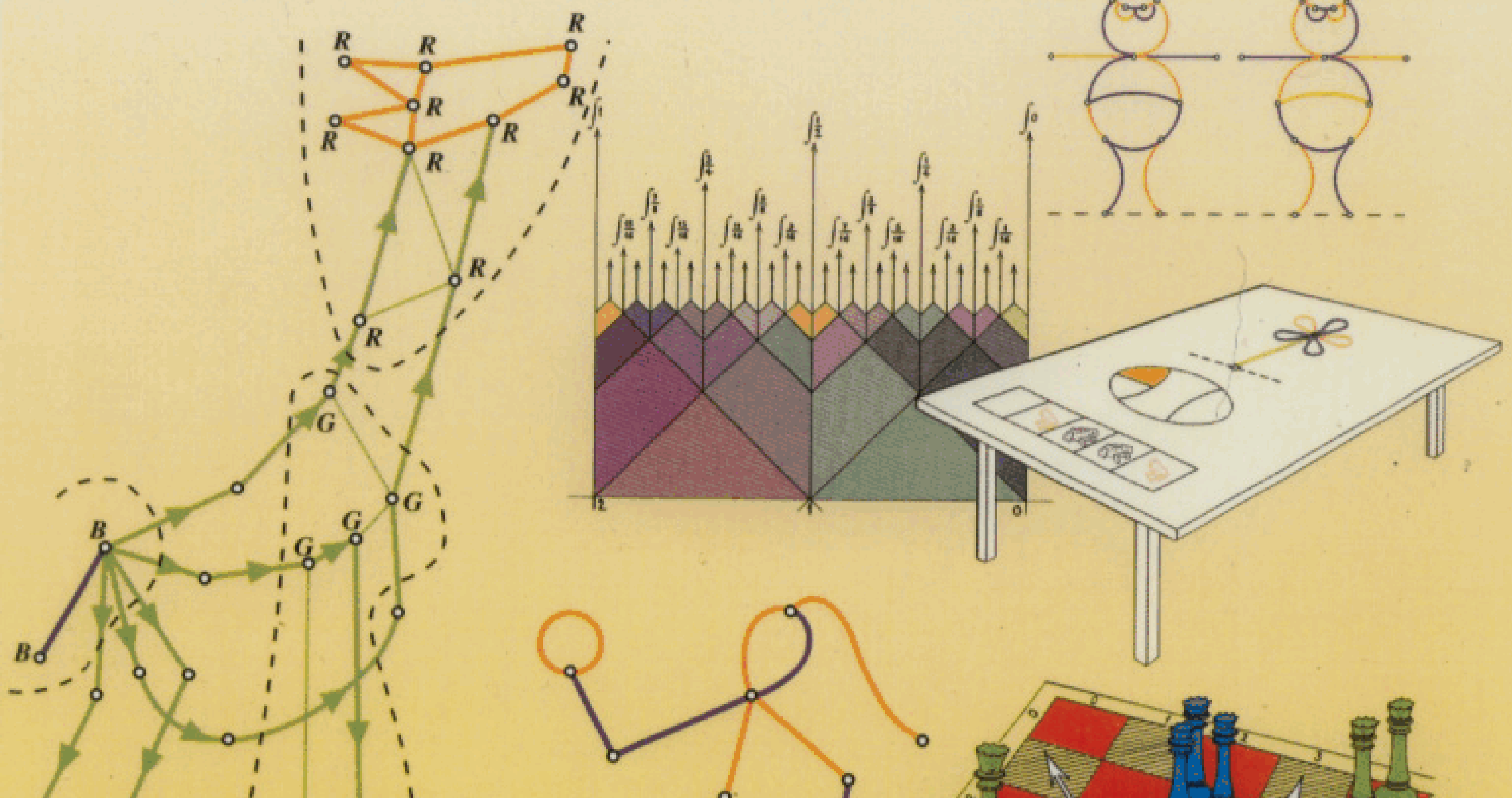
VOLUME 1 SECOND EDITION

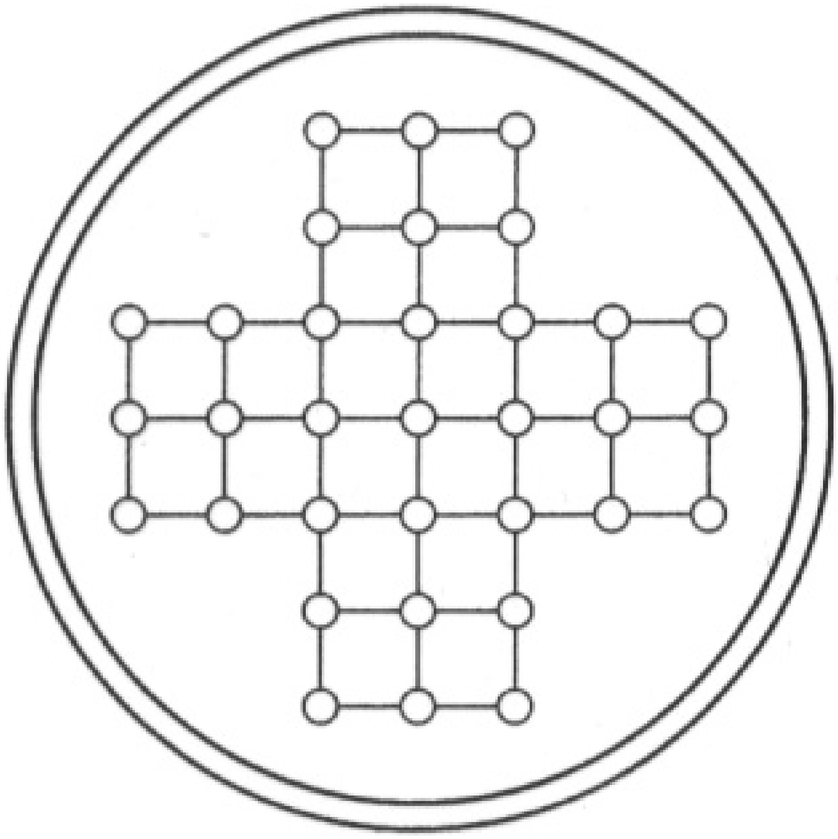
WINNING WAYS

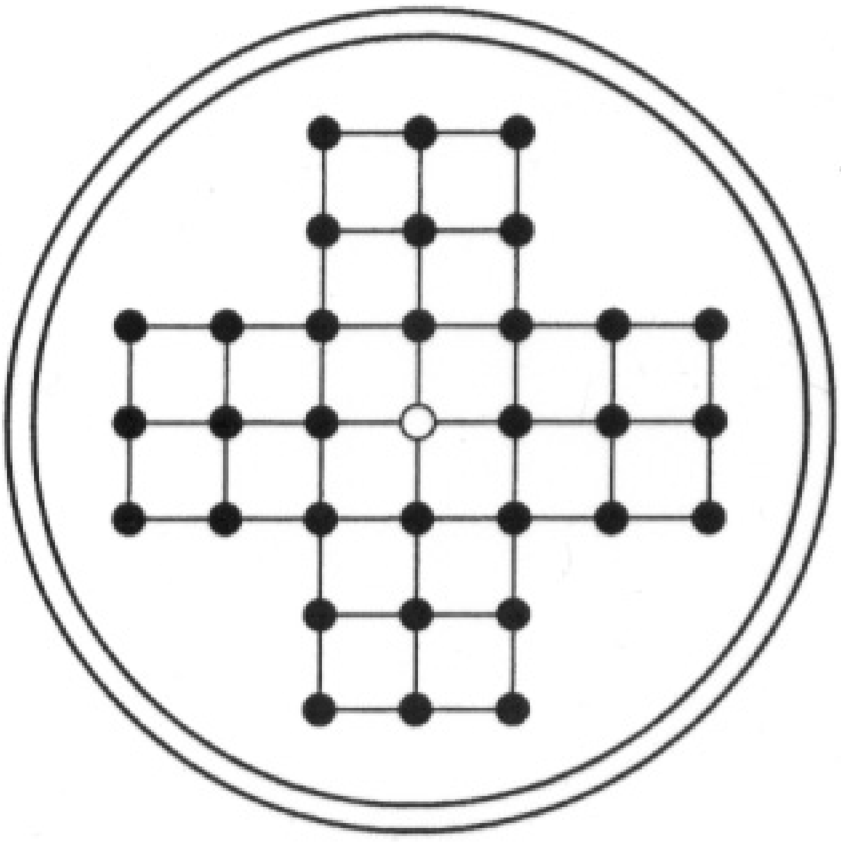
FOR YOUR MATHEMATICAL PLAYS

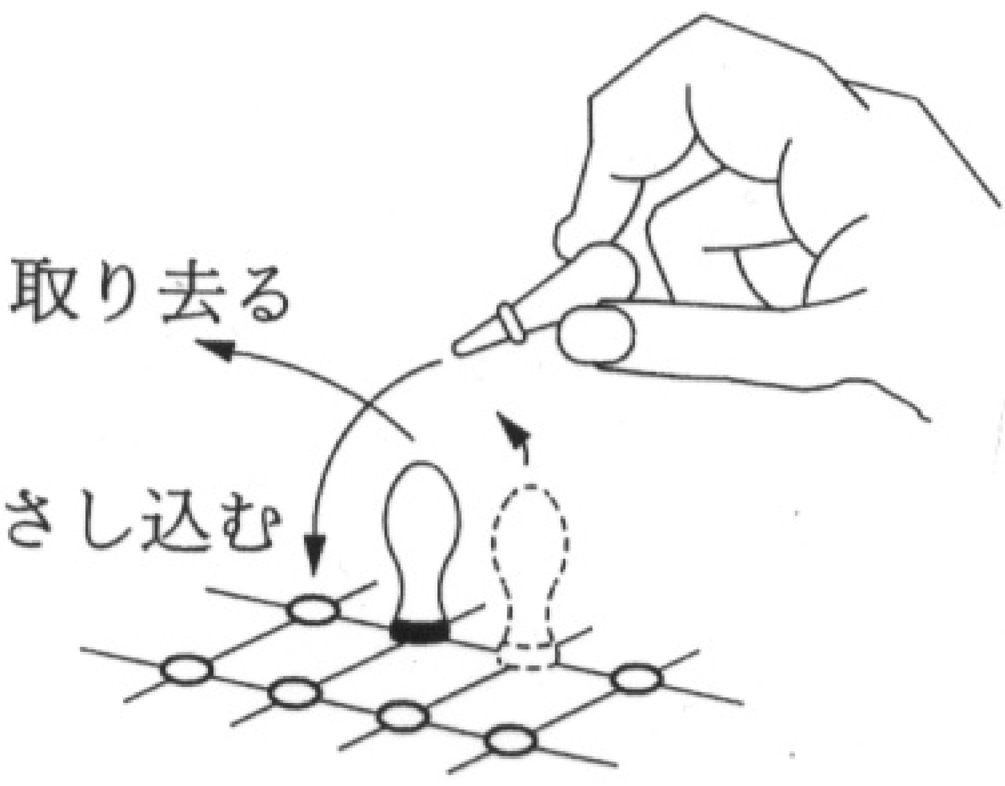


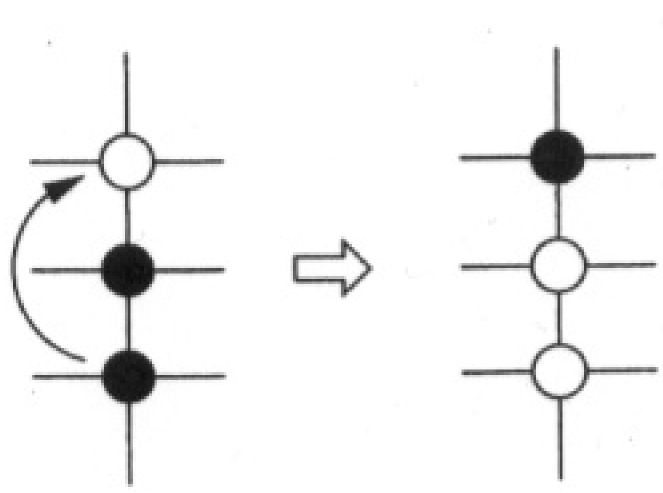
ELWYN R. BERLEKAMP • JOHN H. CONWAY • RICHARD K. GUY

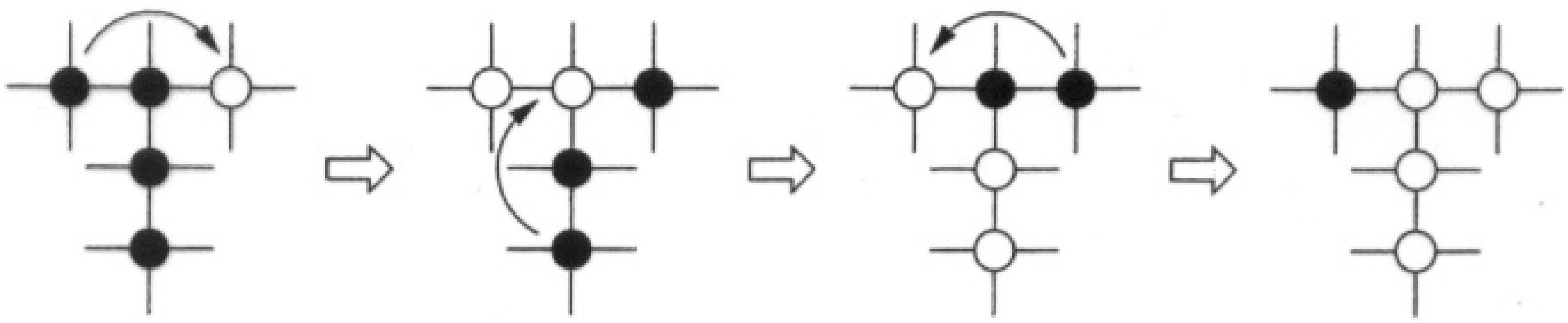
ペグ・ソリテア

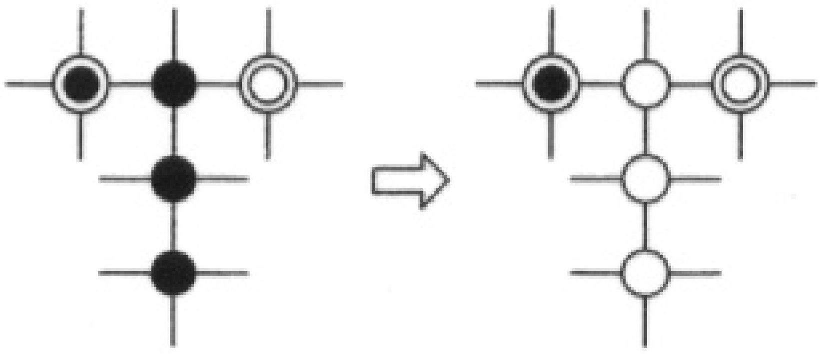


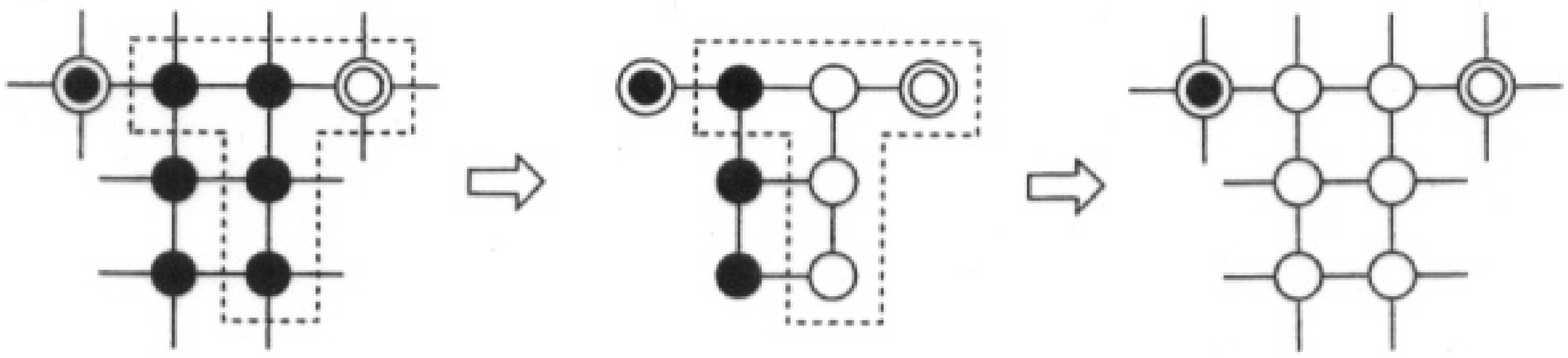


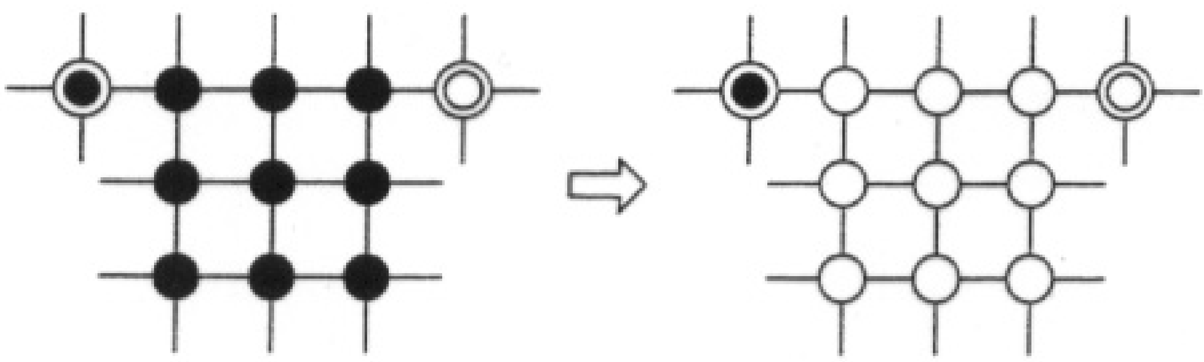


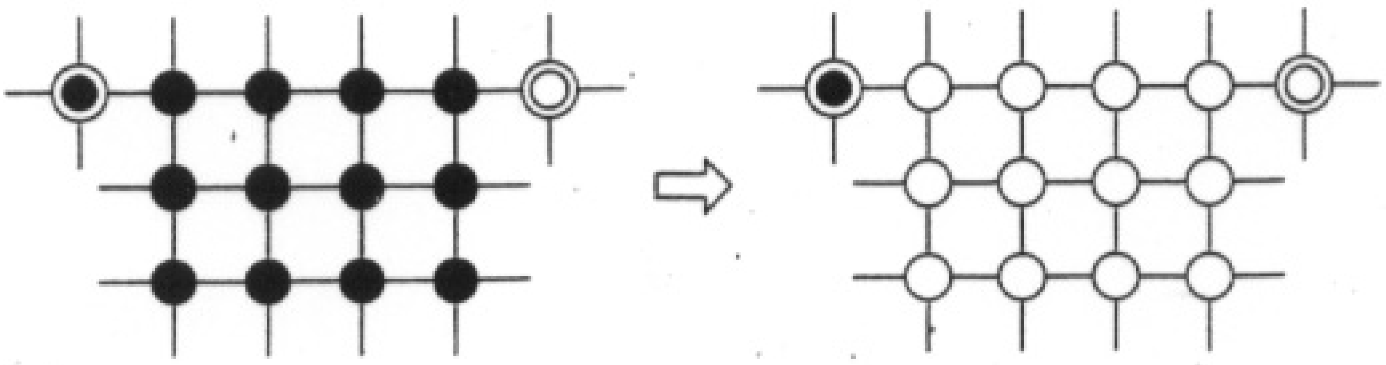


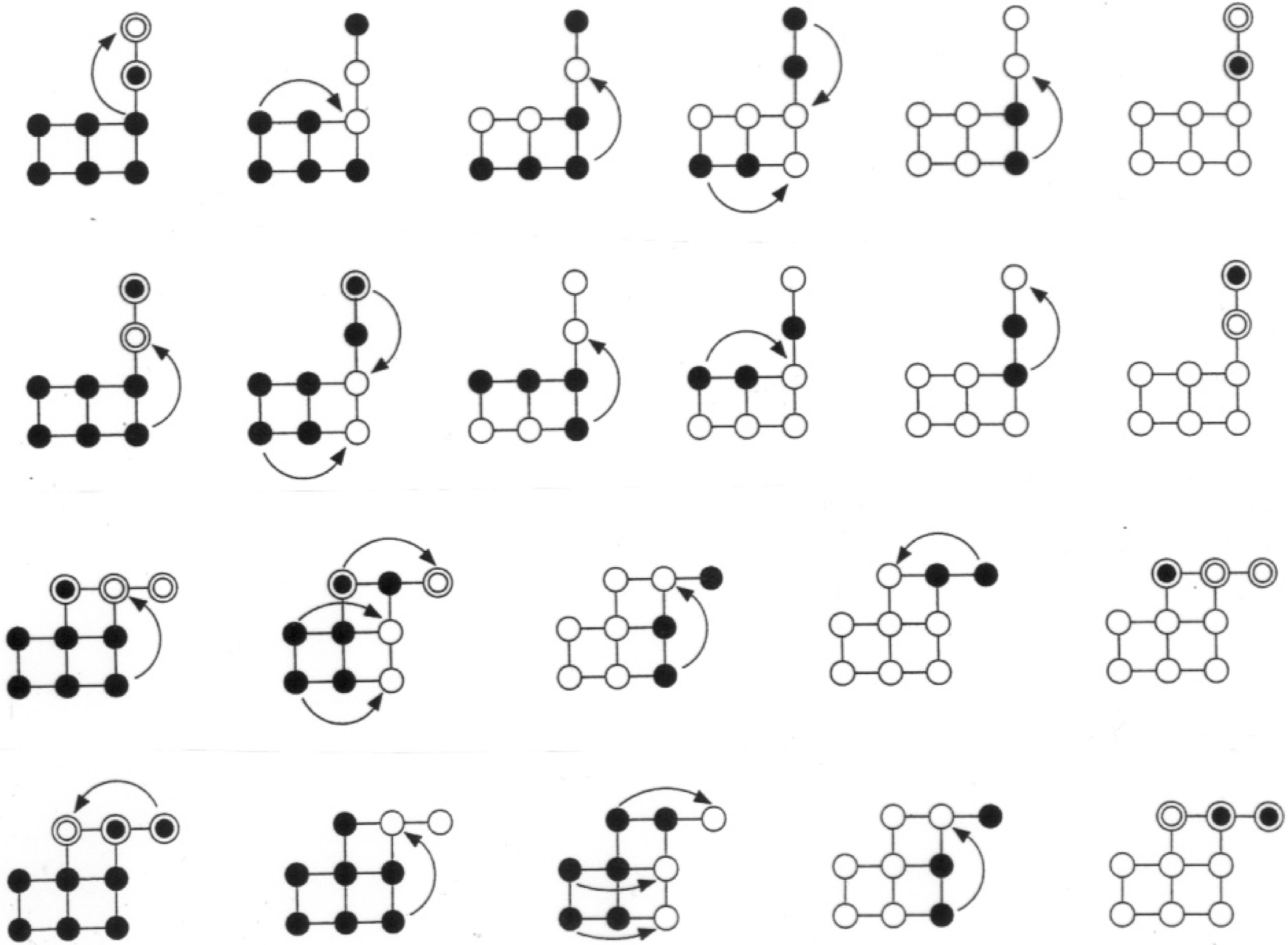


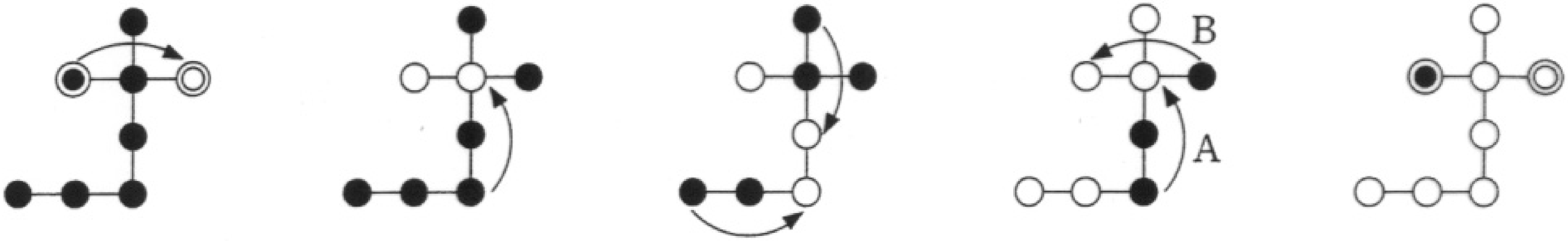


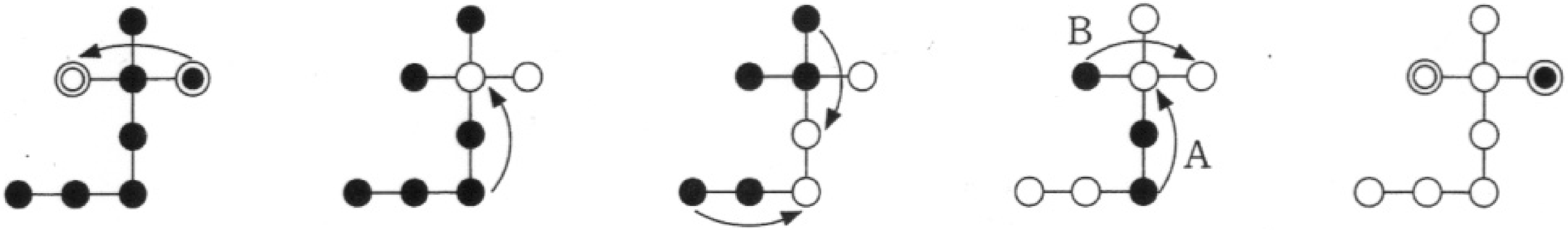


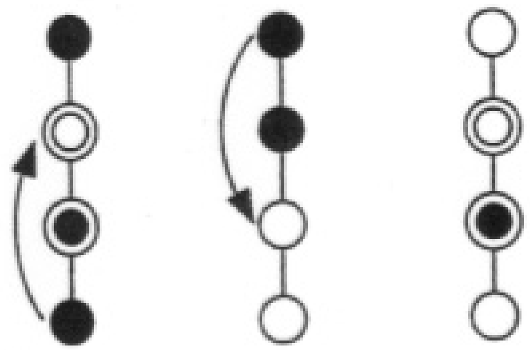


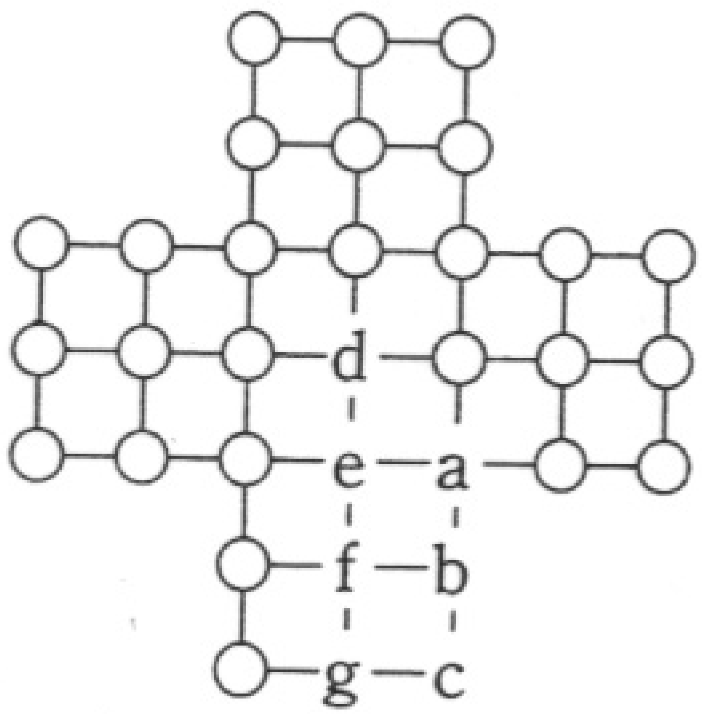


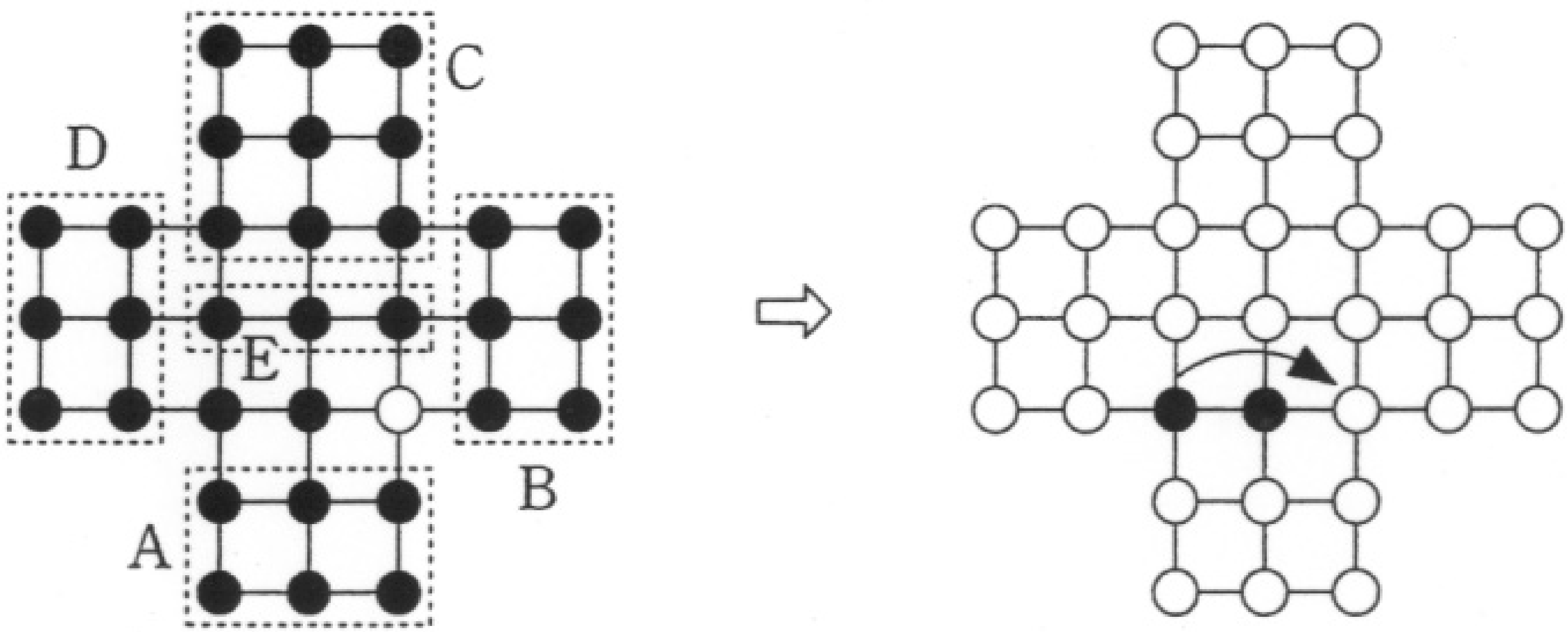


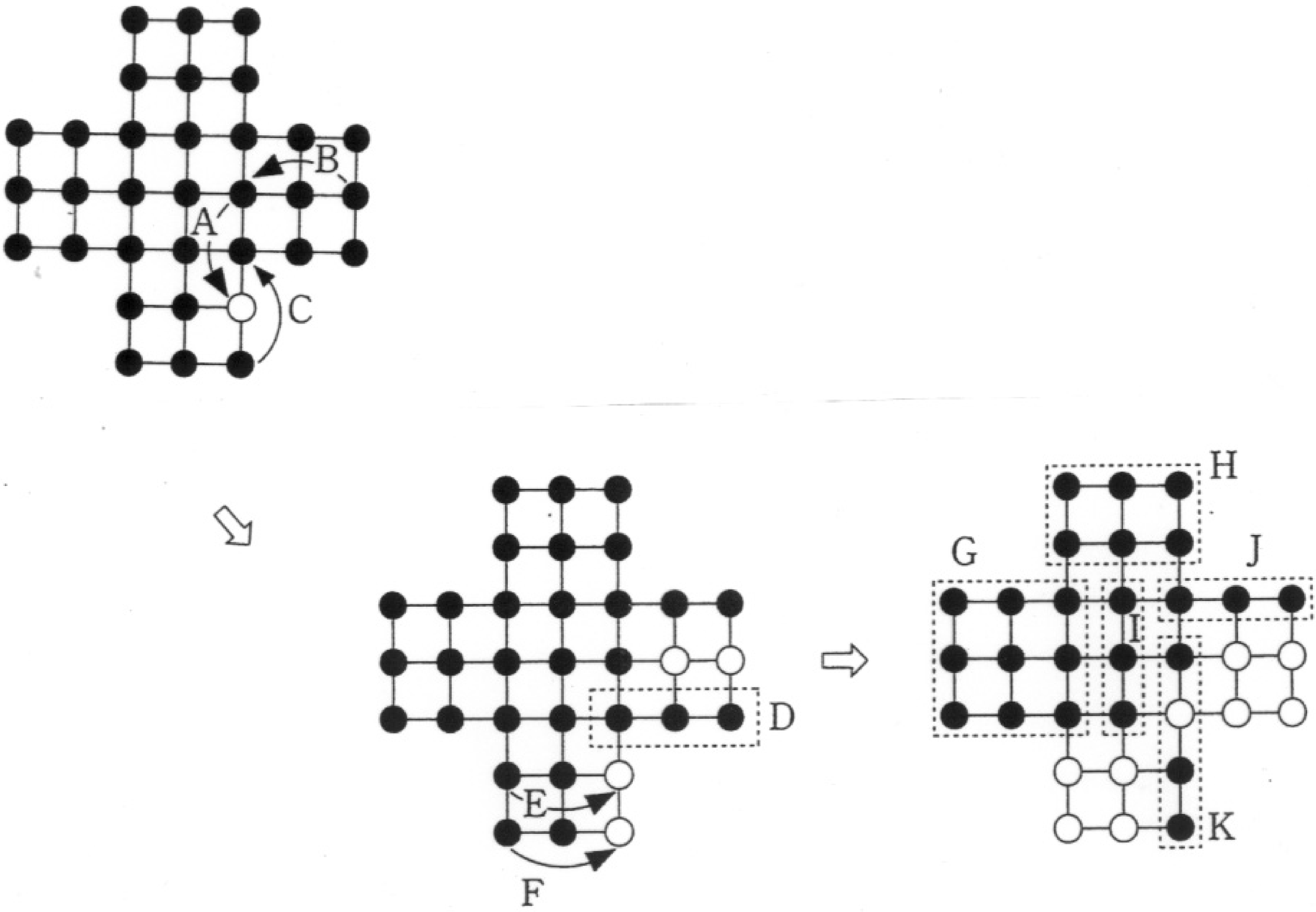

B
A


B
A




d
e
a
f
b
g
c


C
D
E
B
A


B
A
C
D
E
F
H
G
J
I
K

		C	A	B		
		B	C	A		
B	C	A	B	C	A	B
A	B	C	A	B	C	A
C	A	B	C	A	B	C
		A	B	C		
		C	A	B		

$$N_{A+B}=N_A+N_B$$

$$N_{A+C}=N_A+N_C$$

$$N_{B+C}=N_B+N_C$$

最後　$N_A=1,\quad N_B=N_C=0$

$N_{A+B}=$奇数,　$N_{A+C}=$奇数,　$N_{B+C}=$偶数

$N_{A+B}=$奇数,　$N_{B+C}=$奇数,　$N_{A+C}=$偶数

$N_{A+C}=$奇数,　$N_{B+C}=$奇数,　$N_{A+B}=$偶数

		C	A	B		
		B	C	A		
B	C	A	B	C	A	B
A	B	C	A	B	C	A
C	A	B	C	A	B	C
		A	B	C		
		C	A	B		

		B	A	C		
		A	C	B		
B	A	C	B	A	C	B
A	C	B	A	C	B	A
C	B	A	C	B	A	C
		C	B	A		
		B	A	C		

		CB	AA	BC		
		BA	CC	AB		
BB	CA	AC	BB	CA	AC	BB
AA	BC	CB	AA	BC	CB	AA
CC	AB	BA	CC	AB	BA	CC
		AC	BB	CA		
		CB	AA	BC		

$$A=11, \quad B=01, \quad C=10$$

$$A+B=11+01=10=C$$

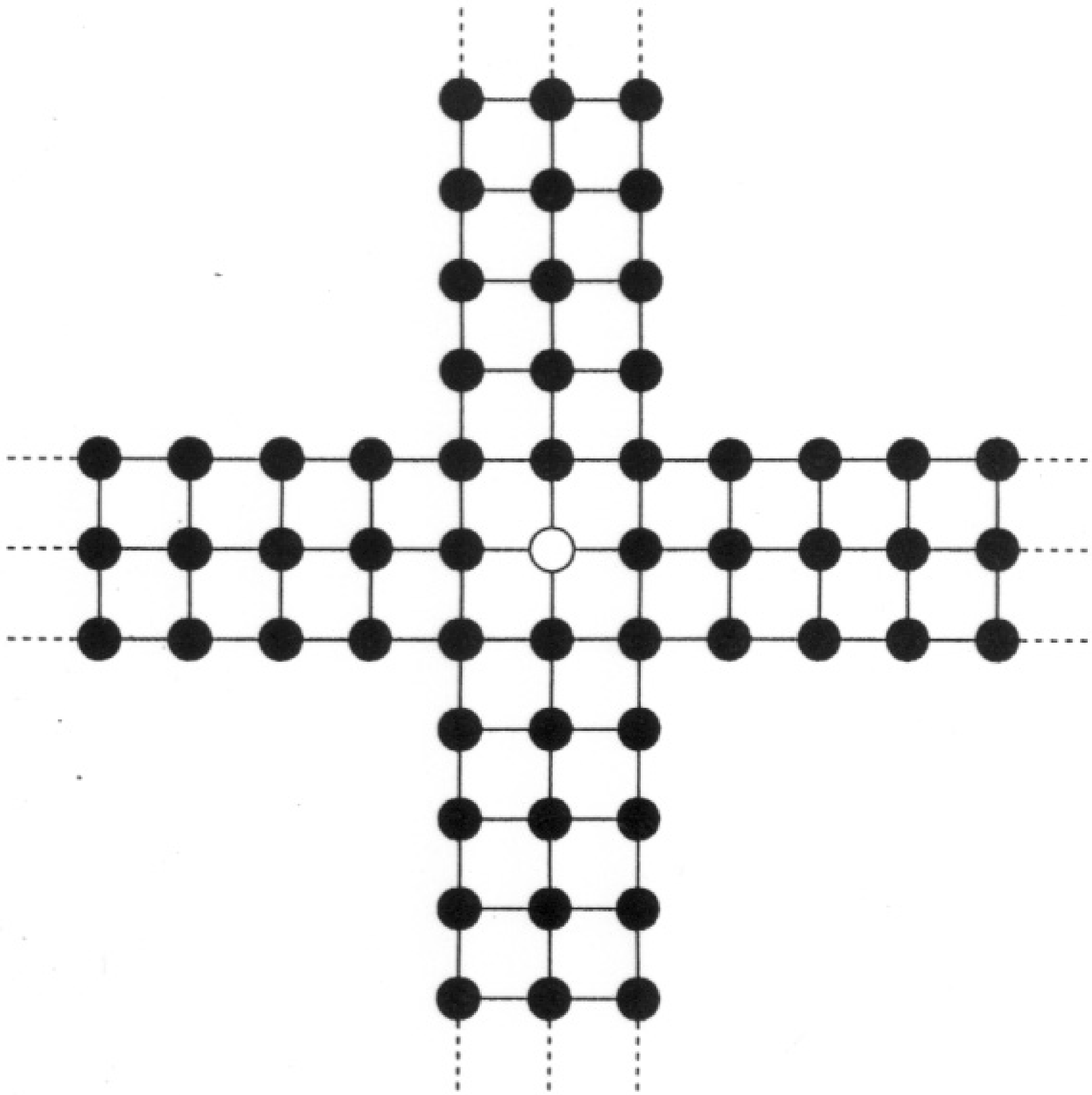
$$A+C=11+10=01=B$$

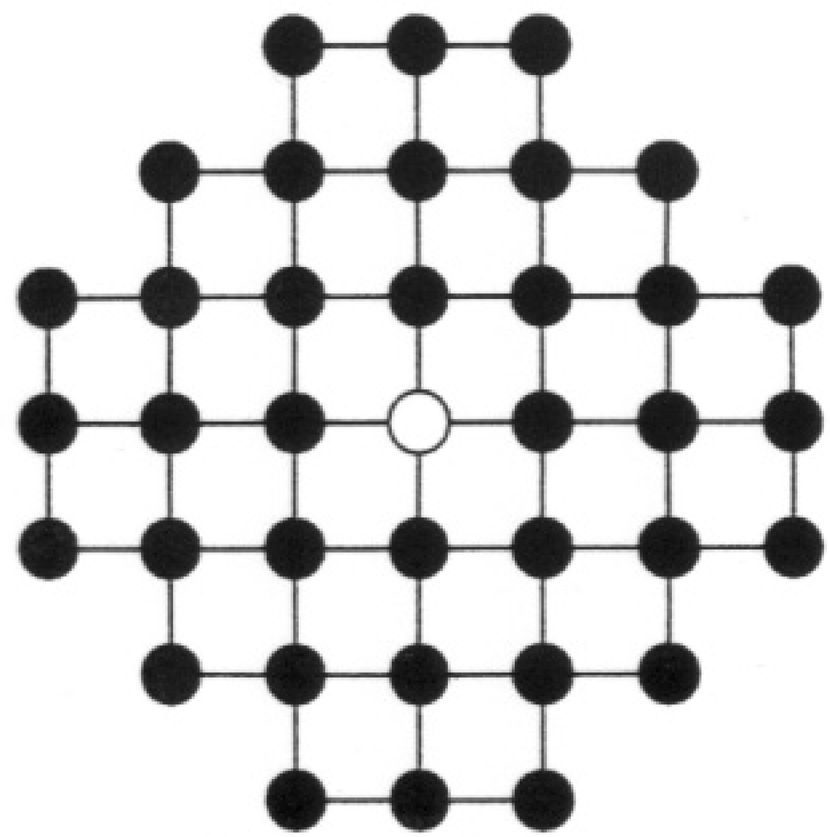
$$B+C=01+10=11=A$$

$$A+B+C=11+01+10=00$$

$$A+A=11+11=00$$

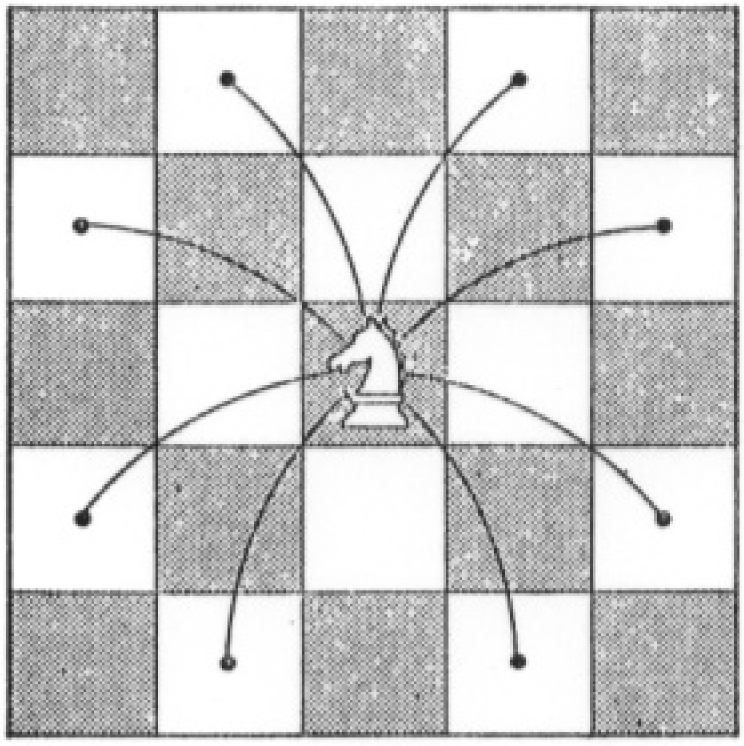
		1001	1111	0110		
		0111	1010	1101		
0101	1011	1110	0101	1011	1110	0101
1111	0110	1001	1111	0110	1001	1111
1010	1101	0111	1010	1101	0111	1010
		1110	0101	1011		
		1001	1111	0110		

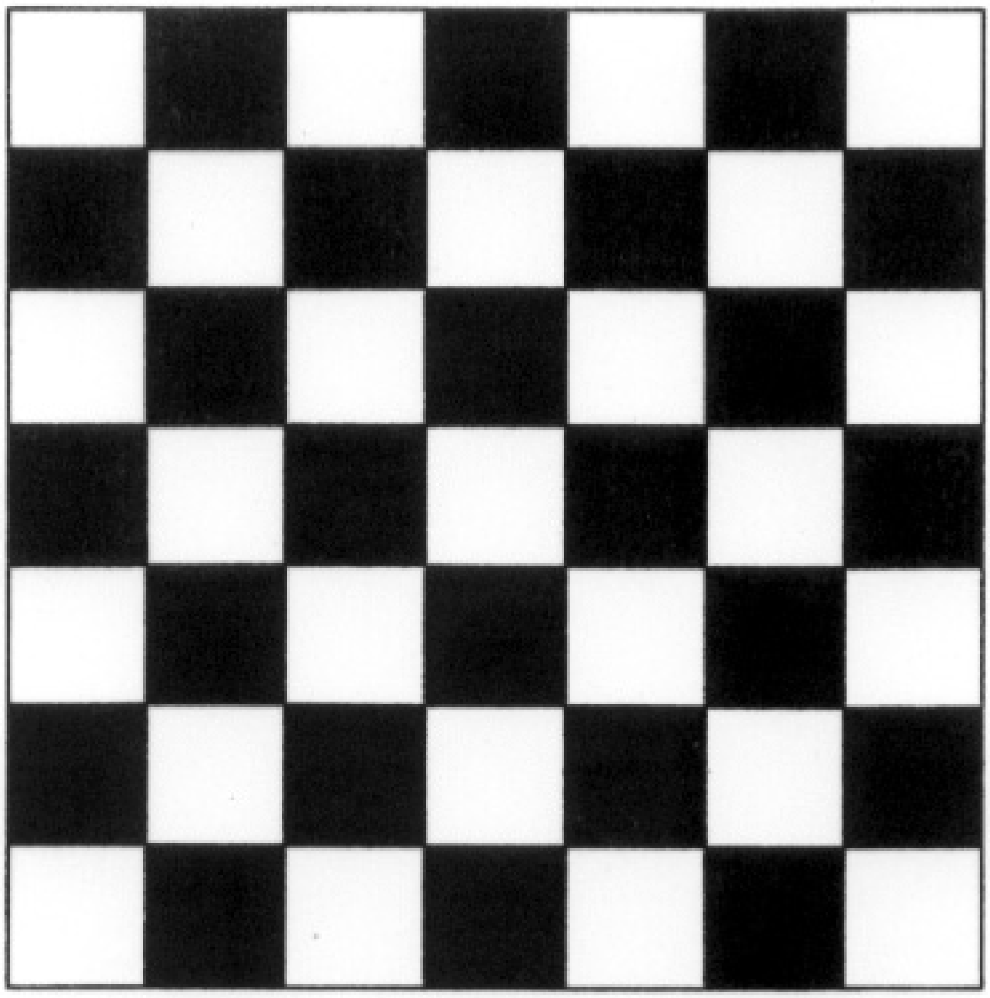




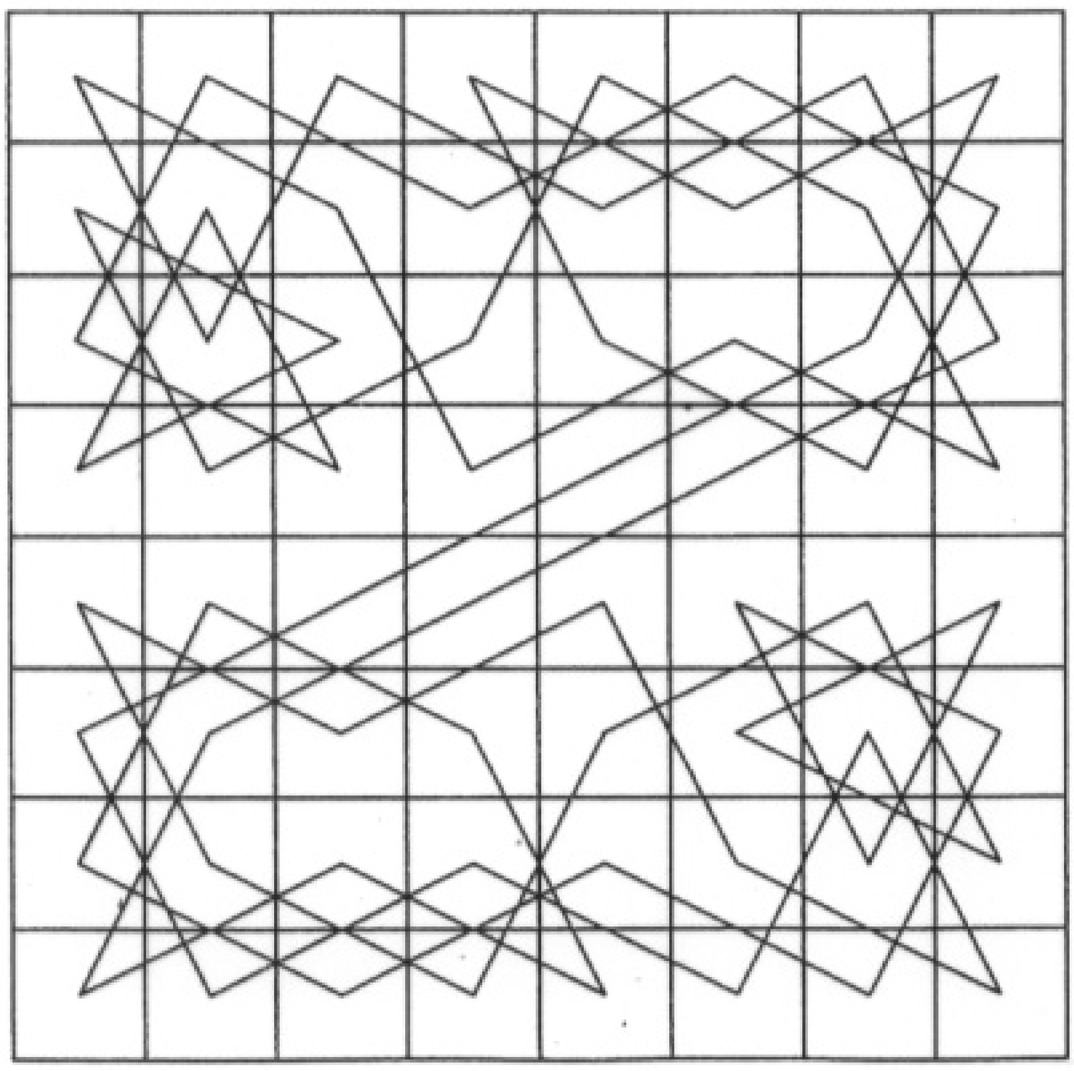
3 個とも偶数

ナイトの周遊

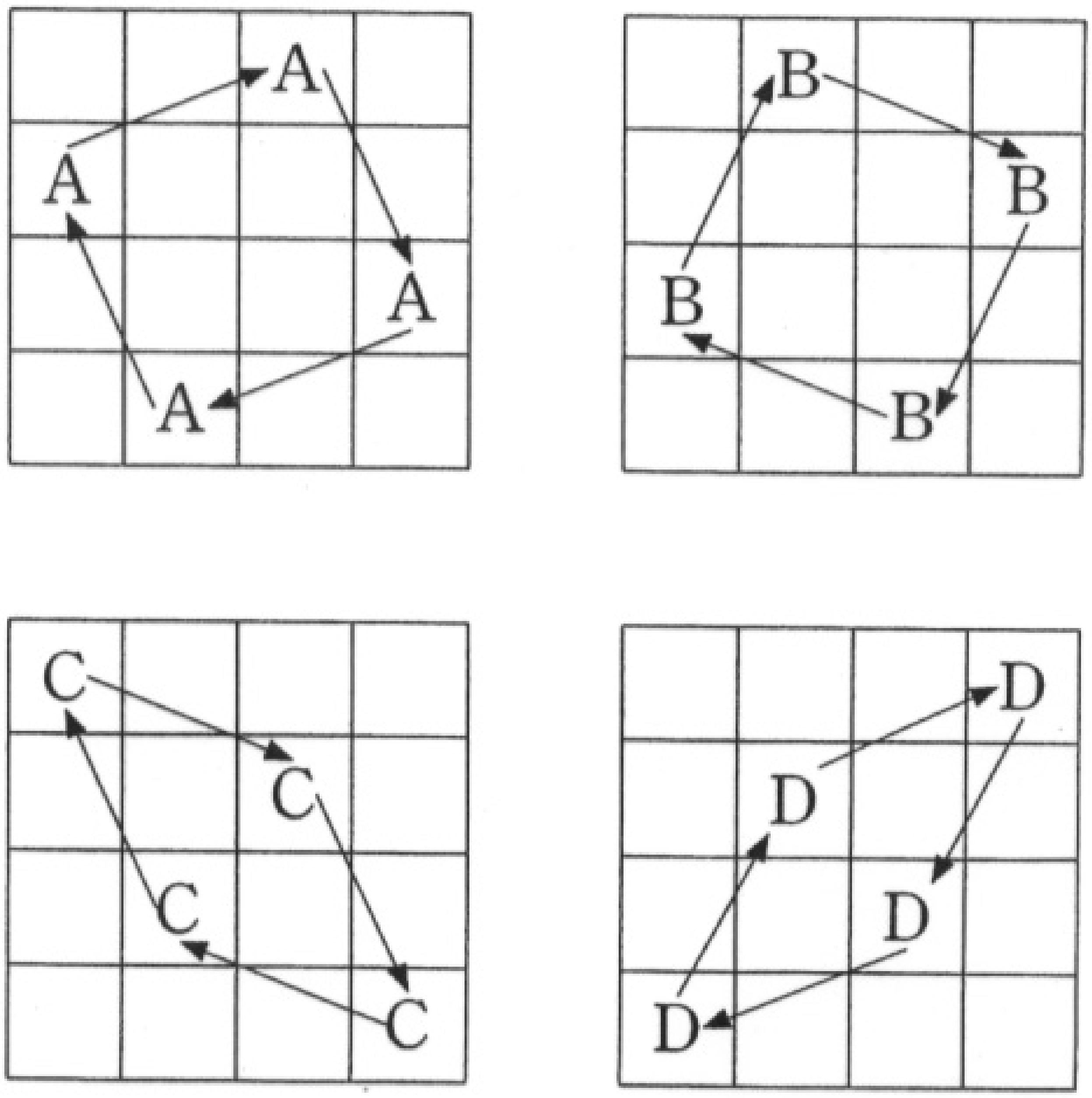


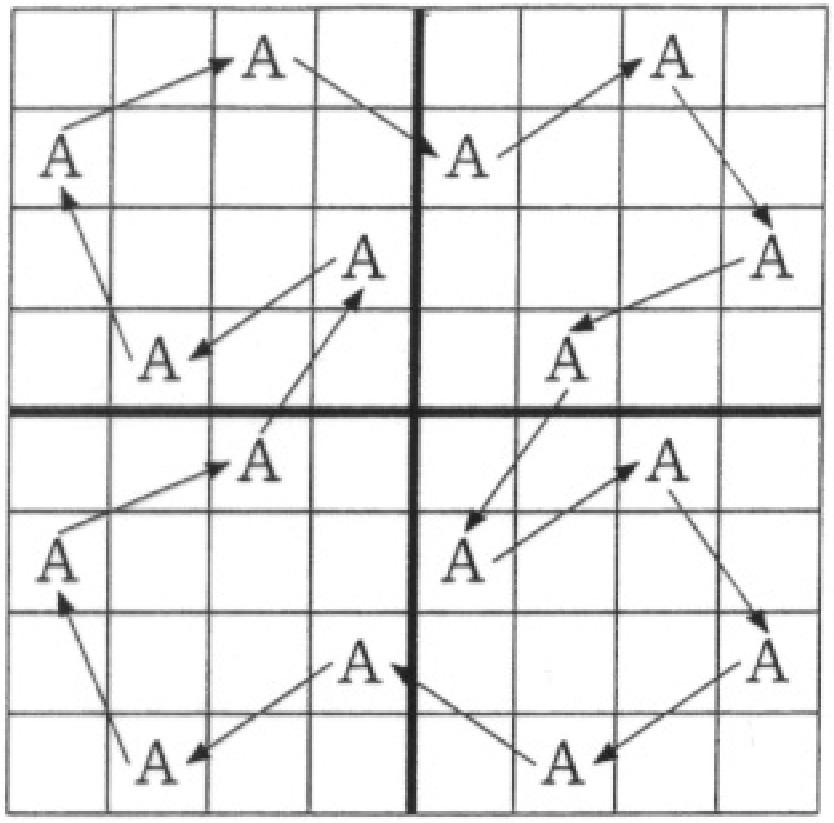


58	43	60	37	52	41	62	35
49	46	57	42	61	36	53	40
44	59	48	51	38	55	34	63
47	50	45	56	33	64	39	54
22	7	32	1	24	13	18	15
31	2	23	6	19	16	27	12
8	21	4	29	10	25	14	17
3	30	9	20	5	28	11	26

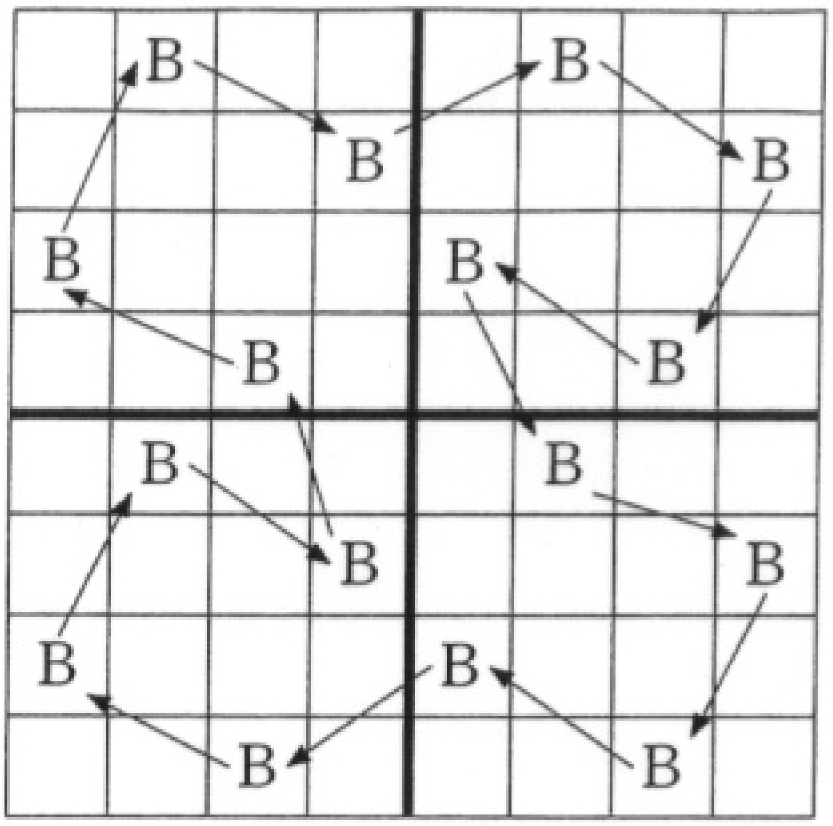


C	B	A	D
A	D	C	B
B	C	D	A
D	A	B	C

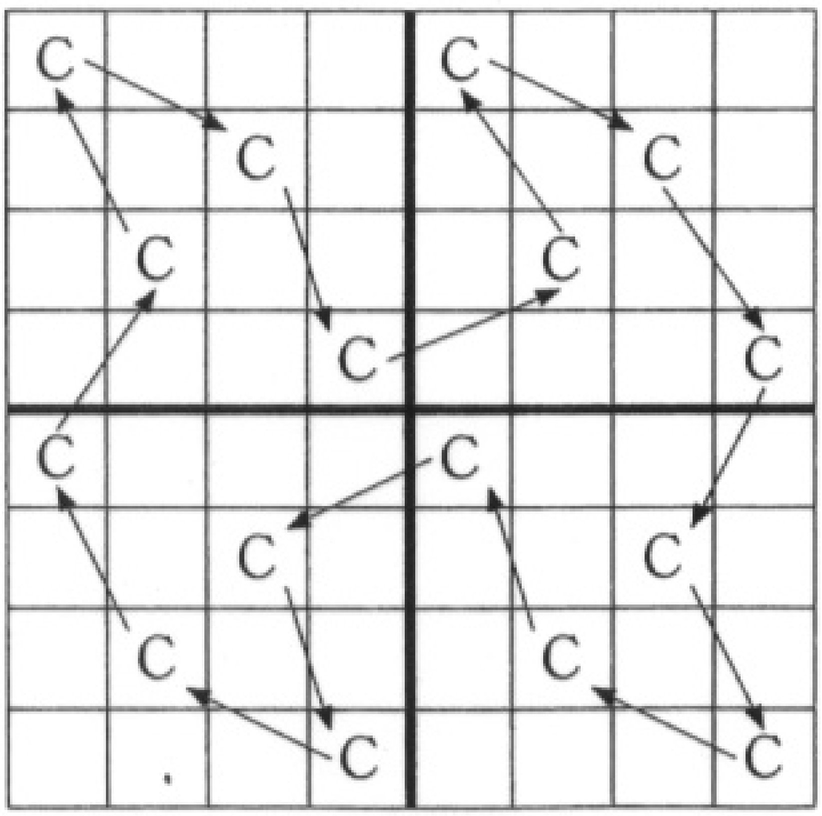




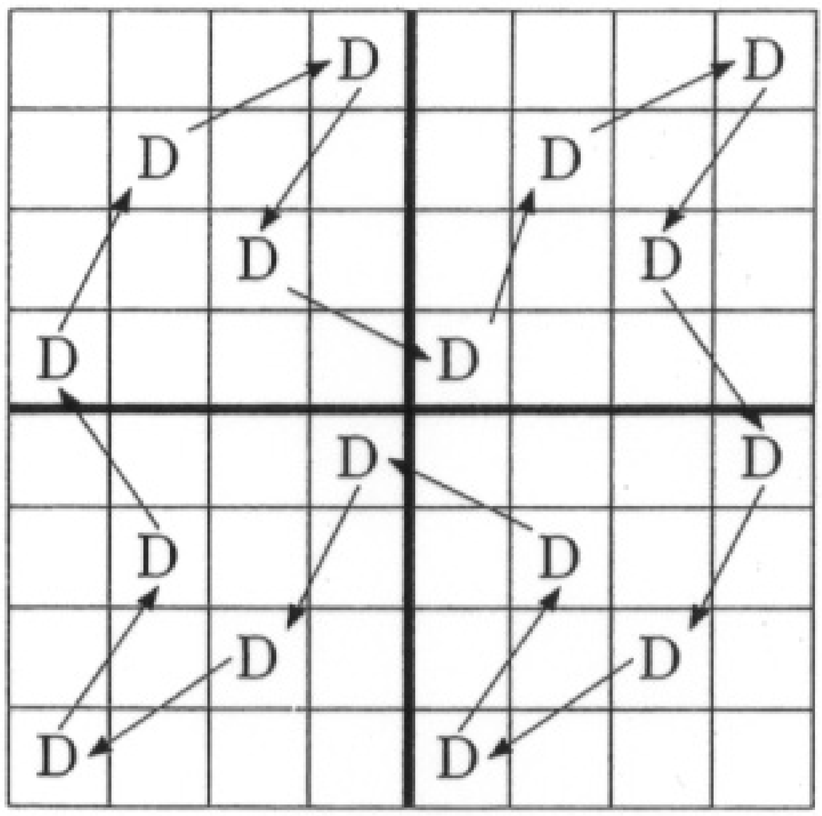
（a） Aの一巡りコース



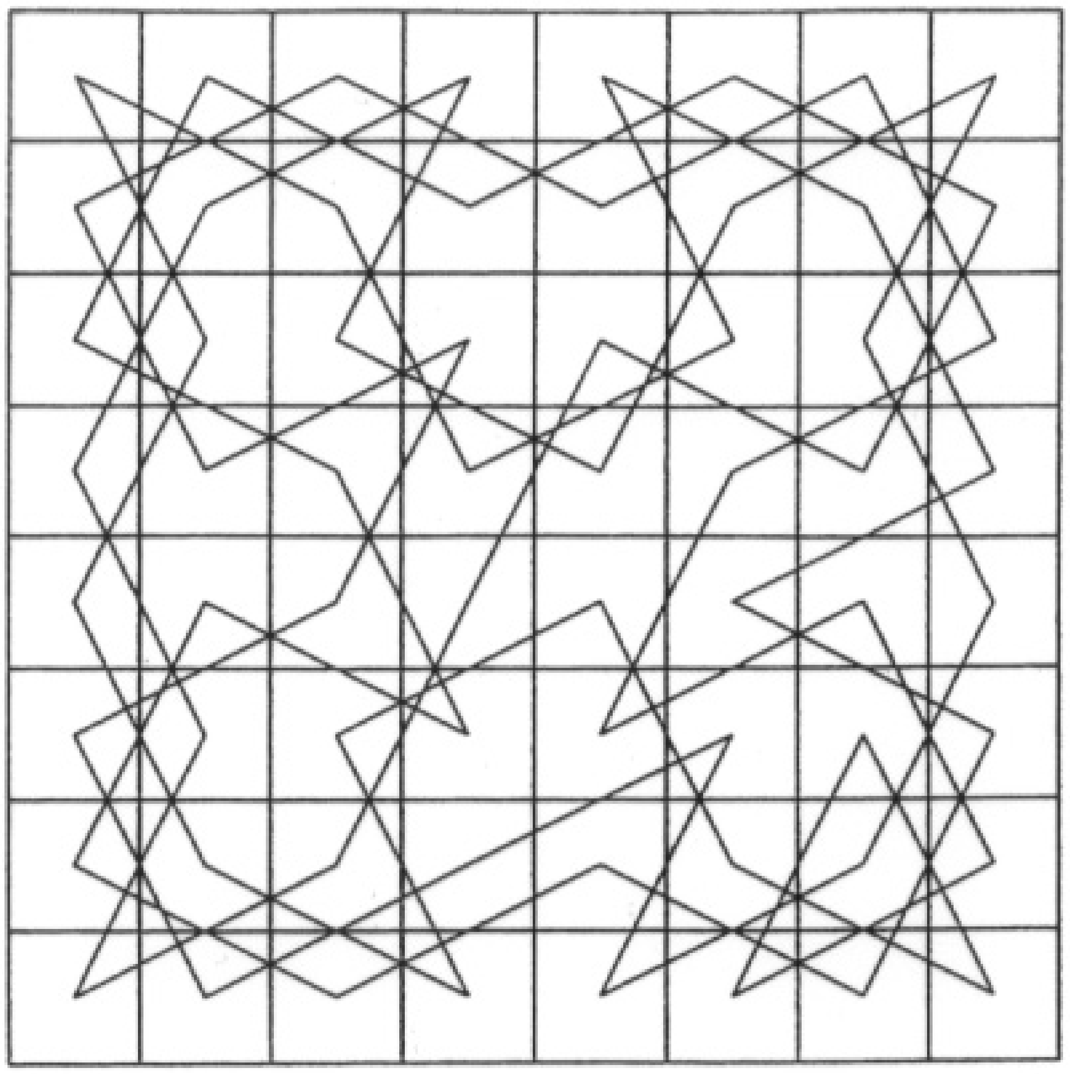
（b） Bの一巡りコース



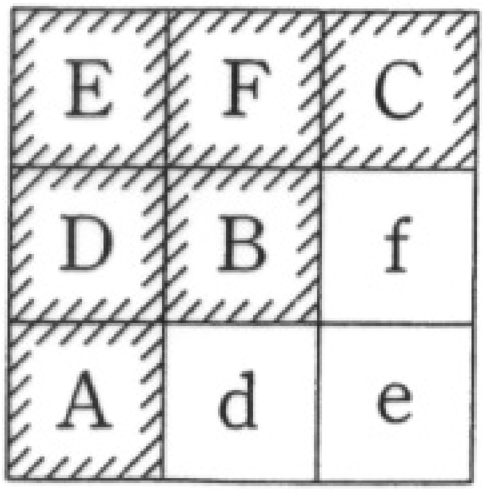
（c） Cの一巡りコース

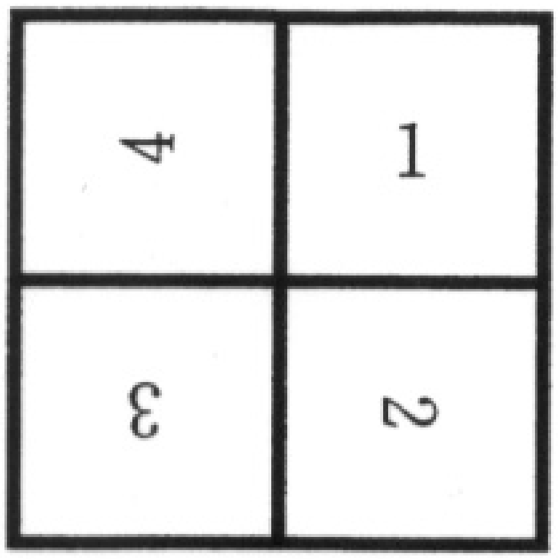


（d） Dの一巡りコース



34	51	32	15	38	53	18	3
31	14	35	52	17	2	39	54
50	33	16	29	56	37	4	19
13	30	49	36	1	20	55	40
48	63	28	9	44	57	22	5
27	12	45	64	21	8	41	58
62	47	10	25	60	43	6	23
11	26	61	46	7	24	59	42





C	f	e	E	F	C
F	B	d	D	B	f
E	D	A	A	d	e
e	d	A	A	D	E
f	B	D	d	B	F
C	F	E	e	f	C

A → B (+), D (++), d (−−),
E (+), e (−), F, f

B → A (−), E (+), e (−)

C → D, d

D → A (−−), C, e, f (−)

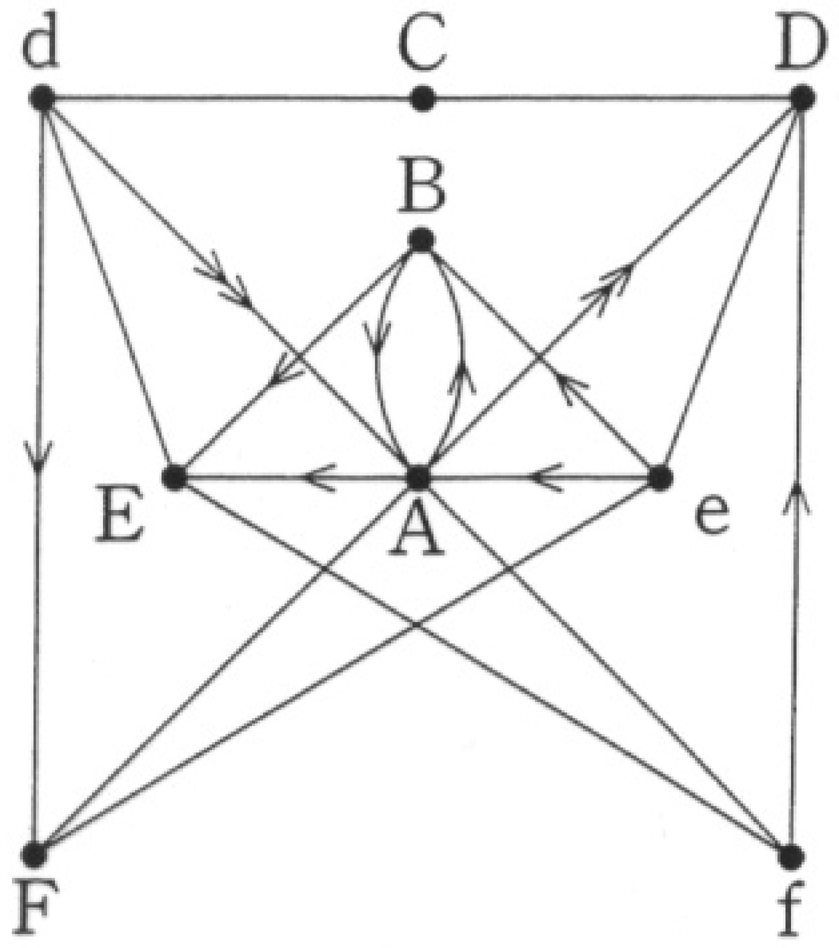
E → A (−), B (−), d, f

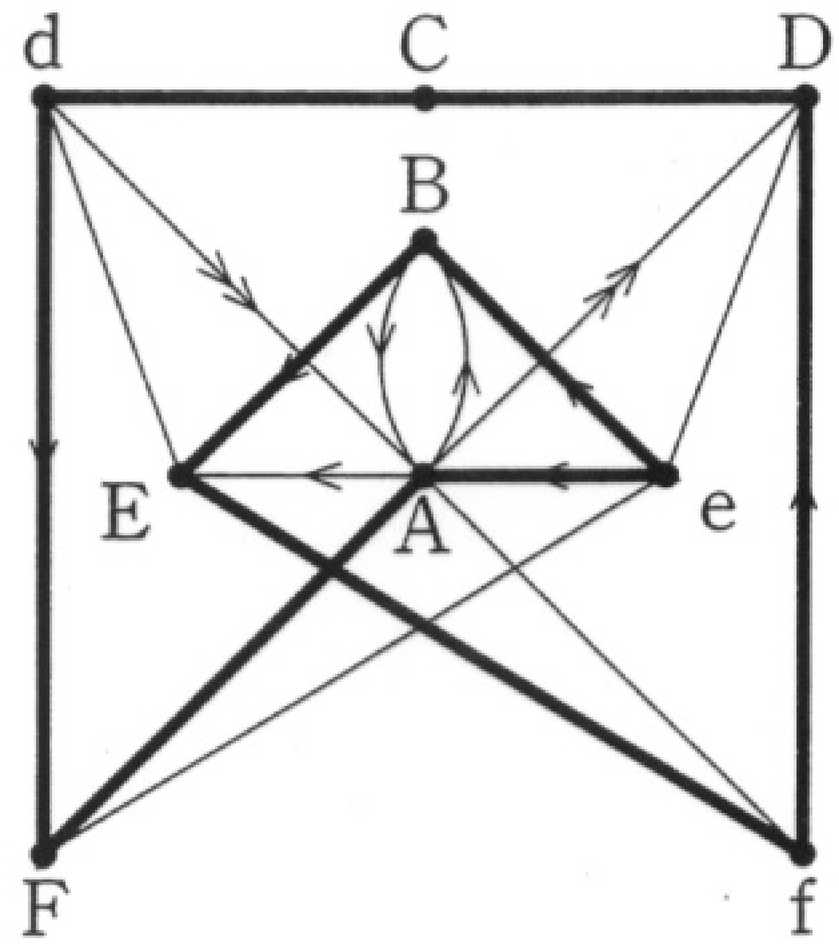
F → A, d (−), e

d → A (++), C, E, F (+)

e → A (+), B (+), D, F

f → A, D (+), E





A → e : −1

e → B : +1

B → E : +1

E → f : 0

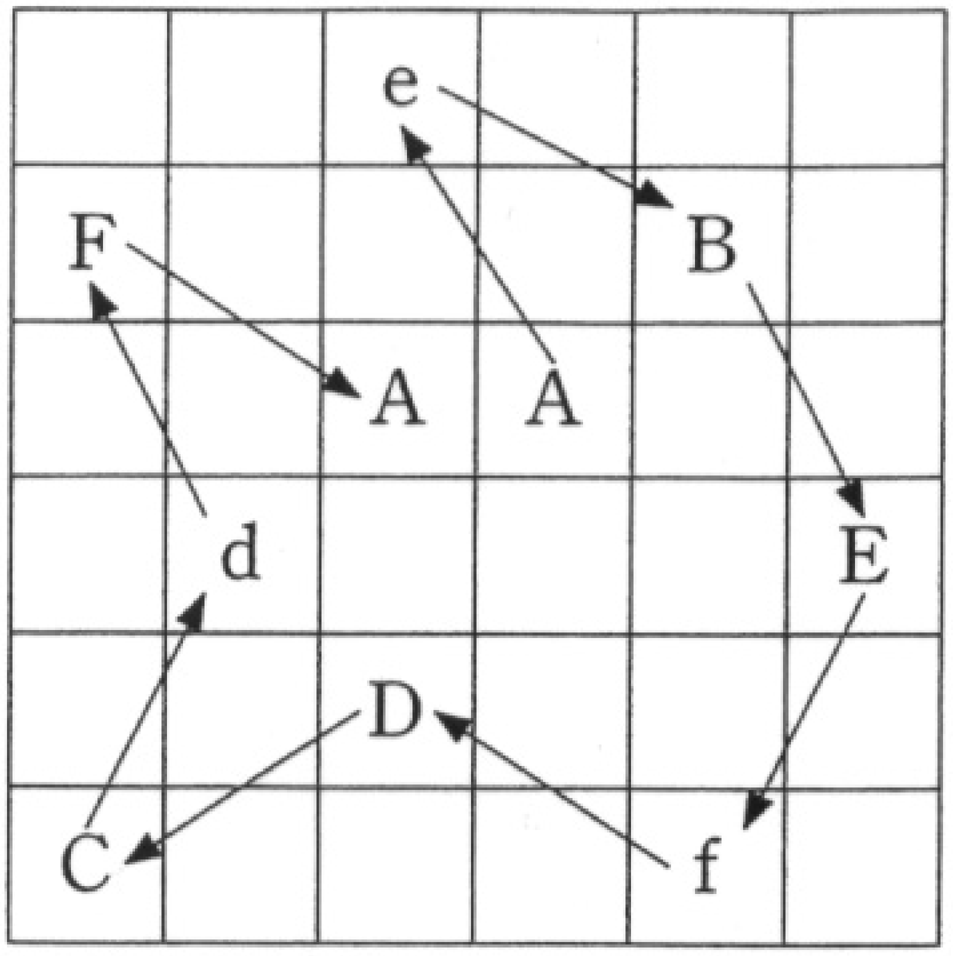
f → D : +1

D → C : 0

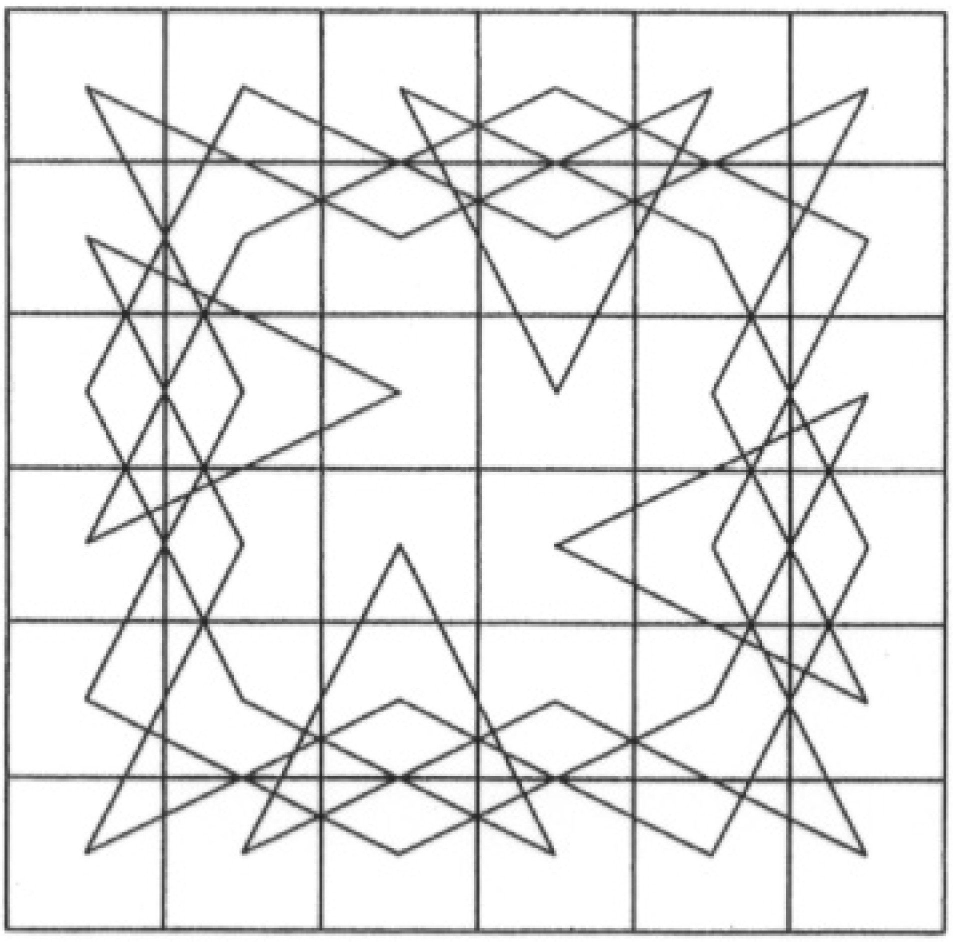
C → d : 0

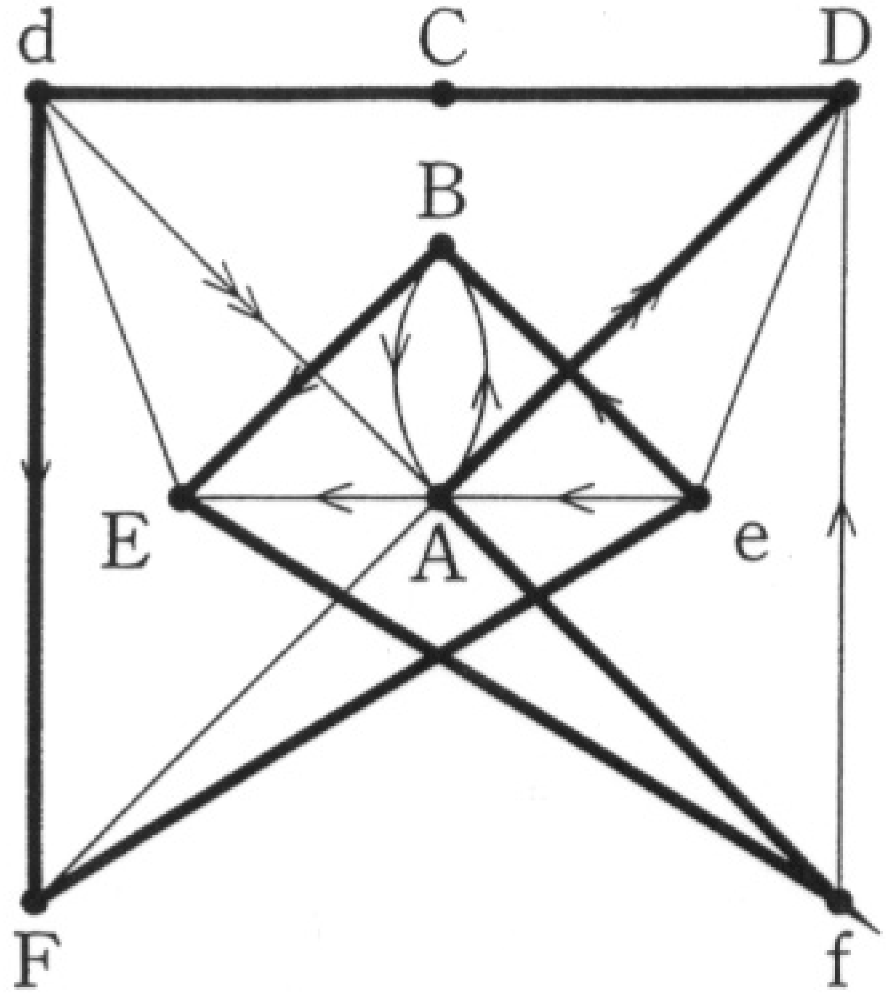
d → F : +1

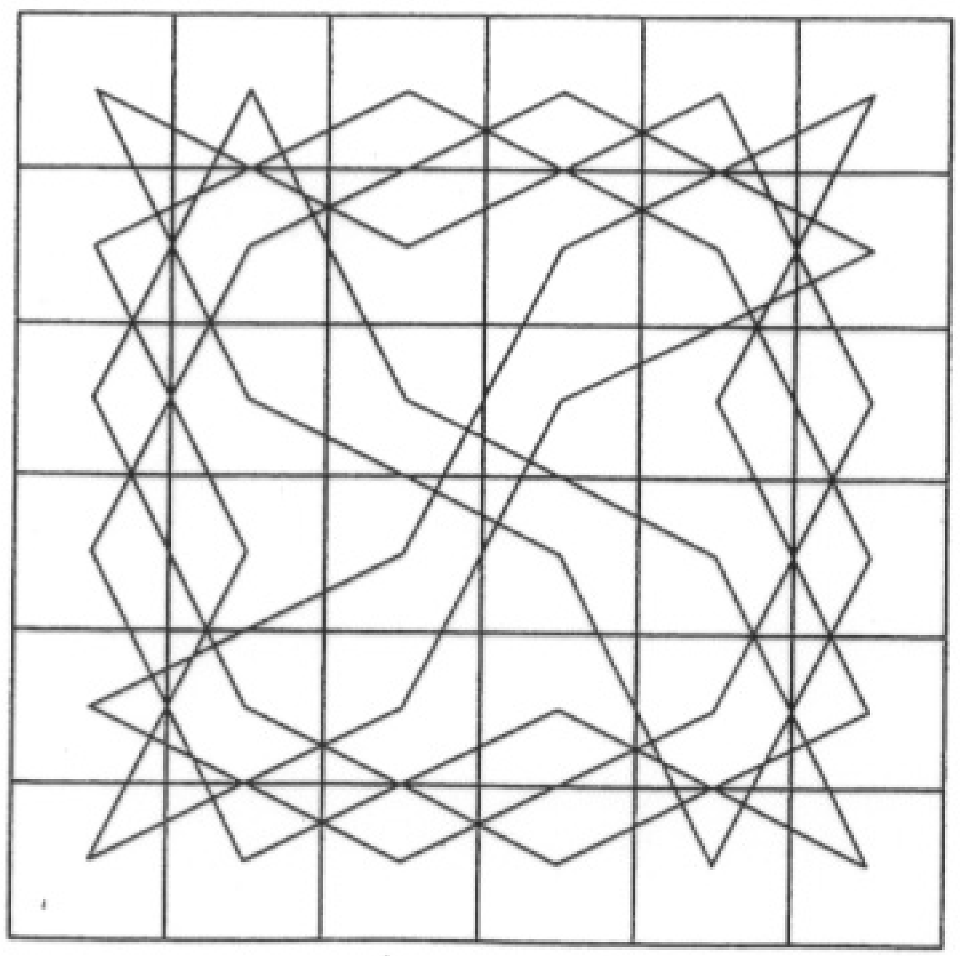
F → A : 0



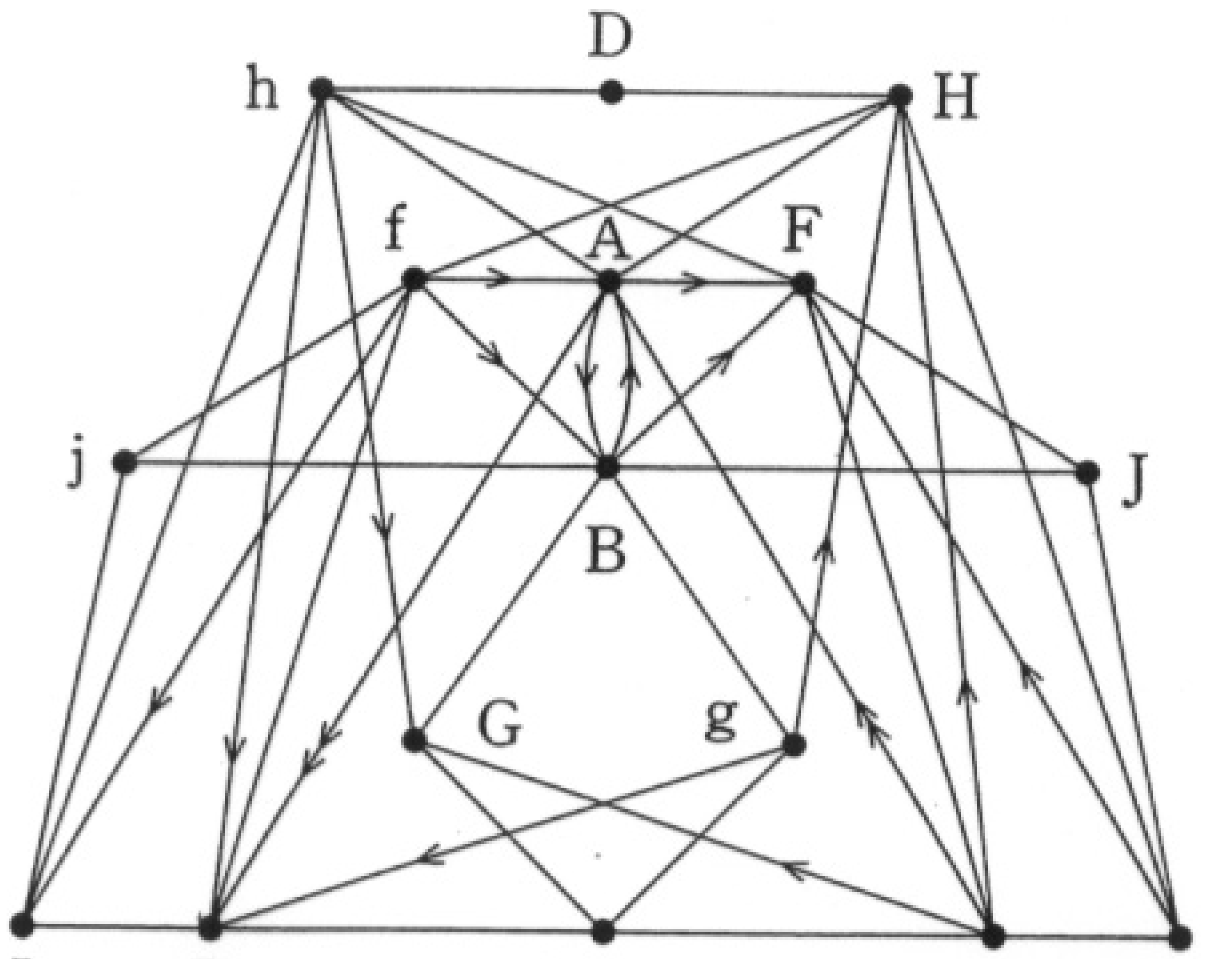
e
F
B
A
A
d
E
D
C
f

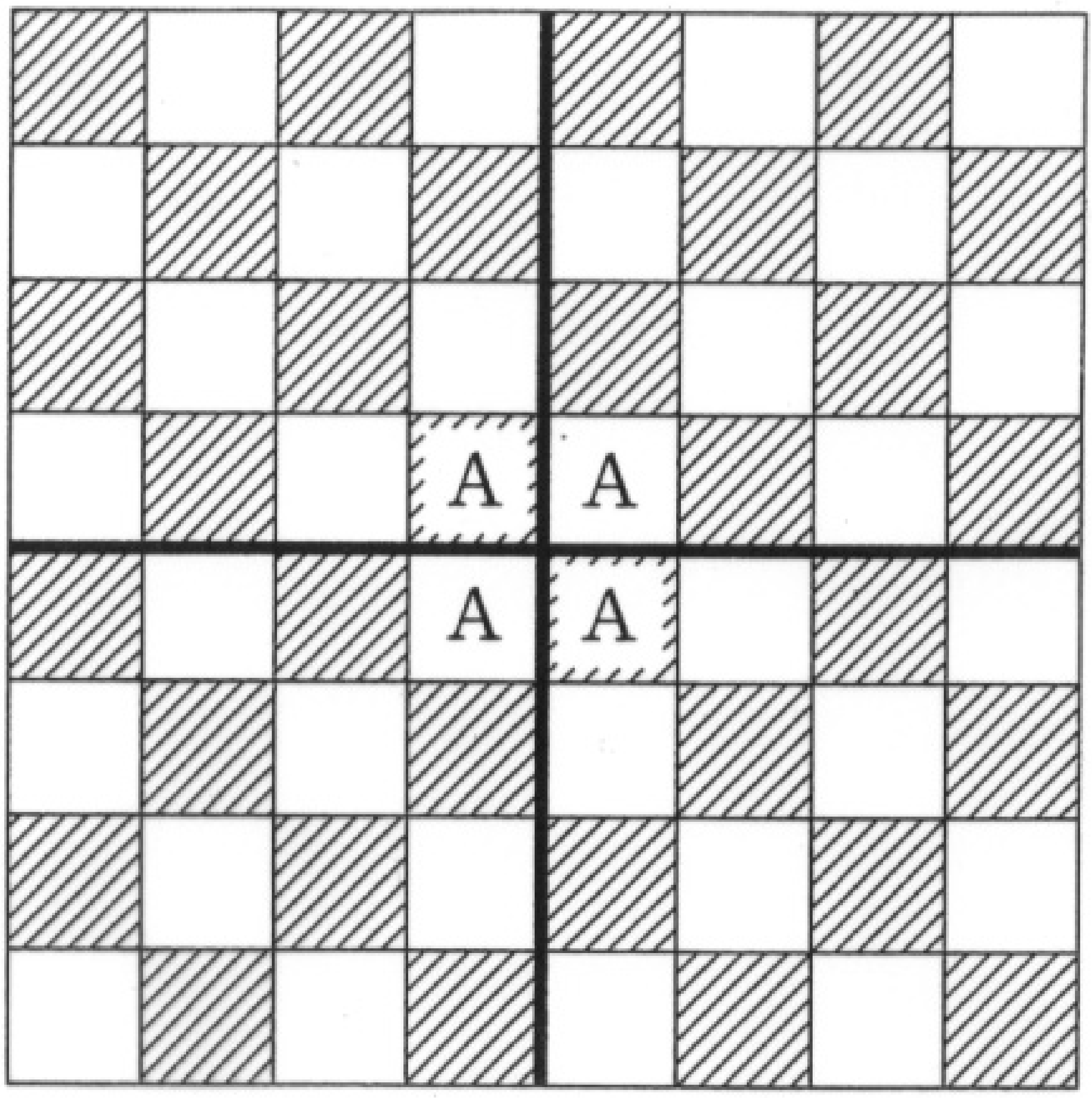


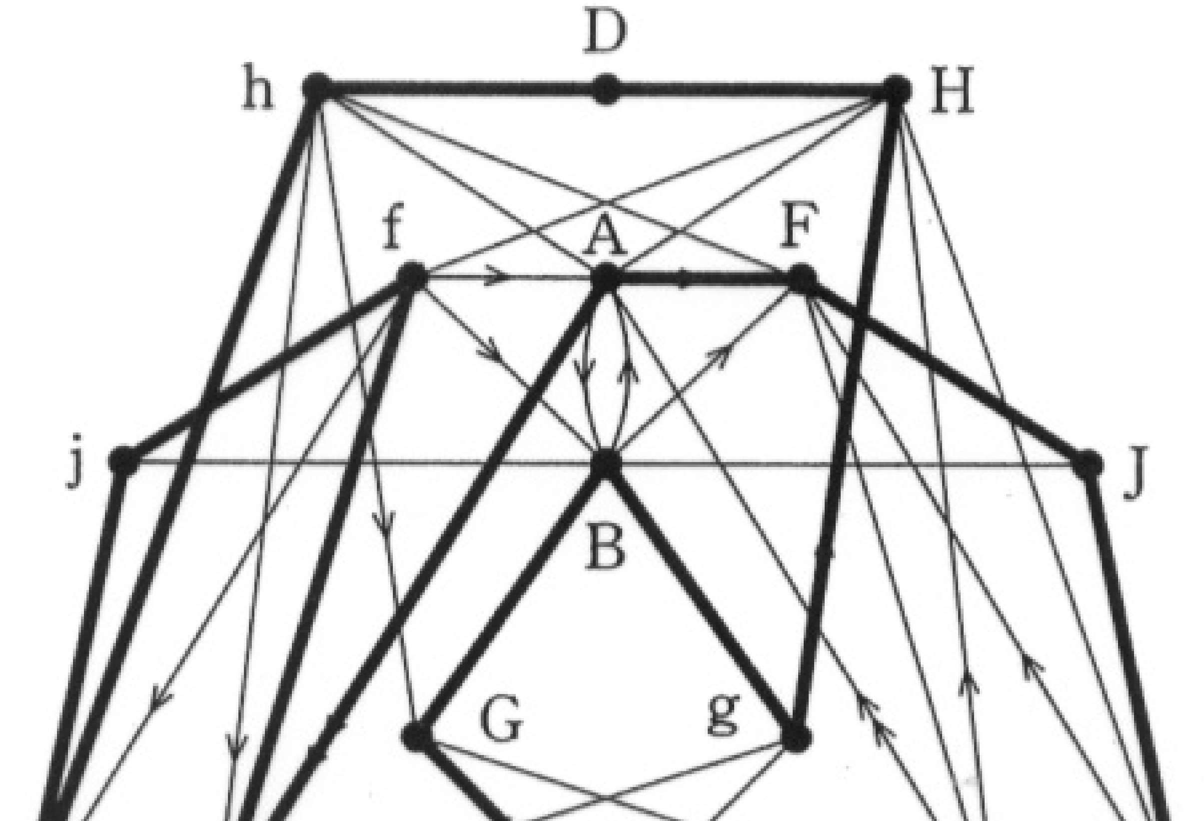

d
C
D
B
E
A
e
F
f

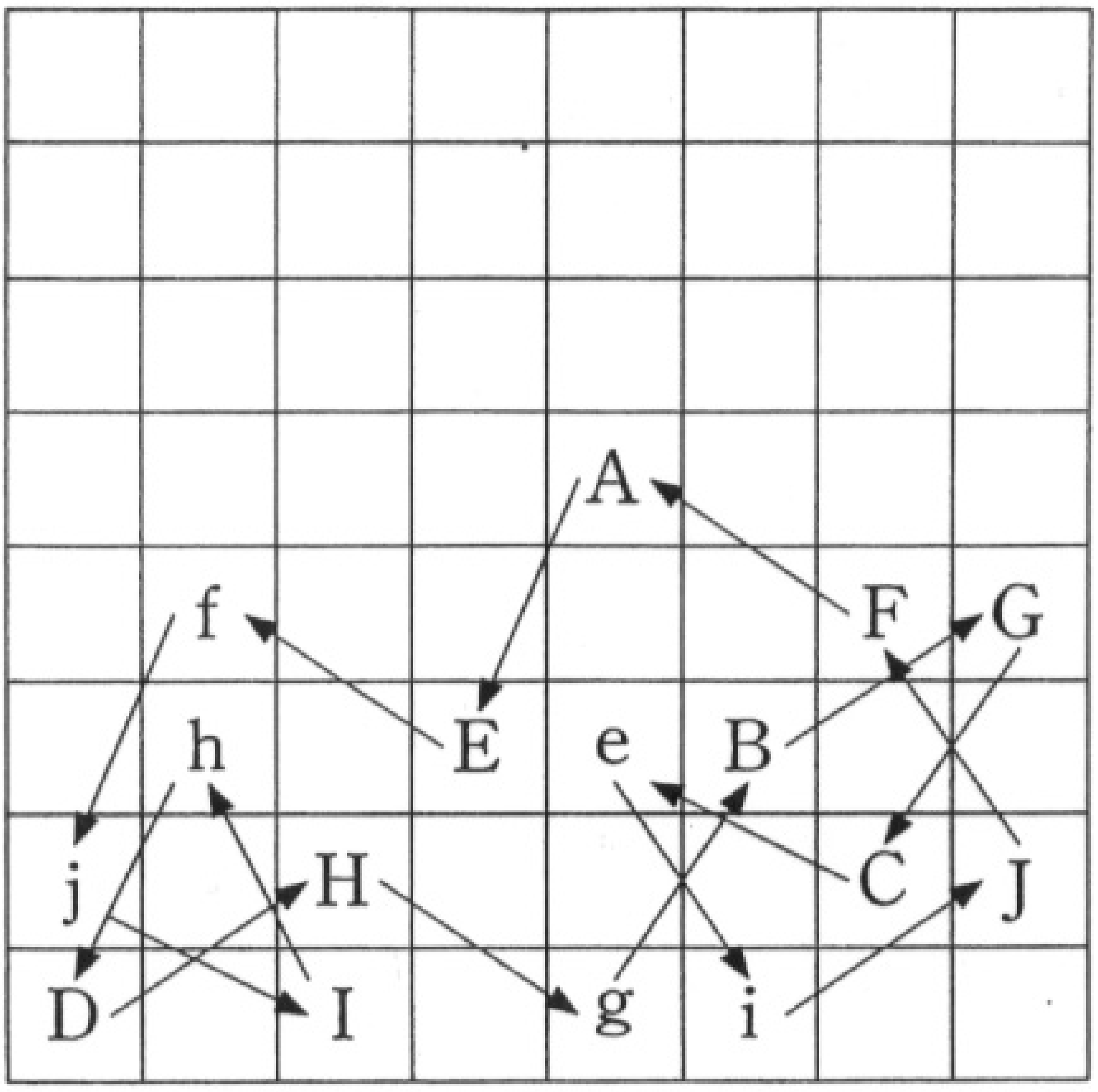


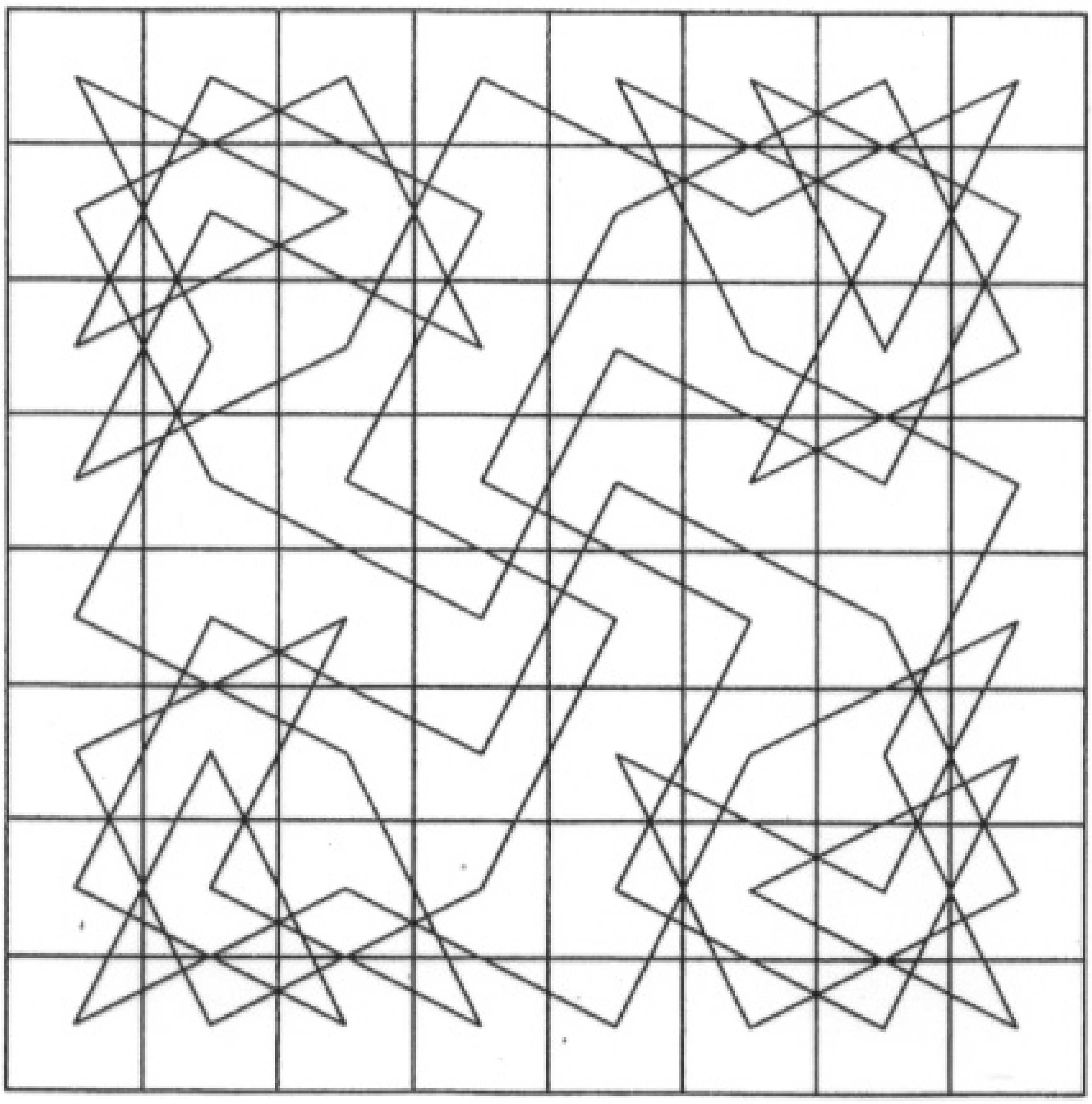
D	j	i	g	G	I	J	D
J	C	h	f	F	H	C	j
I	H	B	e	E	B	h	i
G	F	E	A	A	e	f	g
g	f	e	A	A	E	F	G
i	h	B	E	e	B	H	I
j	C	H	F	f	h	C	J
D	J	I	G	g	i	j	D

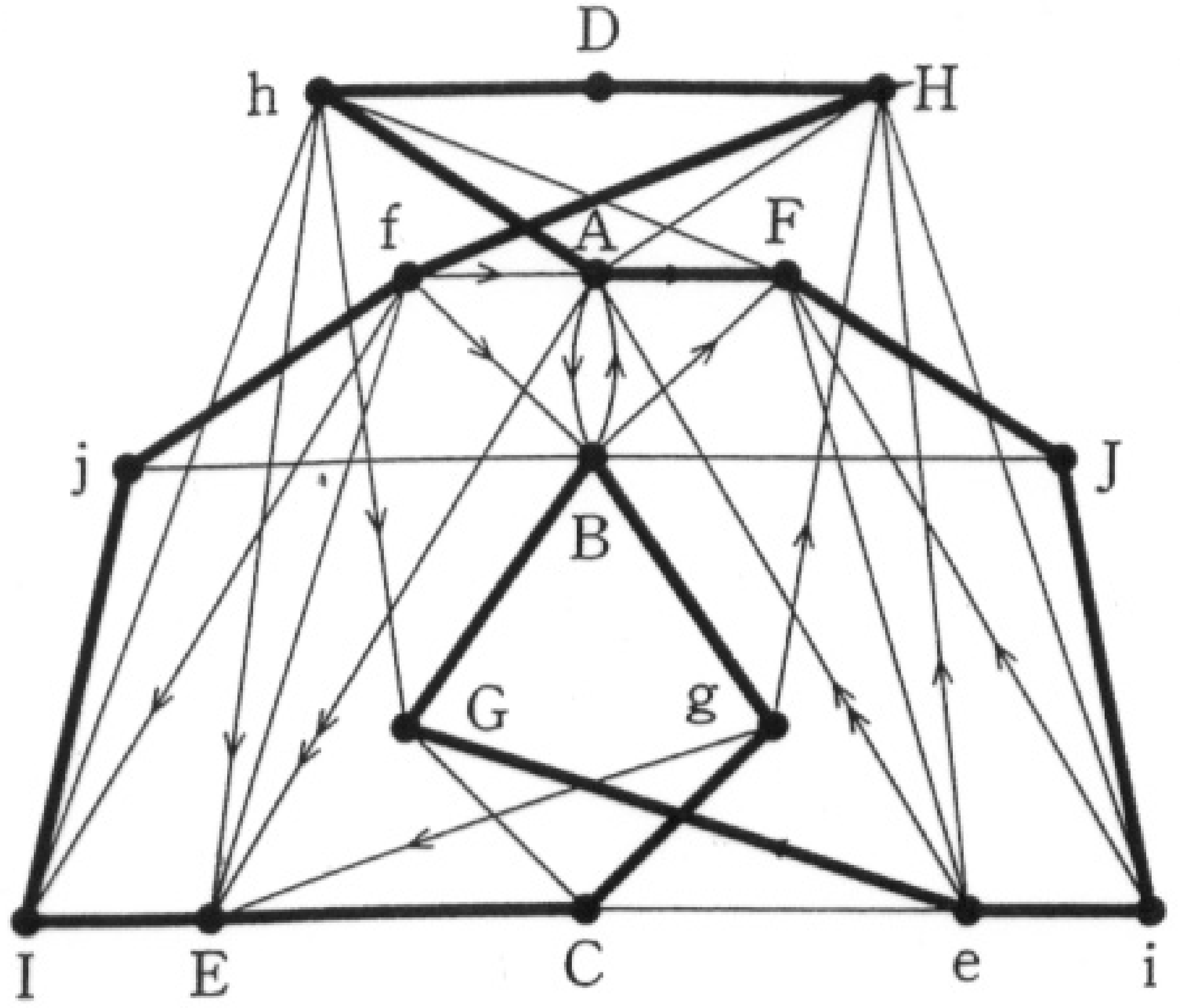


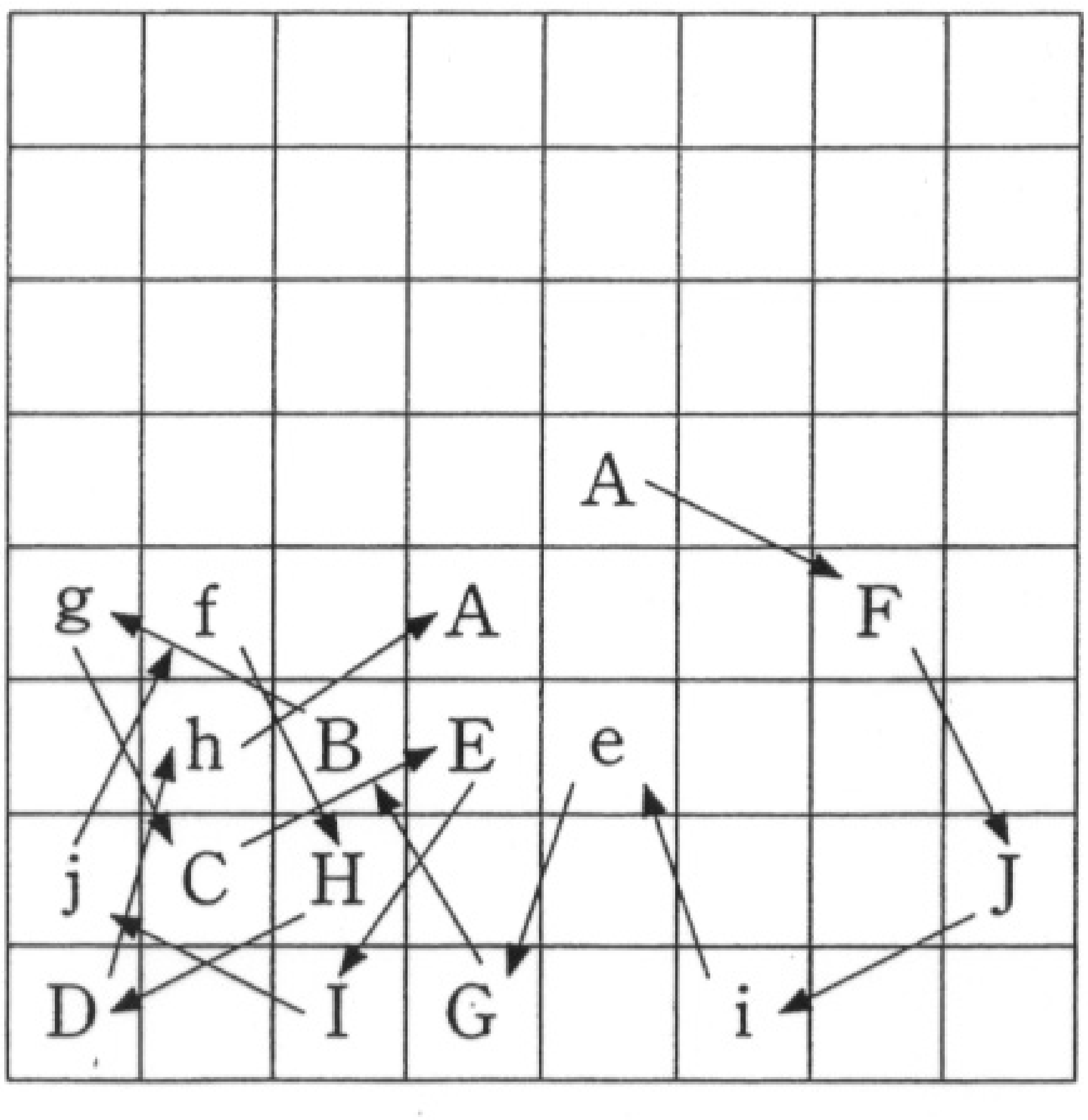

A
A
A
A

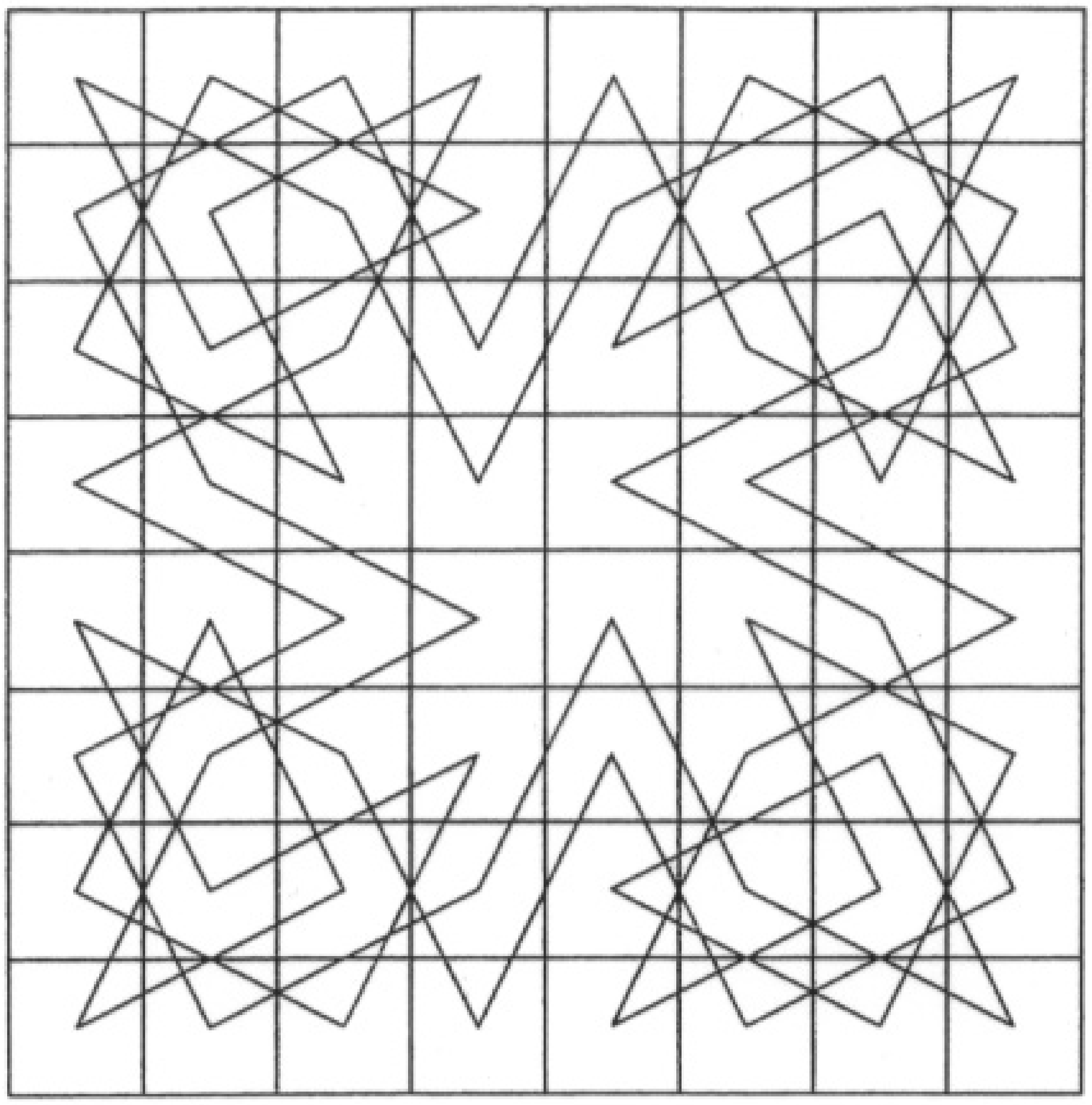

D
h
H
f
A
F
j
J
B
G
g
I
E
C
e
i

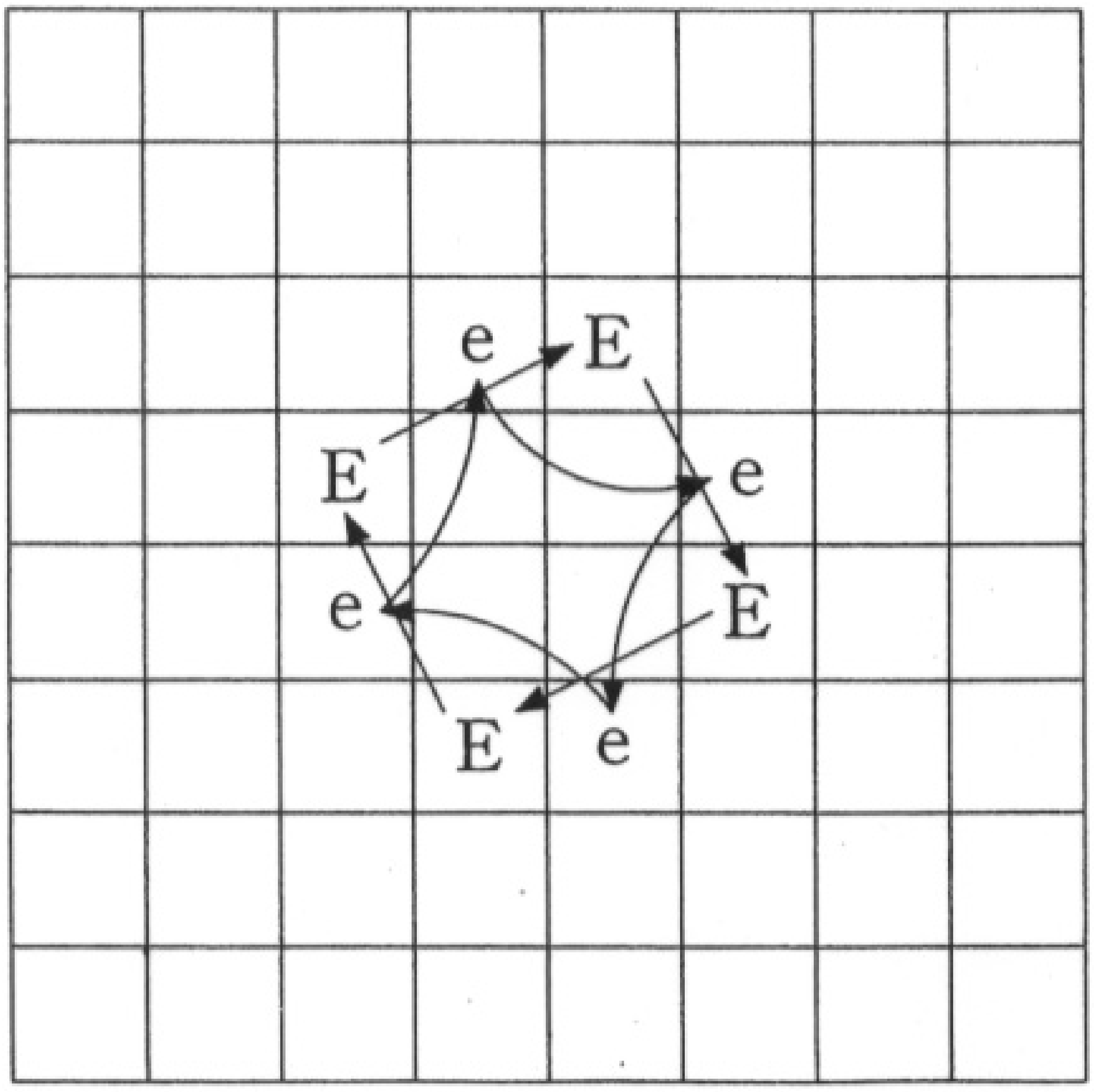

A
F
G
f
E
e
B
h
C
J
j
H
D
I
g
i



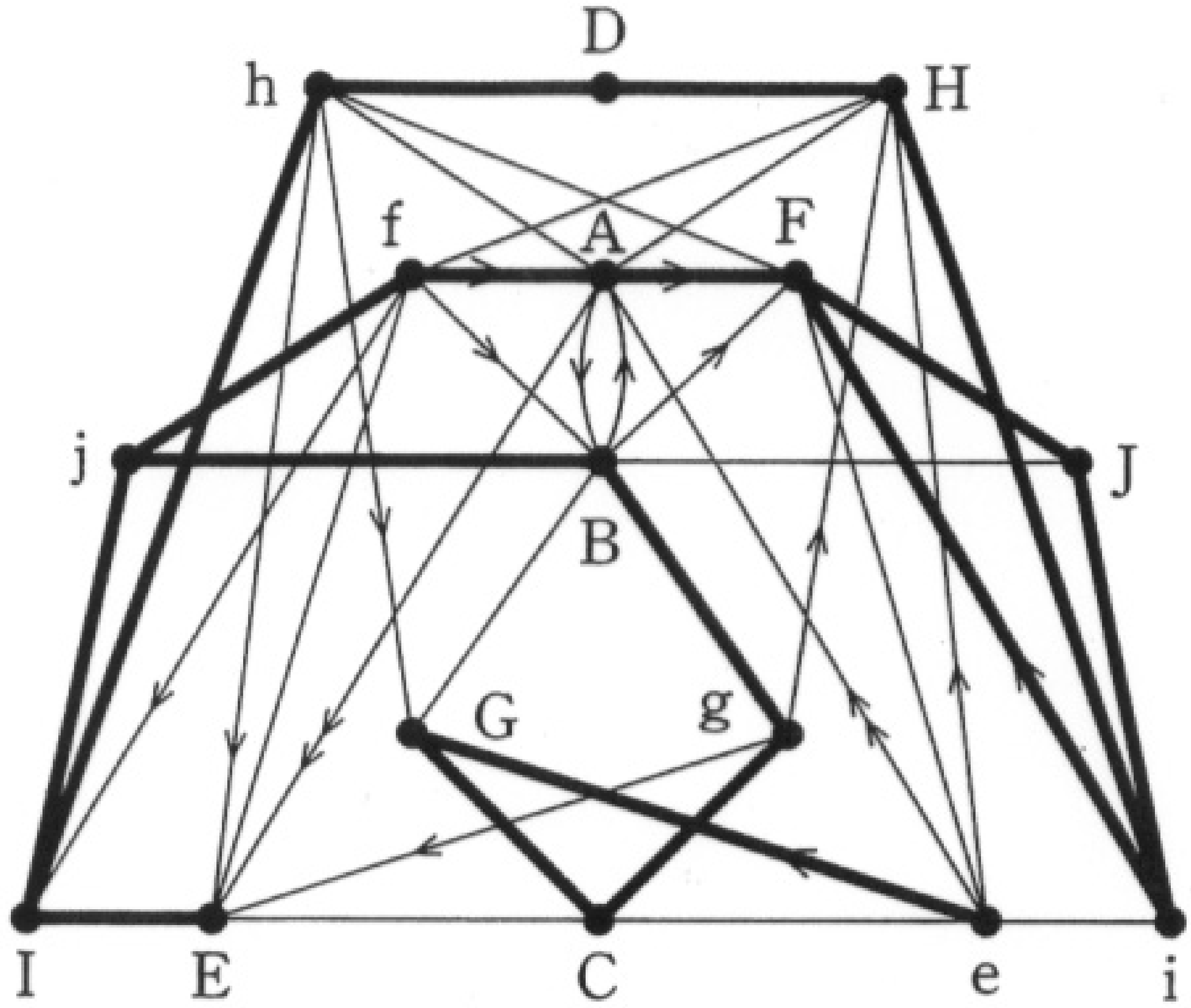

D
h
H
f
A
F
j
J
B
G
g
I
E
C
e
i

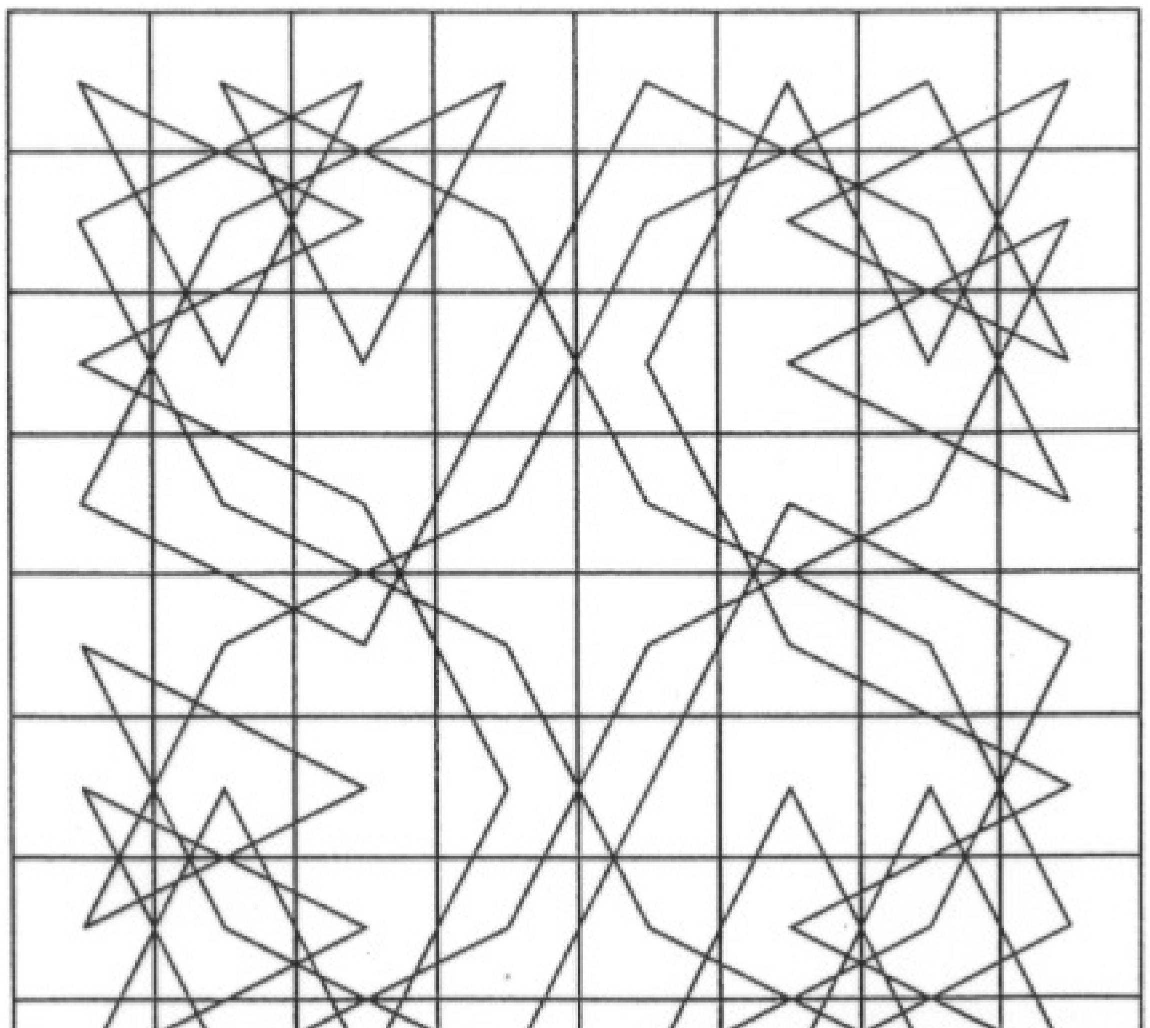

A
g
f
A
F
h
B
E
e
j
C
H
J
D
I
G
i

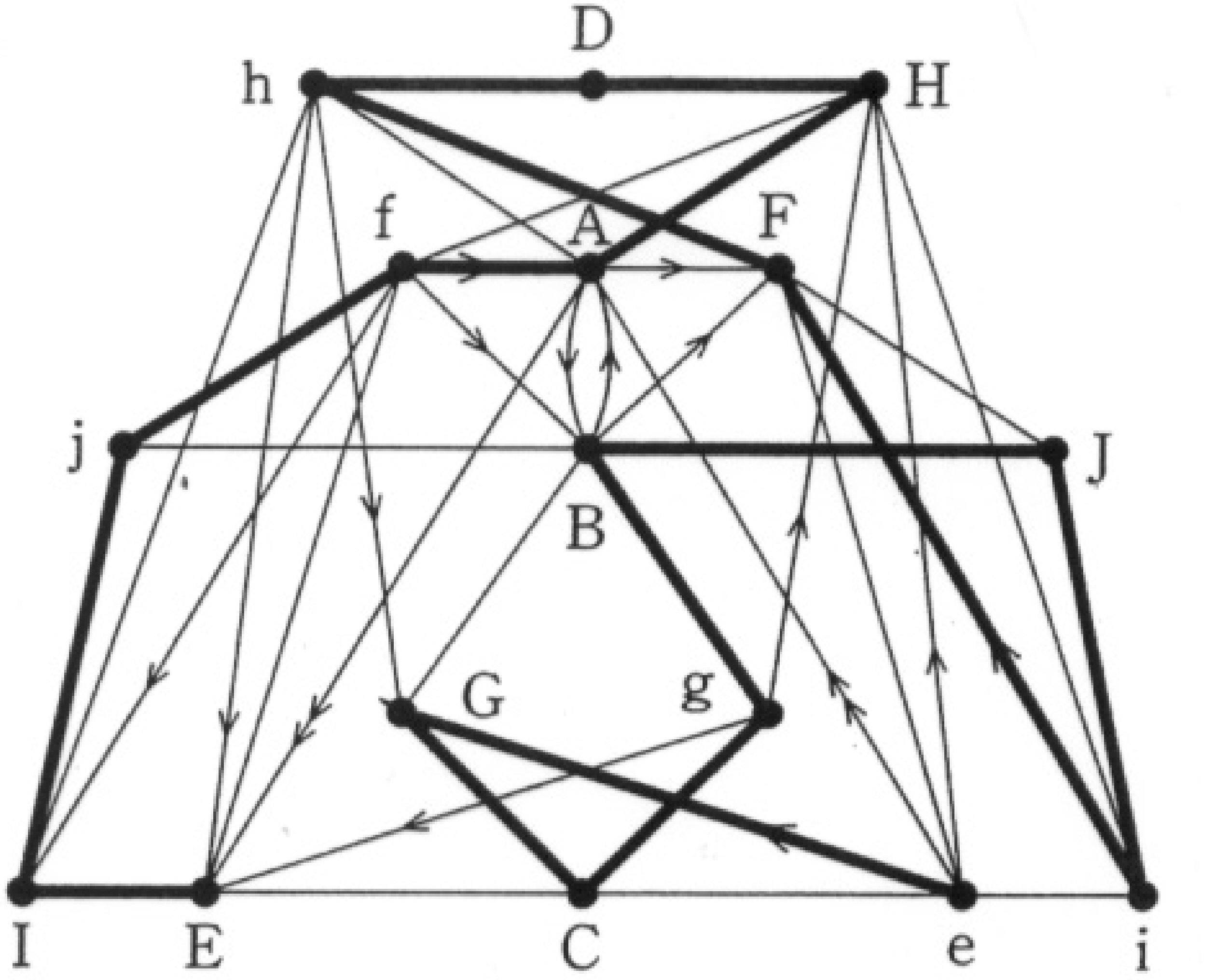


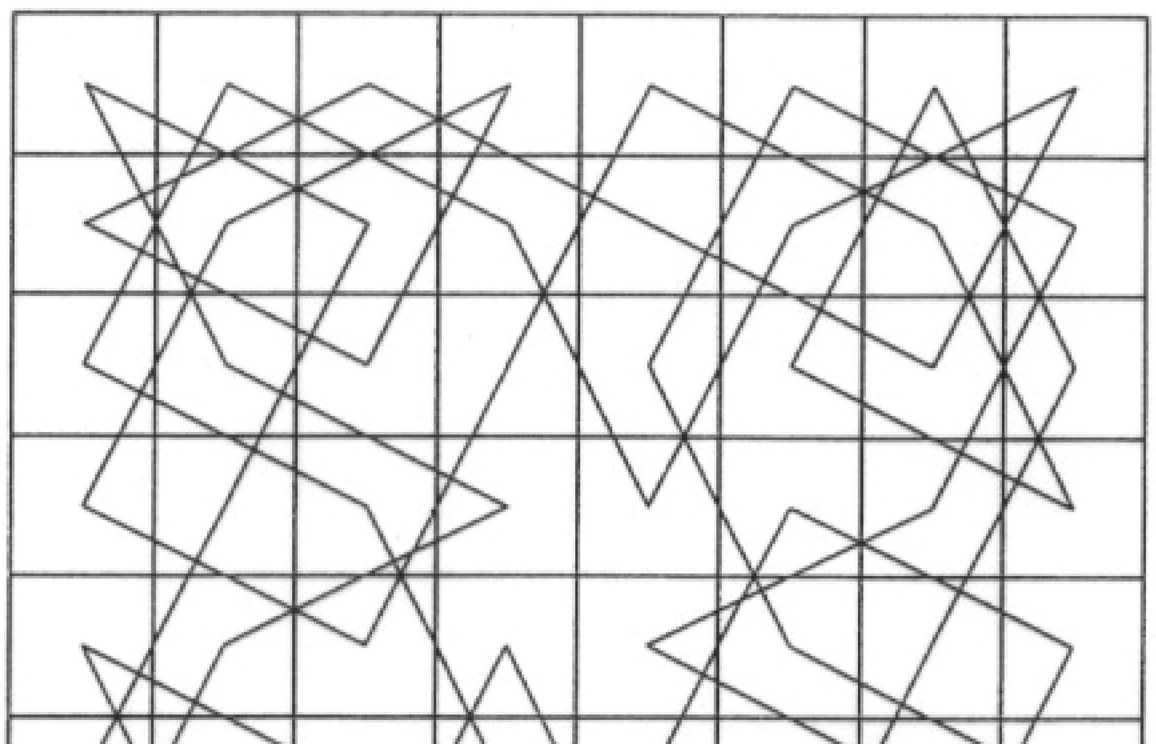


e
E
E
e
e
E
e
E
E
e


D
h
H
f
A
F
j
J
B
G
g
I
E
C
e
i




D
h
H
f
A
F
j
J
B
G
g
I
E
C
e
i



一つ山くずし

［Gの条件］

Ⅰ．石が1個も取れない最終の状態はGの状態である．

Ⅱ．Nの状態が手番のときは，石をうまく取るとGの状態にできる．

Ⅲ．Gの状態が手番のときは，石をどう取ってもNの状態になる．

Ⅳ．ゲームは有限回で確実に終わる．

n \ k	1	2	3
0	G	G	G
1	G		
2			

n \ k	1	2	3
0	G	G	G
1	G	N	N
2			

n \ k	1	2	3
0	G	G	G
1	G	N	N
2	N	N	N

$n \backslash k$	1	2	3
0	G	G	G
1	G	N	N
2	×	N	N
3			

↑ (column 1)
N

$n \backslash k$	1	2	3
0	G	G	G
1	G	×	N
2	N	N	N
3	N		

↑ (column 2)
N

$n \backslash k$	1	2	3
0	G	G	×
1	G	N	N
2	N	N	N
3	N	N	

↑ (column 3)
G

$n \backslash k$	1	2	3
0	G	G	G
1	G	N	N
2	N	N	N
3	N	N	G
4	G	G	G
5	G	N	N
6	N	N	N
7	N	N	G
8	G	G	G
9	G	N	N
10	N	N	N
11	N	N	G

$n \backslash k$	1	2	3
0	G	G	G
1	G	N	N
2	N	N	N
3	N	N	G
4	G	G	G
5	G	N	N
6	N	N	N
7	N	N	G
8	G	G	G
9	G	N	N
10	N	N	N
11	N	N	G

$n \backslash k$	1	2	3	4
0	G	G	G	G
1	G	N	N	N
2	N	N	N	N
3	N	N	G	N
4	N	N	N	G
5	G	G	G	G
6	N	N	N	N
7	N	G	N	N
8	N	N	N	N
9	N	N	N	N
10	G	G	G	G
11	G	N	N	N
12	N	N	N	N
13	N	N	G	N
14	N	N	N	G
15	G	G	G	G
16	N	N	N	N
17	N	G	N	N
18	N	N	N	N
19	N	N	N	N
20	G	G	G	G

$n \backslash k$	1	2	3	4
0	G	G	G	G
1	G	N	N	N
2	N	N	N	N
3	N	N	G	N
4	N	N	N	G
5	G	G	G	G
6	N	N	N	N
7	N	G	N	N
8	N	N	N	N
9	N	N	N	N
10	G	G	G	G
11	G	N	N	N
12	N	N	N	N
13	N	N	G	N
14	N	N	N	G
15	G	G	G	G
16	N	N	N	N
17	N	G	N	N
18	N	N	N	N
19	N	N	N	N
20	G	G	G	G

n \ k	1	2	3	4	5	6	7
0	G	G	G	G	G	G	G
1	G	N	N	N	N	N	N
2	N	N	N	N	N	N	N
3	N	N	G	N	N	N	N
4	N	N	N	G	N	N	N
5	N	N	N	N	G	N	N
6	N	N	N	N	N	N	N
7	N	N	N	N	N	N	G
8	N	N	N	G	N	N	N
9	G	G	G	G	G	G	G
10	N	N	N	N	N	N	N
11	N	G	N	N	N	N	N
12	N	N	N	N	N	N	N
13	N	N	N	N	N	N	N
14	N	N	N	N	N	N	N
15	N	N	N	N	N	G	N
16	N	N	N	N	N	N	G
17	G	G	G	G	G	G	G
18	G	N	N	N	N	N	N
19	N	N	N	N	N	N	N

n \ k	1	2	3	4	5	6	7
20	N	N	G	N	N	N	N
21	N	N	N	N	N	N	N
22	N	N	N	N	G	N	N
23	N	N	N	N	N	N	N
24	N	N	N	N	N	N	G
25	G	G	G	G	G	G	G
26	G	N	N	N	N	N	N
27	N	N	N	N	N	N	N
28	N	N	G	N	N	N	N
29	N	N	N	G	N	N	N
30	N	N	N	N	G	N	N
31	N	N	N	N	N	N	N
32	N	N	N	N	N	N	G
33	N	N	N	G	N	N	N
34	G	G	G	G	G	G	G
35	N	N	N	N	N	N	N
36	N	G	N	N	N	N	N
37	N	N	N	N	N	N	N
38	N	N	N	N	N	N	N
39	N	N	N	N	N	N	N

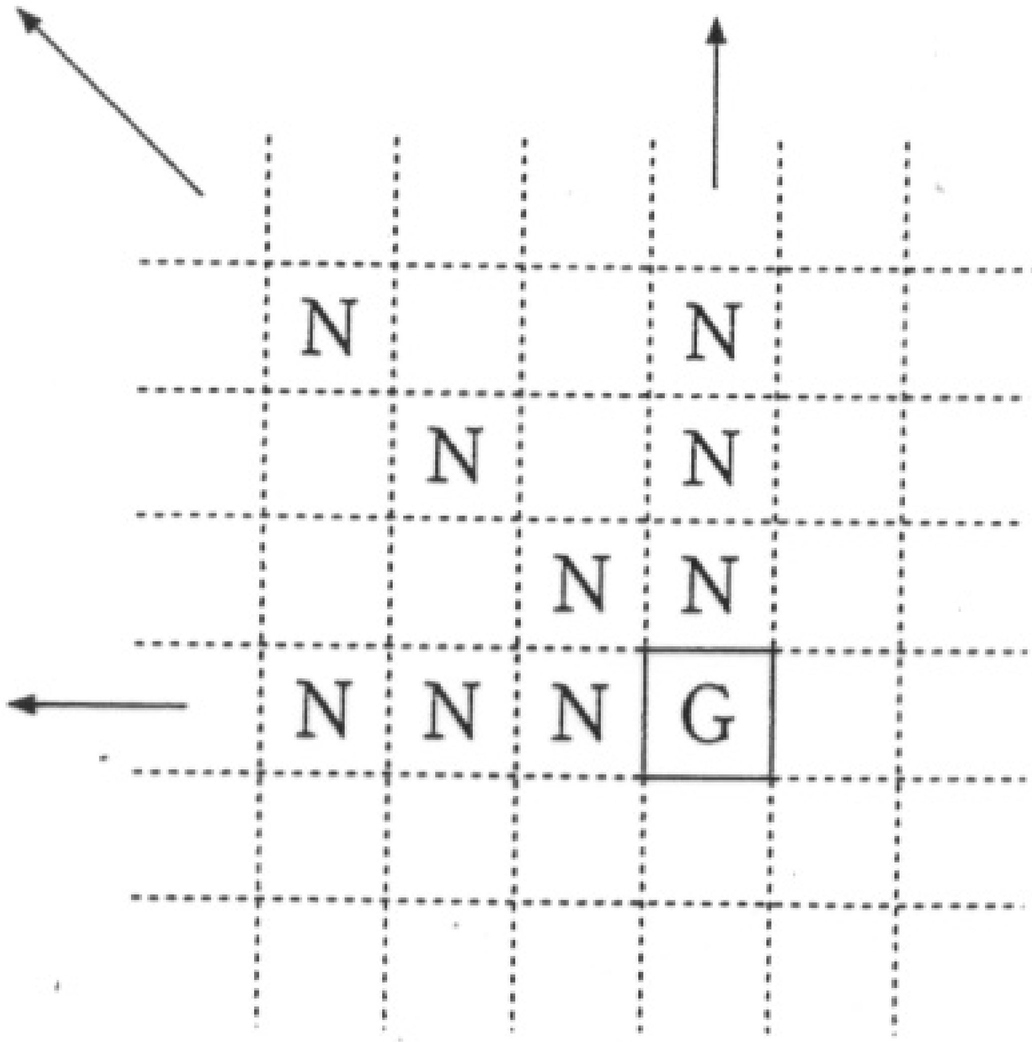
二つ山くずし

1．どちらか一方の山から石を取るときは，
何個でも好きな数だけ取ってよい

2．二つの山から石を同時に取るときは，
何個でもよいが必ず同じ数だけ取る

「ホワイトフのゲーム」

$m \backslash n$	0	1	2	3	4	5	…	…
0	G	N	N	N	N	N	N	N
1	N	N						
2	N		N					
3	N			N				
4	N				N			
5	N					N		
…	N						N	
…	N							N



m \ n	0	1	2	3	4	5	…	…
0	G	N	N	N	N	N	N	N
1	N	N	G					
2	N	G	N					
3	N			N				
4	N				N			
5	N					N		
…	N						N	
…	N							N

m \ n	0	1	2	3	4	5	…	…
0	G	N	N	N	N	N	N	N
1	N	N	G	N	N	N	N	N
2	N	G	N	N	N	N	N	N
3	N	N	N	N	N			
4	N	N	N	N	N	N		
5	N	N	N		N	N	N	
…	N	N	N			N	N	N
…	N	N	N				N	N

m	n	$n-m$
0	0	0
1	2	1
2	1	− 1
3	5	2
4	7	3
5	3	− 2
6	10	4
7	4	− 3
8	13	5
9	15	6
10	6	− 4
11	18	7
12	20	8
13	8	− 5
14	23	9
15	9	− 6
16	26	10

$n-m$	m	n
0	0	0
1	1	2
− 1	2	1
2	3	5
− 2	5	3
3	4	7
− 3	7	4
4	6	10
− 4	10	6
5	8	13
− 5	13	8
6	9	15
− 6	15	9
7	11	18
− 7	18	11
8	12	20
− 8	20	12

$n-m$	m	n
0	0	0
1	1	2
2	3	5
3	4	7
4	6	10
5	8	13
6	9	15
7	11	18
8	12	20
9	14	23
10	16	26
11	17	28
12	19	31
13	21	34
14	22	36
15	24	39
16	25	41

「ヴィノグラドフの定理」

α と β を

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$$

を満たす正の無理数とする．

するとと，r を1，2，3，……と変えることによって，すべての正の整数は $[r\alpha]$ か $[r\beta]$ のどちらかでただ1通りに表される．

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\beta=1+\alpha=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\alpha_r=[\alpha r]=\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}r\right]$$
$$\beta_r=[\beta r]=\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}r\right] \quad (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

で定義すると，

$$\alpha_0<\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\alpha_4<\alpha_5<\cdots\cdots$$
$$\beta_0<\beta_1<\beta_2<\beta_3<\beta_4<\beta_5<\cdots\cdots$$

は明らかである．また，

$$[\beta r]=[(\alpha+1)r]=[\alpha r+r]=[\alpha r]+r$$

から，

$$\beta_r-\alpha_r=r$$

も成り立つ．

$r = n - m$	$m = [\alpha_r \gamma]$	$n = [\beta_r \gamma]$
0	0	0
1	1	2
2	3	5
3	4	7
4	6	10
5	8	13
6	9	15
7	11	18
8	12	20
9	14	23
10	16	26
11	17	28
12	19	31
13	21	34
14	22	36
15	24	39
16	25	41

三つ山くずし

「ニム和」

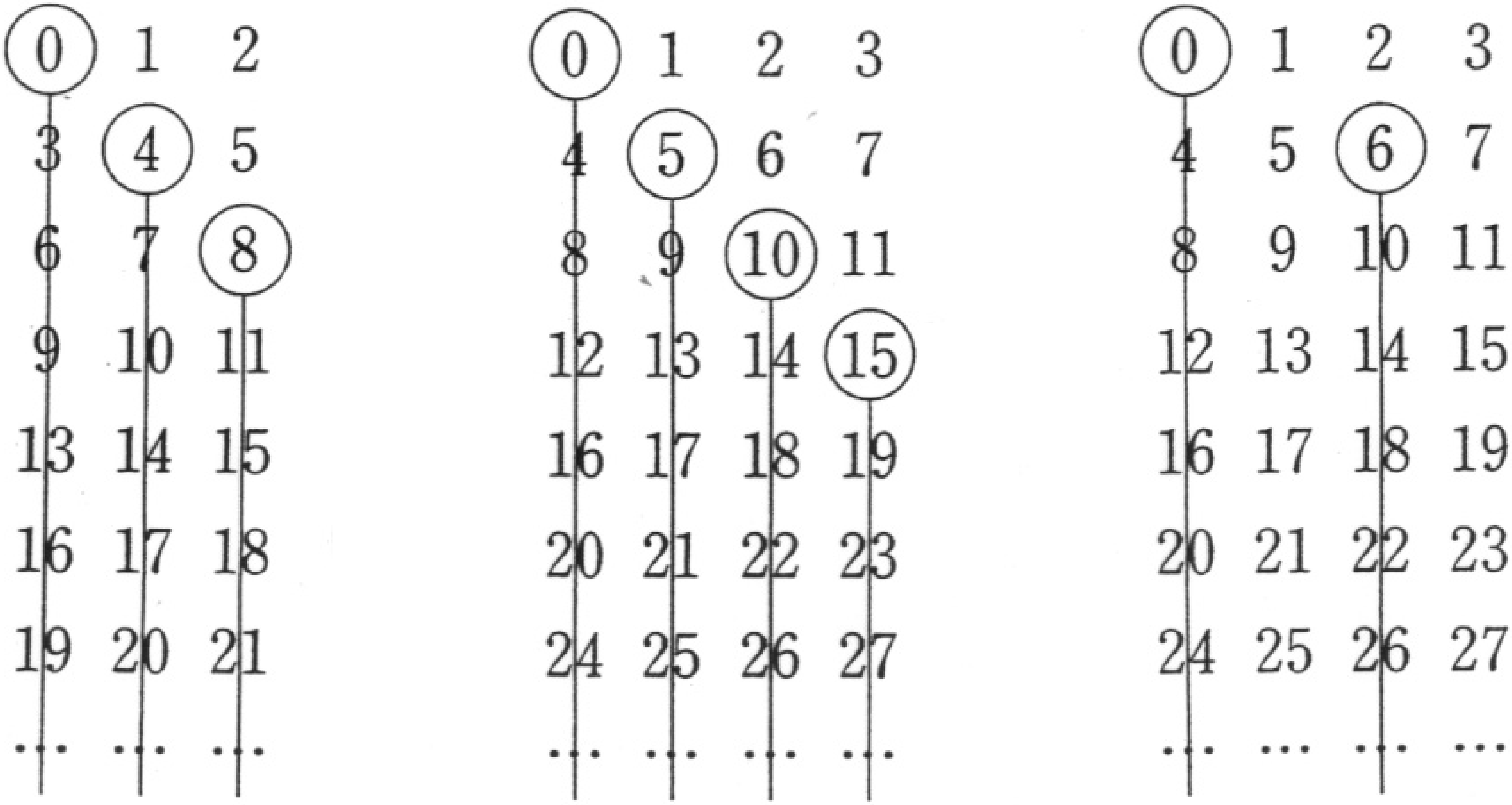
三つ山くずしの一般化

たくさんの石を k 個の山に分け，次のルールで 2 人が交互に取り合っていく．そして，最後に石を取った者が勝ちである．そのルールは，r 個以内の山からなら，何個の石を取ってもよい．ただし，どれかの山から少なくとも 1 個の石は取る必要がある．

銀貨の鋳造

ここに銀貨の鋳造機がある．A, B の 2 人はそれを使って銀貨を交互に鋳造するが，すでに鋳造した銀貨の組み合わせで作れる金額の銀貨は鋳造できない．たとえば，A は 3 万円銀貨，B は 4 万円銀貨を鋳造すれば，

$$\left.\begin{array}{lll} 3+3=6, & 3+4=7, & 4+4=8 \\ 6+3=9, & 7+3=10, & 8+3=11, \\ 9+3=12, & 10+3=13, & 11+3=14 \end{array}\right\} \times$$

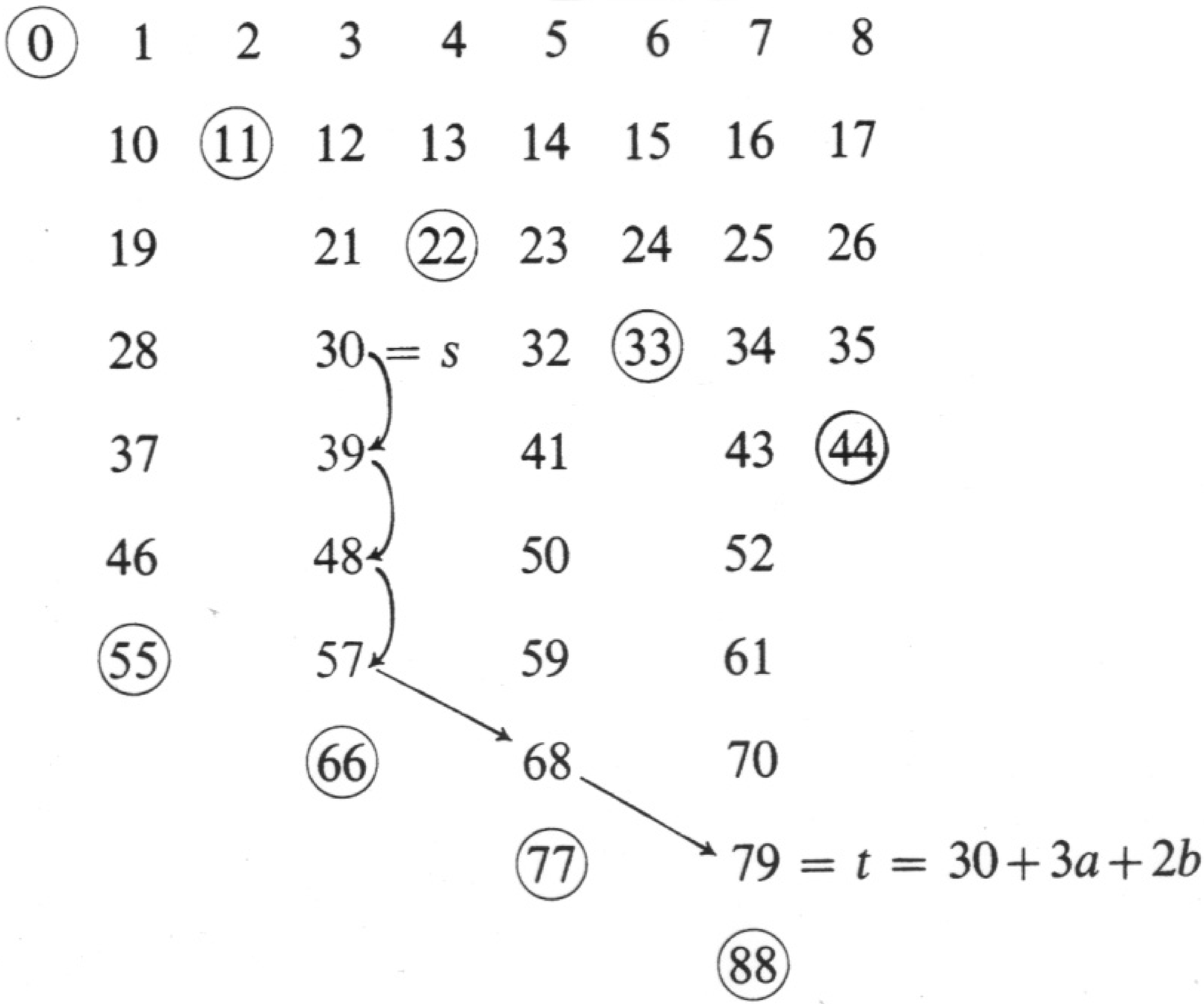


0 1 2
3 4 5
6 7 8
9 10 11
13 14 15
16 17 18
19 20 21
... ...
0 1 2 3
4 5 6 7
8 9 10 11
12 13 14 15
16 17 18 19
20 21 22 23
24 25 26 27
... ...
0 1 2 3
4 5 6 7
8 9 10 11
12 13 14 15
16 17 18 19
20 21 22 23
24 25 26 27
... ...

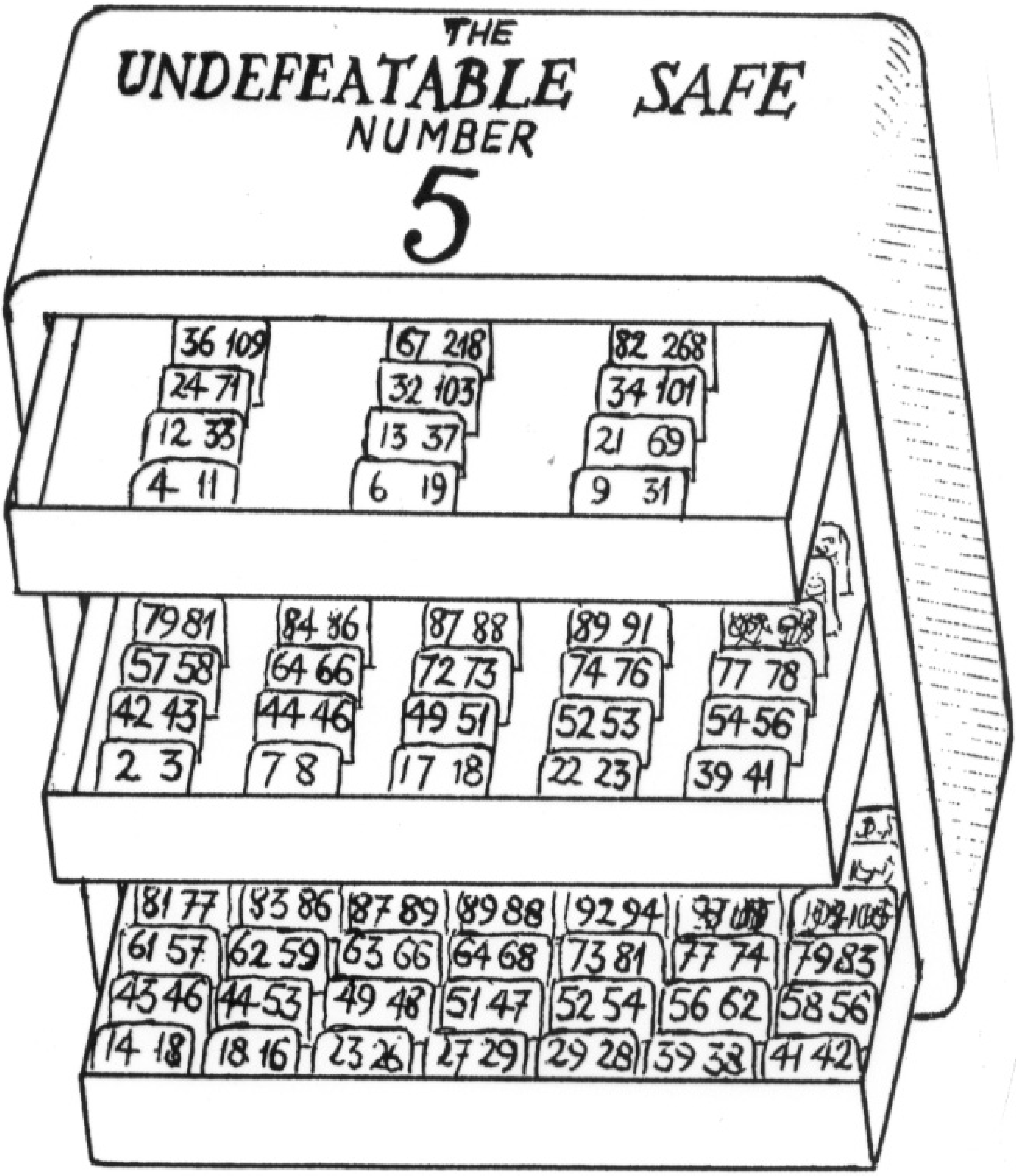
[ハッチングスの定理]

m と n を共通の約数をもたない任意の正の整数とする．このとき，m 万 円銀貨と n 万円銀貨が鋳造された直後の状態は N(m, n)である．ただし，$m=2$，$n=3$ のときを除く．

この定理で，m を素数とすると，m と n は決して共通の約数をもつことはない． ただし，どういう金額の銀貨を鋳造すれば勝ちになるかの具体的な手順は，ハッチングスの定 理からは得られない．



0 1 2 3 4 5 6 7 8
10 11 12 13 14 15 16 17
19 21 22 23 24 25 26
28 30 = s 32 33 34 35
37 39 41 43 44
46 48 50 52
55 57 59 61
66 68 70
77 79 = t = 30 + 3a + 2b
88


THE
UNDEFEATABLE SAFE
NUMBER
5
36 109
24 71
12 33
4 11
67 218
32 103
13 37
6 19
82 268
34 101
21 69
9 31
79 81
57 58
42 43
2 3
84 86
64 66
44 46
7 8
87 88
72 73
49 51
17 18
89 91
74 76
52 53
22 23
77 78
54 56
39 41
81 77
87 89
89 88
92 94
61 57
62 59
63 66
64 68
73 81
77 74
79 83
43 46
44 53
49 48
51 47
52 54
56 62
58 56
14 18
18 16
23 26
27 29
29 28
39 38
41 42