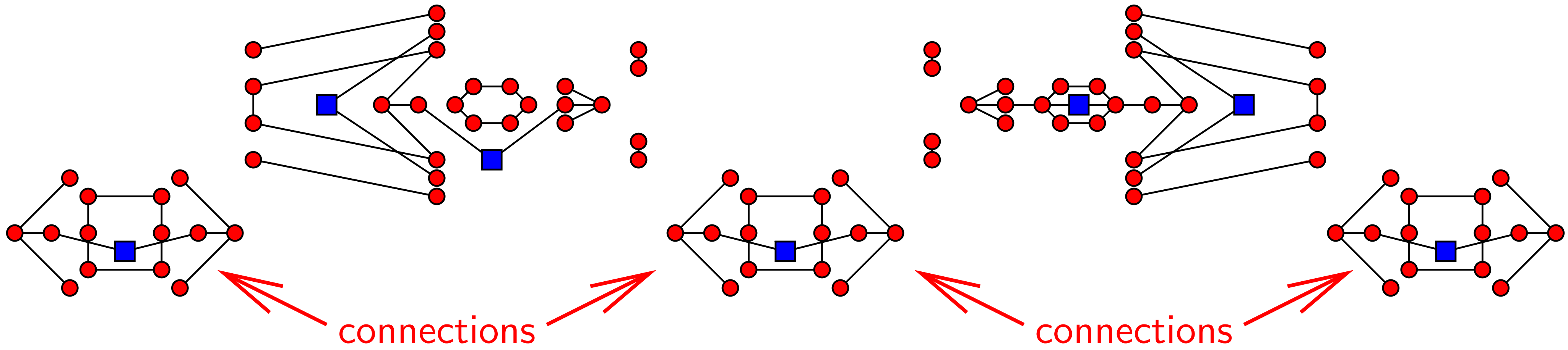
ガジェット：節



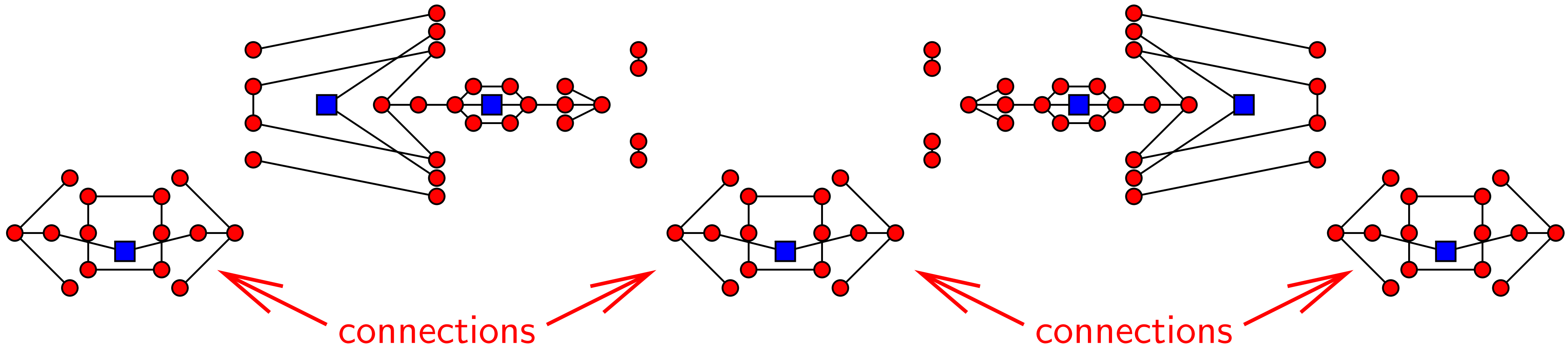
ガジェット：節



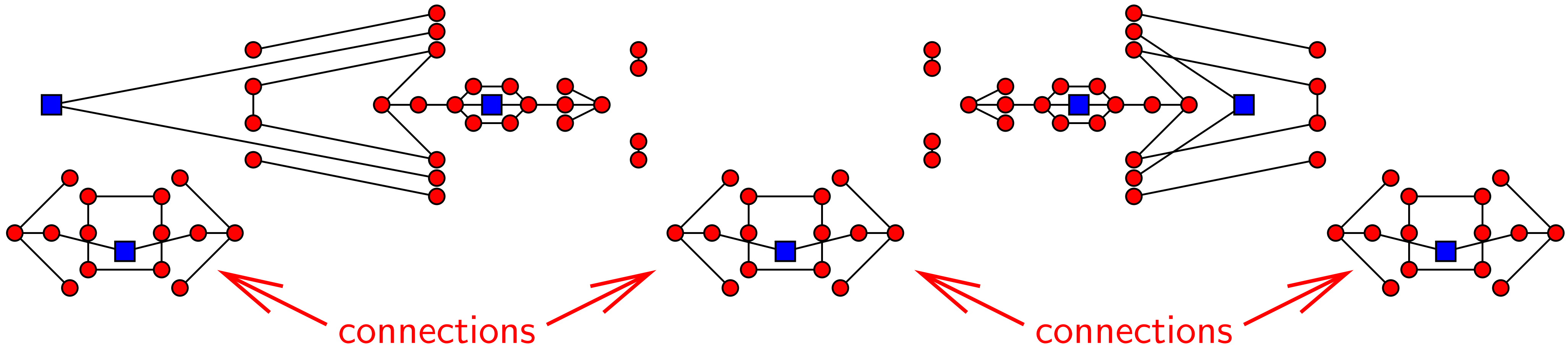
ガジェット：節



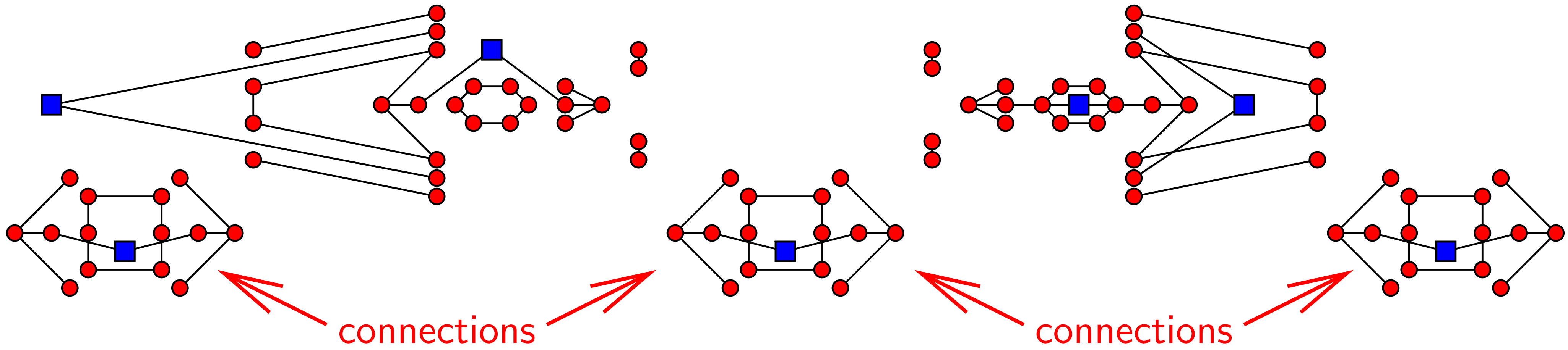
ガジェット：節



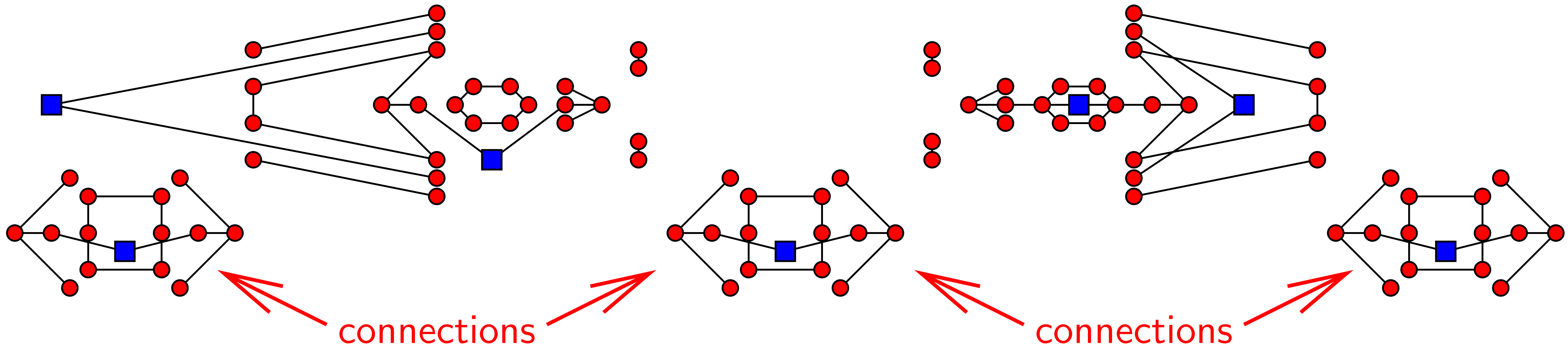
ガジェット：節



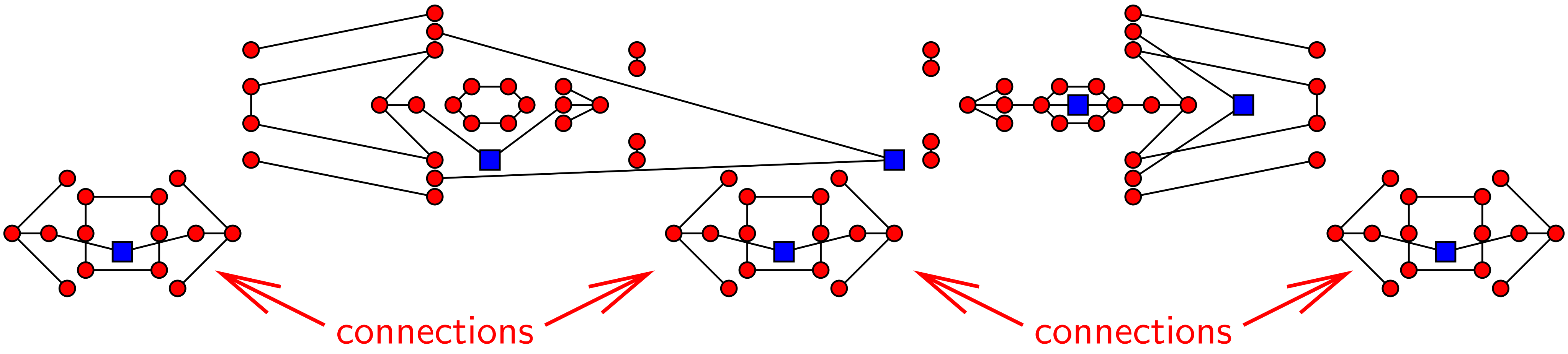
ガジェット：節



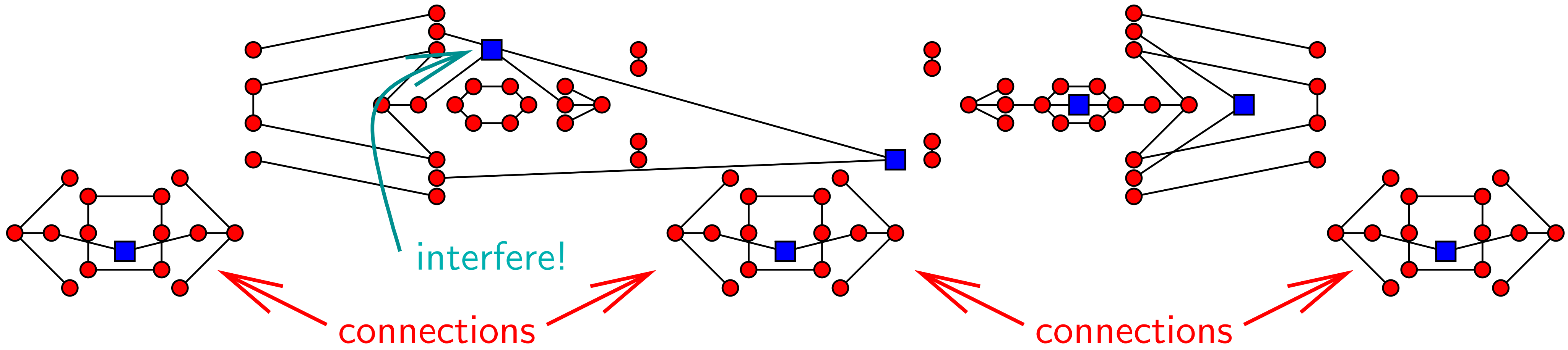
ガジェット：節

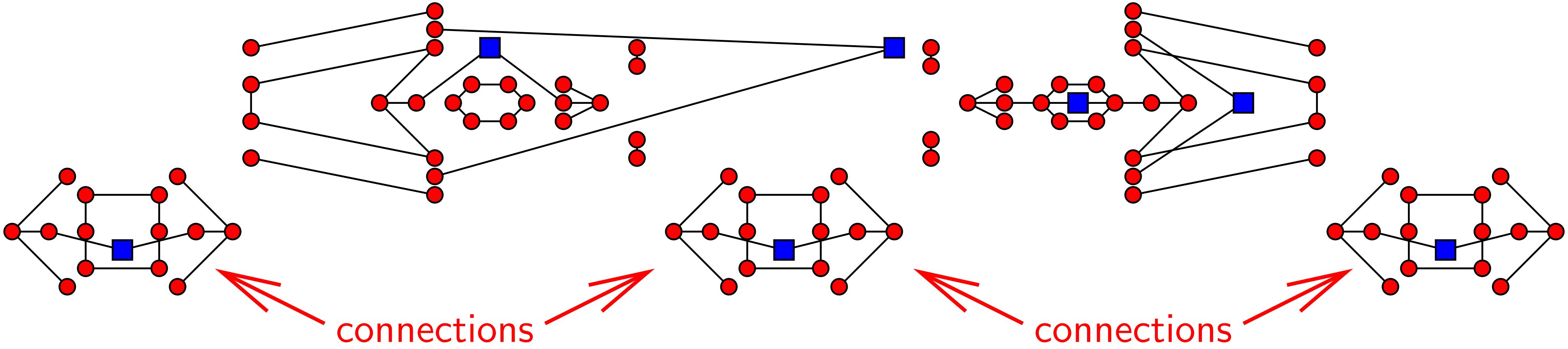


ガジェット：節

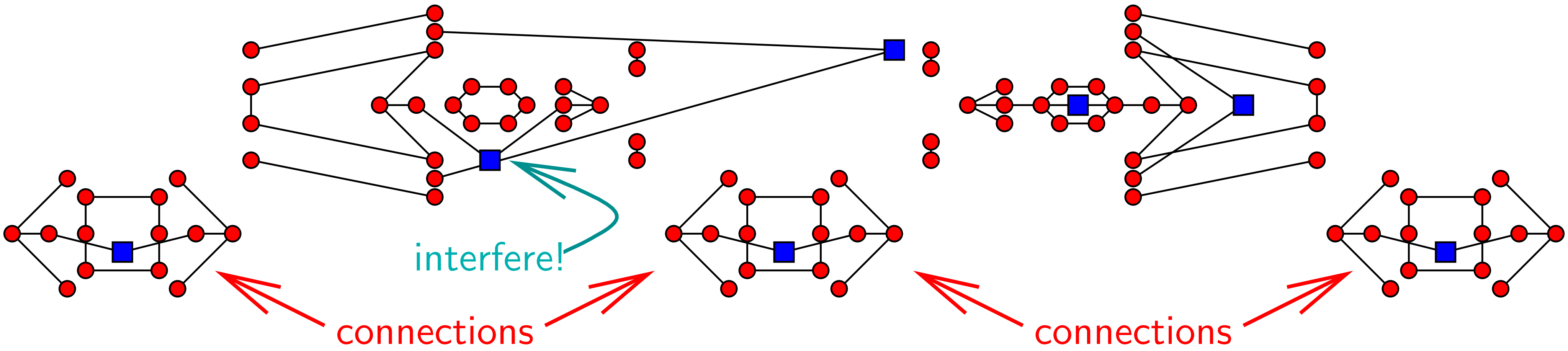


ガジェット：節

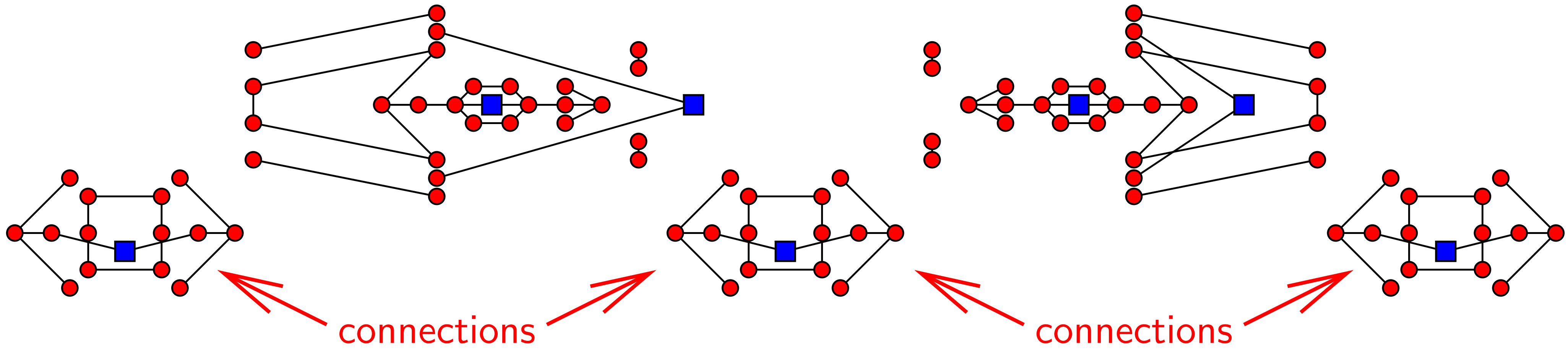



connections
connections

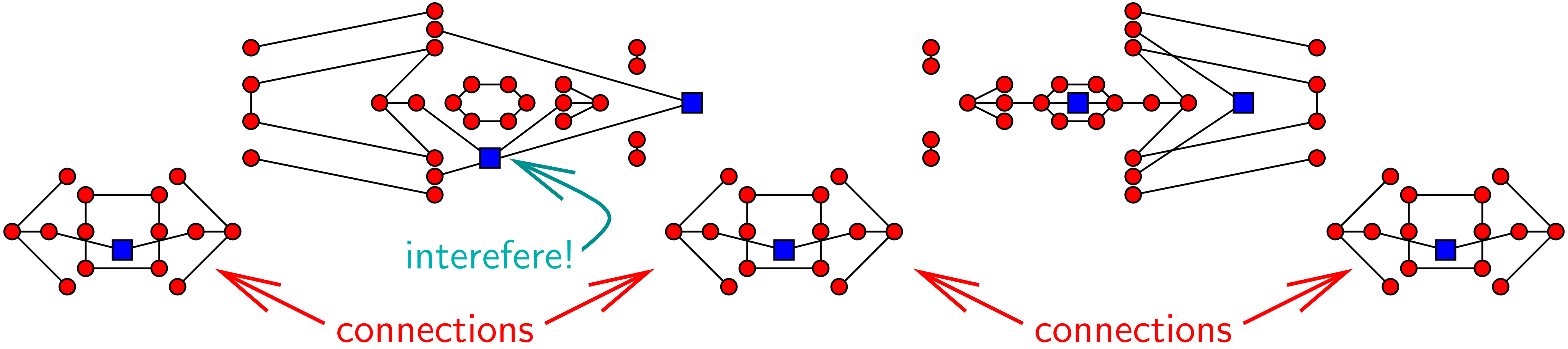
ガジェット：節



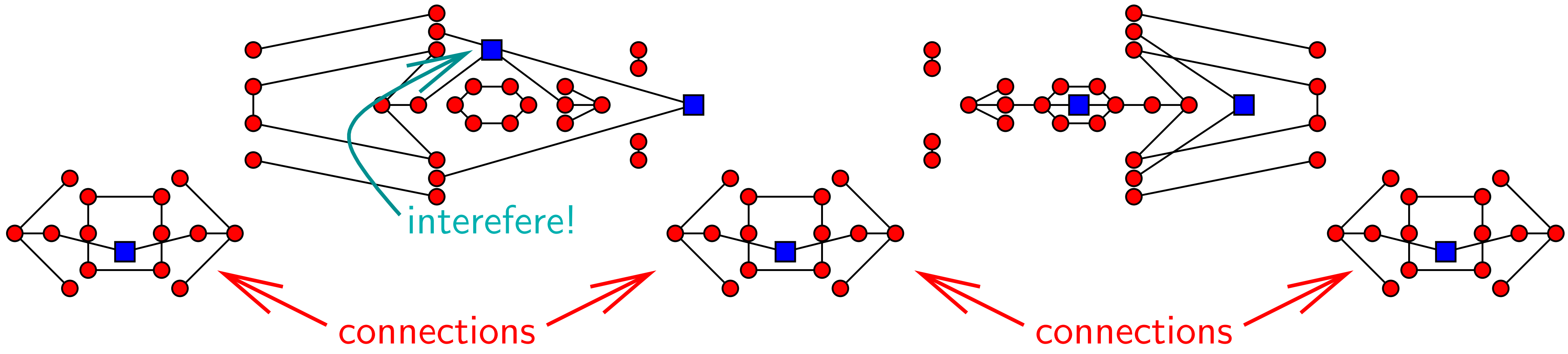
ガジェット：節



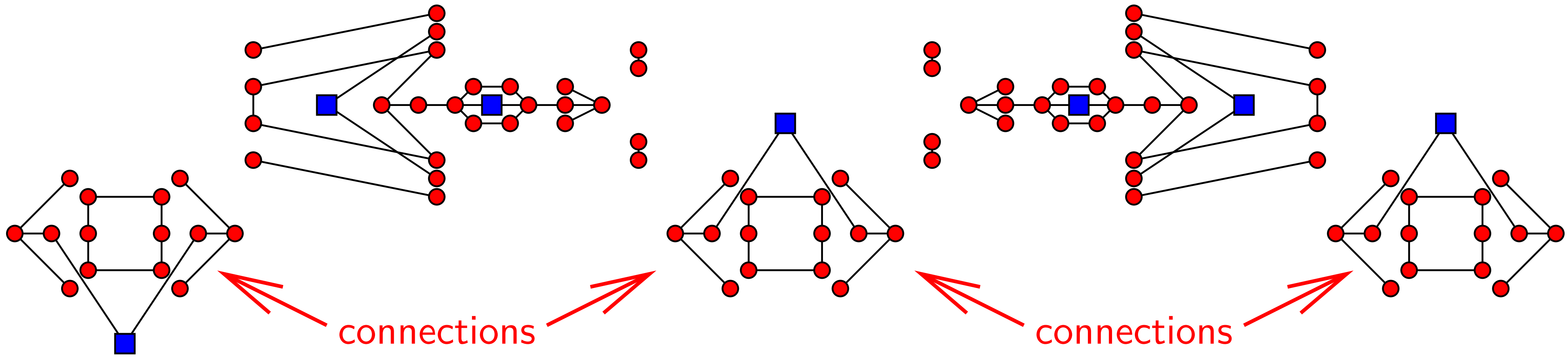
ガジェット：節



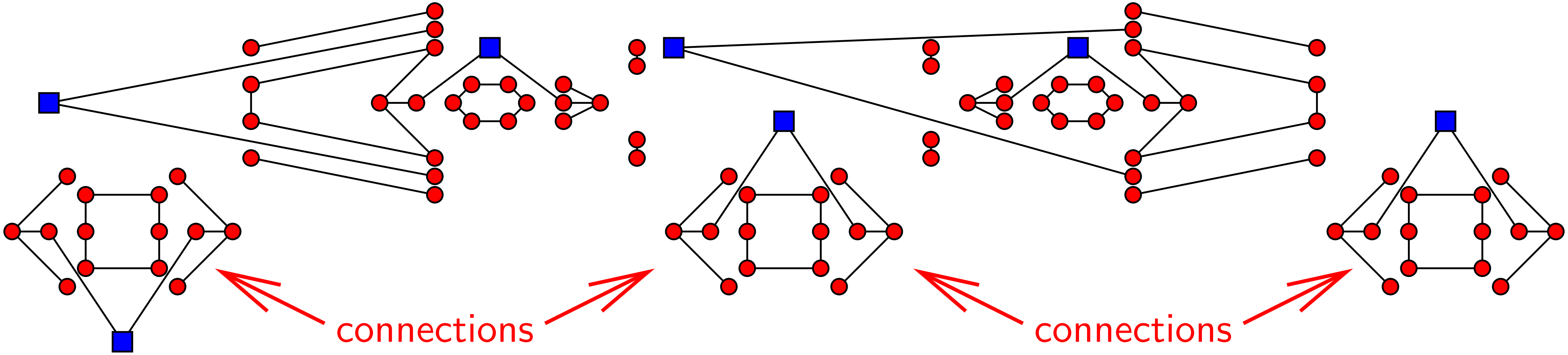
ガジェット：節



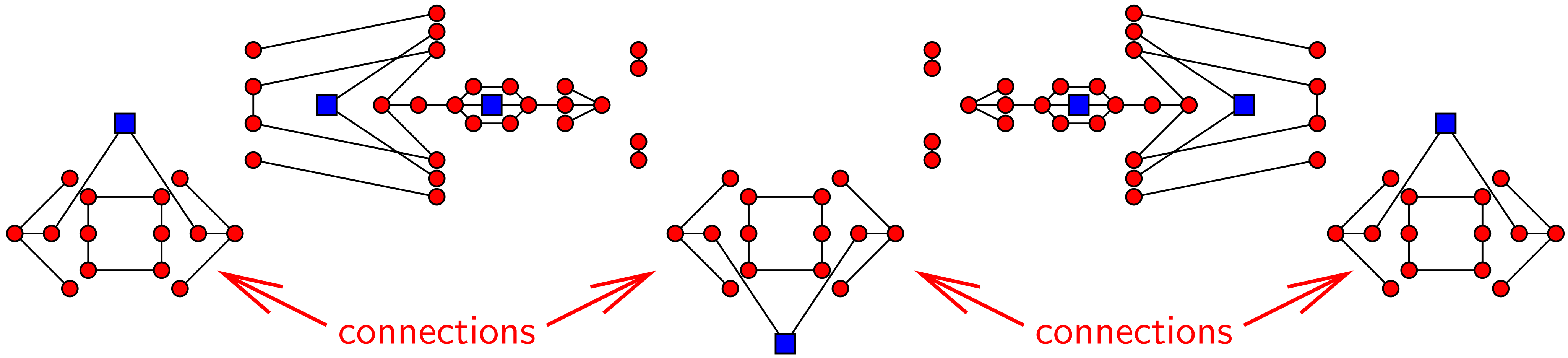
ガジェット：節



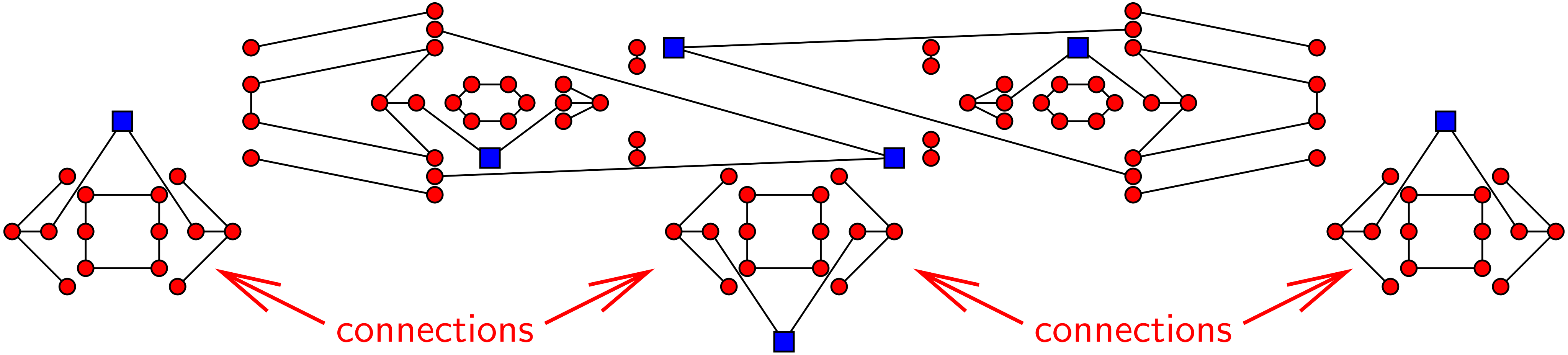
ガジェット：節



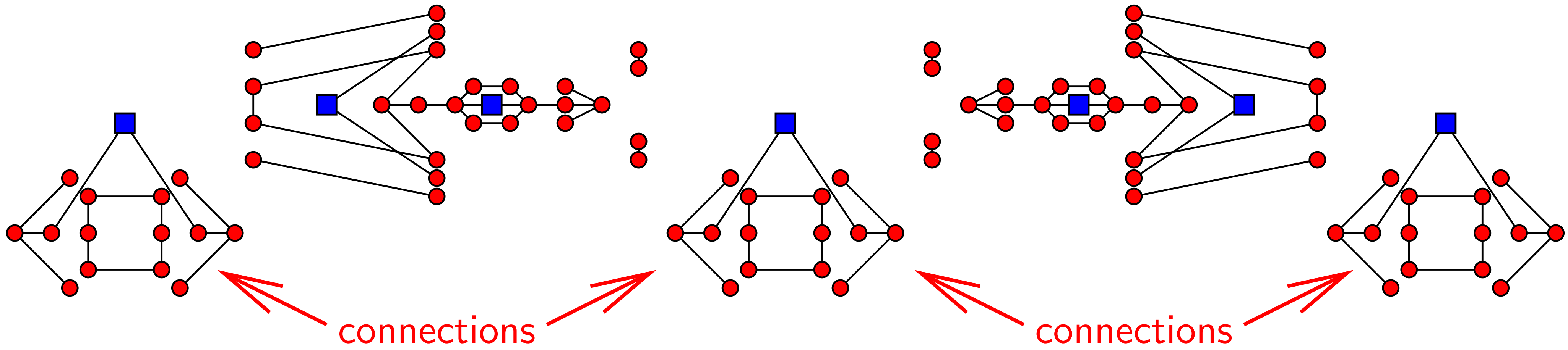
ガジェット：節



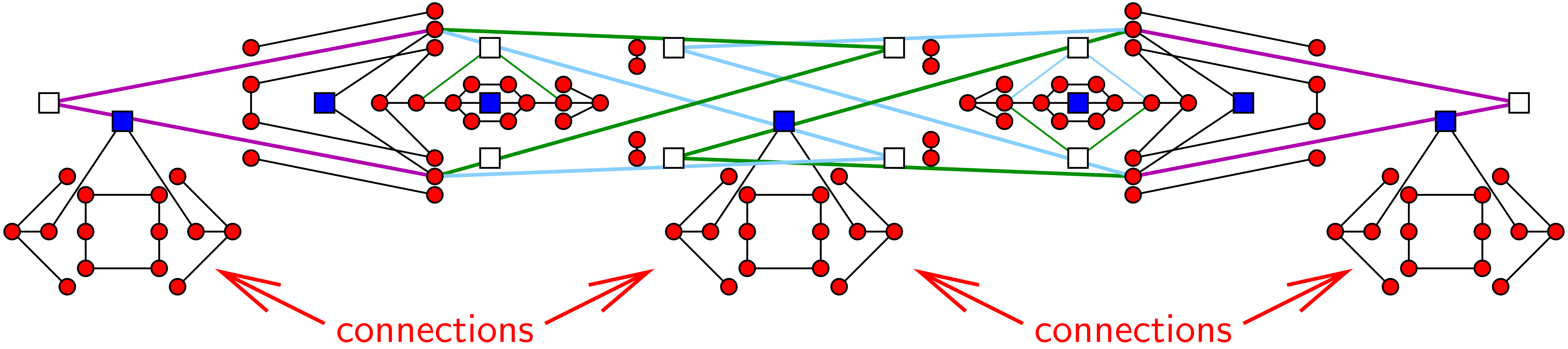
ガジェット：節



ガジェット：節



ガジェット：節



- φ **充足可能** $\Rightarrow$ Mobile **頂点を動かせば** OK

動かす頂点数 $=$ **交差の数** $/2$

まとめると...

- φ 充足可能 $\Rightarrow$ Mobile 頂点を動かせば OK

  動かす頂点数 $=$ 交差の数 $/2$

- φ 充足不可能 $\Rightarrow$ Mobile 頂点を動かすだけでは足りない

  $\therefore$ 頂点を 1 つ動かすだけでは解消できない交差が存在

  動かす頂点数 $\geq$ 交差の数 $/2+1$

まとめると...

- φ 充足可能 $\Rightarrow$ Mobile 頂点を動かせば OK

  動かす頂点数 $=$ 交差の数 $/2$

- φ 充足不可能 $\Rightarrow$ Mobile 頂点を動かすだけでは足りない

  $\therefore$ 頂点を 1 つ動かすだけでは解消できない交差が存在

  動かす頂点数 $\geq$ 交差の数 $/2+1$

これで帰着が完了

目次

- 問題の定義 (より形式的に)
- 閉路に対する下界 [Pach & Tardos]
- 木に対する下界
- NP 困難性の証明
- 近似不可能性の証明

近似不可能性の結果

定理

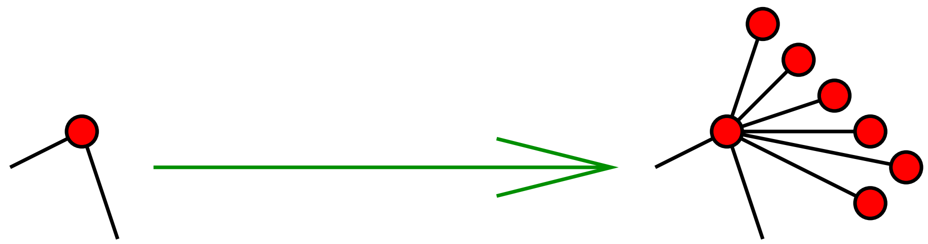
- 平面的グラフ G とその描画 δ に対して $1+\mathrm{shift}(G,\delta)$ を $n^{1-\varepsilon}$ 倍以内の近似精度で計算することは NP 困難
  ($\forall\ \varepsilon \in (0,1]$ 定数)

補足

- $\mathrm{shift}(G,\delta)$ は 0 になりうるので，
  1 を足して近似の意味が明確になるようにしている

証明のアイディア

- NP 困難性の証明と同じ帰着
- Immobile 頂点を Immobile 星に置換



- Immobile 星がギャップを生み，近似不可能性が得られる

目次

- 問題の定義 (より形式的に)
- 閉路に対する下界 [Pach & Tardos]
- 木に対する下界
- NP 困難性の証明
- 近似不可能性の証明

数学的な結果：歴史

	下界	上界
閉路	$\sqrt{n}$ $\Omega(n^{2/3})$	$O((n \log n)^{2/3})$
木	$\sqrt{n/2}$	$n/3+4$ $3\sqrt{n}-3$
外平面的	$\sqrt{n-1}/3$	$2\sqrt{n-1}+1$
一般	3 $\Omega(\sqrt{\log n / \log\log n})$ $\sqrt[4]{n/9}$	$\sqrt{n-2}+1$

Pach & Tardos (GD'01, DCG'02)
Spillner & Wolff (SOFSEM'08)
Goaoc, Kratochvíl, Okamoto, Shin, Wolff (GD'07)
Cibulka (TGGT'08)
Bose, Dujmovic, Hurtado, Langerman, Morin, Wood (TGGT'08)

未解決問題

(1) MaxFixedVertices **の近似不可能性？**

(2) MaxFixedVertices **と** MinShiftedVertices **は閉路に対しても難しい？**

(3) **問題はそもそも** $\mathcal{NP}$ **に属するか？**

(4) **パラメータ化計算量は？**

(5) **ギャップを埋めるには？**

(6) Erdős-Szekeres **を使うしかないのか？**

[おわり]